第一章 概 论

计算流体力学在近二三十年中有了突飞猛进的发展，而且正在以更快的速度前进。推动这一发展的原因，一方面是实际问题的需要，特别是宇航事业的需要；另一方面是计算技术的飞速发展和巨型计算机的出现。

计算流体力学是多种领域的交叉学科，它所涉及的学科有流体力学、偏微分方程的数学理论、计算几何、数值分析、计算机科学等。它的发展促进了这些学科的进一步发展。最终体现计算流体力学水平的是解决实际问题的能力。

本书的基本内容是采用差分方法、数值求解可压缩纳维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程（以下简称为N-S方程）和简化N-S方程，研究流体运动规律，重点是超声速、高超声速定常粘性绕流流场的数值模拟。

第一节 计算流体力学与数值模拟

任何流体运动的规律都是由以下3个定律为基础的：质量守恒定律；动量守恒定律和能量守恒定律。这些基本定律可由数学方程组来描述，如欧拉(Euler)方程，N-S方程。采用数值计算方法，通过计算机求解这些数学方程，研究流体运动特性，给出流体运动空间定常或非定常流动规律，这样的学科就是计算流体力学。

计算流体力学的兴起推动了研究工作的发展。自从1687年牛顿定律公布以来，直到本世纪50年代初，研究流体运动规律的主要方法有两种：一是实验研究，它以地面实验为研究手段；另一种是理论分析方法，它利用简单流动模型假设，给出所研究问

题的解析解。理论工作者在研究流体运动规律的基础上建立了各类型主控方程，提出了各种简化流动模型，给出了一系列解析解和计算方法。这些研究成果推动了流体力学的发展，奠定了今天计算流体力学的基础，很多方法仍是目前解决实际问题时常采用的方法。然而，仅采用这些方法研究较复杂的非线性流动现象是不够的，特别是不能满足50年代已开始高速发展起来的宇航飞行器绕流流场特性研究的需要。

计算流体力学的兴起促进了实验研究和理论分析方法的发展，为简化流动模型的建立提供了更多的依据，使很多分析方法得到发展和完善，例如目前在飞机工业中应用广泛的面元法就是一个很好的例子。然而，更重要的是计算流体力学采用它独有的新的研究方法——数值模拟方法——研究流体运动的基本物理特性。这种方法的特点如下：①给出流体运动区域内的离散解，而不是解析解。这区别于一般理论分析方法；②它的发展与计算机技术的发展直接相关。这是因为可能模拟的流体运动的复杂程度、解决问题的广度和所能模拟的物理尺度以及给出解的精度，都与计算机速度、内存、视算及输出图形的能力直接相关；③若物理问题的数学提法（包括数学方程及其相应的边界条件）是正确的，则可在较广泛的流动参数（如马赫数、雷诺数、飞行高度、气体性质、模型尺度等）范围内研究流体力学问题，且能给出流场参数的定量结果。这常常是风洞实验和理论分析难以作到的。然而，要建立正确的数学方程还必须与实验研究相结合。更重要的是实际问题中所求解的多维非线性偏微分方程组十分复杂，其数值解的现有数学理论尚不够充分。严格的稳定性分析，误差估计和收敛性理论的发展还跟不上数值模拟的进展。虽然关于广义解唯一性存在性等问题的严格数学理论已取得了长足的进展，但还不足以对一些感兴趣的具体的复杂问题给出明确的回答。所以在计算流体力学中，仍必须依靠一些较简单的、线性化的、与原问题有密切关系的模型方程的严格数学分析，以及依靠启发性的推理给出所求解问题的数值解的理论依据。然后再依靠数值实验，地面实

验和物理特性分析，验证计算方法的可靠性，从而进一步改进计算方法。

事实上，实验研究、理论分析方法和数值模拟是研究流体运动规律的三种基本方法，它们的发展是相互依赖相互促进的。

另一方面，计算流体力学的发展进程是伴随着计算机技术的发展而前进的。一般来说，只有计算机的速度、内存和外围设备达到一定程度时才会有计算流体力学新阶段的出现。随着计算技术的提高、巨型计算机的出现，计算流体力学所研究问题的深度和广度不断发展，它不但可用于研究已知的一些物理问题，而且可用于发现新的物理现象。例如甘贝尔（Campbell）和穆勒（Mueller）等人在数值实验中，发现了亚声速斜坡绕流中的分离现象[1]，以后他们在风洞实验中作了证实；又如基姆（Kim）和莫因（Moin）等人在数值计算中发现了倒马蹄涡[2,3]，后来被实验研究所证实。其研究领域也随着计算机的速度和内存的增加而不断扩大。例如文献[4]中采用64个节点机构成的NSC计算机，求解非定常不可压N－S方程，直接数值模拟各向同性湍流，得到了较好的结果。这使人们更清楚地了解到采用直接数值模拟的方法与实验研究相结合是突破多年来未能解决的流体力学关键问题——湍流问题的重要方法。

总之，计算流体力学的兴起促进了流体力学的发展，改变了流体力学研究工作的状况，很多原来认为难以解决的问题，如超声速、高超声速钝体绕流，分离流涡运动、低密度效应、真实气体效应以及湍流问题等，都有了不同程度的发展，且将为流体力学研究工作提供新的前景。

第二节　计算流体力学的发展[51]

计算流体力学首先是随着计算技术和宇航飞行器的发展而发展且逐步形成一独立学科的。计算机问世以前，研究工作的重点是椭圆型方程的数值解。30年代中所研究的绕流流场是假设气体

的粘性和旋度效应可忽略不计，故流动的控制方程为拉普拉斯(Laplace)方程，求解的方法是基本解的迭加，也就是目前飞机工业中广泛应用的面元法的前身。以后，为了考虑粘性效应，有了边界层方程的数值计算方法，并发展为以位势流方程为外流方程，与内流边界层方程相结合，通过迭代求解粘性干扰流场的计算方法。同一时期，很多数学家研究了偏微分方程的数学理论。哈达马德(Hadamard)，库朗(Courant)，弗里德里克斯(Friedrichs)，彼得罗夫斯基(Петровский)，索波列夫(Соболев)，梯赫诺夫(Тихонов)等人研究了偏微分方程的基本特性、数学提法的适定性、物理波的传播特性、解的光滑性和唯一性等问题，发展了双曲型偏微分方程理论。以后，库朗，弗里德里克斯和莱维(Lewy)等人发表了经典论文[5]，证明了连续的椭圆型、抛物型和双曲型方程组解的存在性和唯一性定理，且针对线性方程的初值问题，首先将偏微分方程离散化，然后证明了离散系统收敛到连续系统，最后利用代数方法确定了差分解的存在性。他们还讨论了双曲型方程的特征性质，提出了特征线方法，给出了著名的稳定性判别条件：CFL条件。这些工作是差分方法的数学理论基础。40年代中，冯·诺伊曼(Von Neumann)，里希特迈尔(Richtmyer)，霍普弗(Hopf)，拉克斯(Lax)，奥列尼克(Олейник)和其他一些学者建立了非线性双曲型方程守恒律的数值方法理论，为含有激波的气体流动数值模拟打下了理论基础。

60年代中，基于双曲型方程数学理论基础的时间相关方法开始应用于求解宇航飞行器的气体定常绕流流场问题。这种方法的基本思想是从非定常欧拉方程或非定常N-S方程出发，利用双曲型方程或双曲-抛物型方程的数学特性，沿时间方向推进求解，由此而得到对于时间 t 趋近于无穷大的渐近解为所要求的定常解。该方法虽然要求花费更多的计算机时，但因数学提法适定，又有较好的理论基础，且能模拟流体运动的非定常过程，故这是应用范围较广的一般方法。以后由拉克斯(Lax)、克莱斯

(Kreiss) 和其他著者给出的非定常偏微分方程差分逼近的稳定性理论[6]，进一步促进了时间相关方法的发展。本书所描述的基本方法是时间相关方法。另一类方法是针对一些具体问题发展起来的特殊方法，用以求解非线性定常问题。这些方法的特点是简单、所需计算机时少，但这些方法只是局部性的特殊方法，例如在50年代中、60年代初针对钝头超声速绕流数值解所提出的方法[7~8]及本书中所讨论的PNS方程推进解法等。

70年代在计算流体力学中，取得较大成功的是飞行器跨声速绕流数值计算方法的研究。首先是穆尔曼（Murman）和科勒（Cole）提出的计算方法[10]，解决了跨声速绕流中的混合型问题。他们采用松弛方法求解位势流小扰动方程，数值模拟带激波的跨声速绕流流场。在他们的工作中第一次将迎风格式应用于空气动力学问题的数值模拟。不久以后詹姆生（Jameson）[11]提出了旋转格式，将穆尔曼-科勒方法推广于求解三维跨声速绕流的全位势流方程，获得了成功。目前这些方法已直接应用于飞机工业的气动设计中。最近，詹姆生等人采用时间相关方法，给出了全机跨声速三维无粘绕流流场的计算结果。他们提出了中心多层格式[12~14]，采用龙格-库塔（Runge-Kutta）方法求解非定常欧拉方程，数值模拟跨声速全机三维绕流流场。

70年代以来，计算流体力学中取得较大成功的另一个领域是采用时间相关方法，求解可压缩N－S方程，数值模拟飞行器超声速、高超声速粘性绕流复杂流场的研究工作。针对流场中激波的数值模拟，近年来发展了高分辨率的差分格式，如总变差递减格式（Total Variation Diminishing Scheme，以后简称TVD格式）、本质无跳动格式（Essentially non-oscillatory scheme，以后简称ENO格式）、守恒同族特征方法（Conservative Supra characteristic Method，以后简称CSCM方法）等，形成了第二代差分格式。这些格式的应用使得超声速、高超声速和跨声速绕流流场的计算方法有了大的改进。目前已可模拟包含有各种宏观尺度结构的非光滑流场，如包含有激波、粘性干扰、分离涡、真实

气体效应等物理特性的流场，可利用巨型计算机，采用合适的网格生成技术和有效的计算方法，求解非定常可压缩N－S方程，数值模拟航天飞机整机的跨声速、超声速和高超声速粘性绕流流场。

在国内，早在50年代就有了计算流体力学方面的研究工作。早期的工作是研究钝头体超声速无粘绕流流场的数值解方法，研究钝头体绕流数值解的反方法[15]和正方法[16]。以后，随着我国宇航事业的发展，超声速、高超声速绕流数值计算方法的研究工作发展很快。首先开展了定常欧拉方程数值解的计算方法研究，给出了钝体超声速三维无粘绕流流场的计算结果[17~21]。70年代中，开展了采用时间相关方法求解非定常欧拉方程，可压缩N－S方程和简化N－S方程的计算方法研究。在差分格式的构造方面，提出了求解欧拉方程的特征符号分裂方法[23]和三层格式[22]等。在可压缩N－S方程的求解中，计算方法有了较大的进展，先后提出了开关函数方法[56]、调解因子方法[24]、紧致迎风格式[38]、推进迭代方法[47]、无波动无自由参数的耗散格式(Non Oscillatory Containing no free Parameters and dissipative Scheme，以后简称NND格式)[39]、界值为限格式(Maximum and minimum Bounds preserving Scheme，以后简称M_mB格式)[40]和耗散比拟方法[58]等。这些研究工作进一步改进了计算方法精度，提高了求解效率，且对流场中激波的数值模拟有较高的分辨能力。而且这些研究成果使得我们在计算流体力学的差分方法研究工作中初步形成了自己的特点。很多作者采用自己提出的计算方法，求解可压缩N－S方程，给出了各种复杂流场的计算结果。如分离流流场，激波边界层干扰流场以及各种飞行器的绕流流场等。在本书中将给出作者的部分计算结果。

应当指出，近年来计算流体力学在我国发展很快，很多学者作出了不少优秀成果。由于本书作者工作范围所限，这里未能提到。

第三节 计算流体力学中的几个问题

正如前面所述，本书所针对的实际问题主要是超声速高超声速粘性绕流流场的数值模拟。这是复杂的非光滑流场，它包含有激波、粘性干扰、分离涡等复杂物理现象。这些基本物理现象都各具自身的特点，因此，其数值模拟对计算方法提出了各种需要解决的问题。

一、激波的数值模拟

对于非线性双曲型方程，如非定常欧拉方程，不管初始值如何光滑，解可能是有间断的，对应的物理问题是流场中激波和切向间断的产生。这一特性使得非线性双曲型方程的求解有它特殊的困难，流场中激波的数值模拟成为计算流体力学中所研究的重要问题之一。

激波的数值模拟方法主要有两类：激波装配法、激波捕捉法。

（一）激波装配法

这种方法的基本思想是将激波作为非连续的边界面来处理[21,25]。此方法的优点是计算精度高，而且在间断面处满足“熵条件”，故可以认为所得到的数值解是唯一的物理解。然而它要求所求的气体运动的流场结构为已知，这在大多数情况下是困难的，因为流场事先是未知的。近年来很多人采用混合方法，即对于流场结构清楚的地方采用激波装配法，如钝体超声速绕流中的弓形头激波，而其他流场内的激波则采用激波捕捉法。

（二）激波捕捉法

这是目前应用最广的激波数值模拟方法。其基本思想不是将激波分出来作为边界处理，而是采用合适的计算方法自动捕捉激波，在激波和光滑区用统一的计算格式。最初人们采用一阶精度格式捕捉激波，可得到过激波的单调解。然而因一阶精度的格式

具有较大的差分耗散，使得差分解过激波的梯度被抹平，其物理特性失真。而且在粘性绕流的计算中，过大的差分耗散将掩盖流场中真实的物理耗散。二阶精度差分格式所给出的数值解在激波附近将产生非物理的振动，且可能出现非物理的弱解。近年来的研究工作使得这一问题有了突破性进展。人们认识到，为了正确模拟流场中的激波，首先要求正确模拟激波处的间断条件，以便得到较准确的激波速度。为此差分格式必须是守恒型的。拉克斯-温德诺夫（Lax-Wendroff）定理[26]指出，如果双曲型方程的守恒型差分方程的近似解收敛于片状光滑函数，则这些函数就是双曲型方程的弱解。其次，为了得到双曲型方程的唯一物理解[54,55]，还要求差分解满足离散熵条件[27]，或者在差分格式中增加人工耗散项，以消除非物理激波产生的可能性。最近很多作者在差分方法中，利用守恒格式、熵条件和人工耗散项，使得激波捕捉方法中的误差可局限在准确物理间断面的附近，抑制了差分解在激波附近的振动，且对激波具有高分辨能力，进一步完善了激波捕捉方法。基于这些思想，近年来国内外学者作了不少工作，发表了不少论文[28~30]。80年代初期，TVD格式[31~35]的提出使得激波捕捉方法有了重大发展，基本上解决了高阶精度差分解在激波附近的非物理振动问题。以后TVD格式有了进一步的发展[36,37,41]。另一方面，罗（Roe)，哈顿（Harten）等人以近似黎曼（Riemann）解为基础，利用特征理论和特征符号分裂[23]，给出了CSCM方法[42~44]，该方法将边界处理与内点计算统一了起来，且对激波有着较强的分辨能力。文献[45，46]中进一步发展了CSCM方法。

在国内，很多学者也深入研究了激波的数值模拟问题，提出了很多好的计算方法，如NND格式[39]，MmB格式[40]、紧致迎风格式[38]，耗散比拟方法[59]等。且对TVD格式，ENO格式进行了深入的研究，给出了改进型的TVD格式和ENO格式[60]。这些方法都以高分辨率的性能模拟了激波，使激波捕捉方法有了新的进展。目前对该问题的研究仍处于高潮。

二、刚 性 问 题

刚性问题在数学上是从常微分方程中提出来的。考虑常微分方程组

$$\frac{d\vec{u}}{dx}=A(x)\vec{u}+\vec{F}(x) \tag{1-3-1}$$

式中$A(x)$为$m\times m$阶矩阵，$\vec{u}$和$\vec{F}$为m维向量。当矩阵$A(x)$的特征值随x的改变相当大（例如可变化一个量级），且有大的特征值，则称为数学上的刚性（Stiff）问题。所谓大是相对x的增量Δx而言的，即

$$\Delta x|\lambda_i|\gg 1 \tag{1-3-2}$$

λ_i为矩阵$A(x)$的特征值。若对方程（1-3-1）两边除以矩阵$A(x)$的最大特征值，则可以看出刚性问题也就是对应于导数项（或自由项）带小参数的数学问题。

这里所提到的刚性问题是指流体运动的流场中，由于物理尺度的差异所导致的刚性问题。

在计算流体力学中大致存在有两种刚性问题。一种表现为空间物理尺度的差异，如高雷诺数条件下的粘性绕流流场中，粘性起主导作用的流动区域是靠近物面很小的边界层区域。在该区域内流动参数变化相当大。这种情况下，对应的N-S方程中粘性项为带小参数$1/Re$的二阶导数项，即当$\Delta y\cdot Re\gg 1$时，为刚性问题（这里Re为雷诺数，Δy为物面法向的变化量）。然而，在此区域内的流动与该区域外流动之间的干扰，即粘性干扰，对整个流体运动的流场物理特性的影响，在很多情况下是不可忽略的，故必须认真模拟。为此要求取Δy足够小，使得$Re\cdot\Delta y\sim 1$；第二种表现为随时间变化的物理尺度的差异[61]。这里又分为两种情况，一种是变化快的物理尺度很重要，且影响整个流动特性，很快改变的流动现象不能简单消除，必须认真模拟，例如在高超声速绕流中的真实气体非平衡化学反应等；另一种是随时间变化快的物理量对整个流场物理特性的影响可忽略不计，这种

情况下，可通过初始值的处理、滤波方法或简化流体运动方程等方法去掉快尺度物理量的影响，如马赫数趋近于零的欧拉方程的极限解就是一个很好的例子。

本书中所涉及的刚性问题主要是第一种。为了解决这一问题，从70年代初开始，计算流体力学中就开展了求解高雷诺数N－S方程的计算方法研究。最初人们采用显式格式求解可压缩N－S方程，方法简单且程序工作量小，麦科马克(MacCormack)等人采用显式格式数值模拟激波-边界层干扰问题[49]，我们采用二阶精度谱点显式差分格式，求解二维可压缩N－S方程，给出了平板前缘干扰和压缩折角分离流动的计算结果[52,58]。然而显式方法因受稳定条件的限制，时间步长的选取要求满足CFL条件，对于高雷诺数流动，要求空间步长Δy足够小，使得每一时间步长中扰动信息在流场中传播的距离不能超过空间的最小步长。这样，使得采用时间相关方法求解高雷诺数粘性绕流的定常解遇到较大困难。为了解决这一问题，70年代中开展了隐式差分格式和求解可压缩N－S方程的方法效率等问题的研究（参见第四、五、六、七章）。

三、物理尺度分辨率与网格生成

对于多重尺度流体运动流场的数值模拟，不同尺度物理现象的分辨率是一个重要问题。增加流场中不同尺度物理现象分辨率的一个方法是采用高阶精度的数值计算方法。当流场中差分解是光滑解时，在给定网格点数的条件下，采用此方法可得到更好的分辨率，但计算方法更复杂，每一计算步骤要求更多的计算量，由此可能使方法失掉普遍应用性；另一种方法是给定计算方法，增加网格点数或优化计算点的位置。此方法适合于非光滑流体运动流场的数值模拟，但要求增加计算机的内存和运算时间。为了解决这一问题，人们开展了网格生成技术的研究，目的是研究计算区域内具有最大物理尺度分辨率的最优网格布局。当流场物理特性未知时，则要求网格按流场特性自动形成，也就是自适应网

格。应当指出，若所模拟的流场，临近区域内网格尺度有较大改变时，数值解的精度将受到影响。对于差分方法，只有使网格尺度的光滑过渡能满足：$\Delta x_2 = \Delta x_1[1 + O(\Delta x_1)]$（这里 Δx_1，Δx_2 对应表示两个邻近区域内网格的尺度），才能保持差分格式原有的精度。另外，除形式精度外还应考虑从小网格区域走向大网格区域时，扰动波的衍射效应。

四、分离涡的数值模拟

数值模拟分离涡形成及其发展的非定常过程比激波的数值模拟困难得多。因为激波是大尺度的稳定结构，而分离涡是大尺度的非稳定结构，其数值模拟的困难在于它固有的不稳定性；另一个困难是它与激波不同，总是倾向于扩展蔓延开来。现有的计算方法对于激波的捕捉是成功的，然而对于涡面的数值模拟还没有一个很好的计算方法。因为现有的计算方法大多是从一维问题出发推广到多维，而且有些方法中所采用的近似，失掉了中心稀疏波的信息[48]，而分离涡只出现在二维或三维的物理问题中。近年来开展了对这一问题的研究，但这还只是开始，问题远未得到解决。

五、湍流的数值模拟

与激波和分离涡相比，湍流是更为复杂的非平滑流动，其物理特性是多重尺度的非稳定结构，且多重尺度运动之间的相互干扰统治了整个流体运动问题。这些多重尺度的运动是前面所提到的网格技术难以模拟的。因为由考莫哥罗夫（Kolmogorov）理论所指出的湍流尺度，使得求解此问题所需要的网格点数与流体运动的雷诺数 Re 成正比，这是目前所有的计算机的内存和速度难以达到的要求，特别在我国现有计算机的条件下，求解该问题更是困难。目前在实际问题中，湍流流动的数值模拟多采用工程湍流模型。使用较广的是包尔文-朗马克士（Baldwin-Lomax）提出的代数模型[50]，对于分离流动，以约翰生-金氏（Jonhson-King）湍流模型为更好。

第四节　模型方程及其数学性质

为了认识流体力学基本方程的数学性质，在本书中将通过简单模型方程的讨论，说明一系列基本概念及其计算方法的特征。以波动方程来模拟非定常欧拉方程，以伯格斯（Burgers）方程模拟N－S方程。又因在本书中时间相关方法是数值求解流体力学问题的基本方法，而双曲型方程的数学理论是这一方法的基础，故在下一章中将着重描述双曲型方程的数学特性。这里只以初值问题为例，简述模型方程的特性。对于初值问题，如果微分方程的解在定解域中存在唯一，且连续依赖于初值，则称数学问题的提法是适定的。

一、一阶波动方程

考虑以下数学问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+c\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \\ u(x,0)=\varphi(x) \end{cases} \tag{1-4-1}$$

定解域：$-\infty<x<+\infty,\quad t\geqslant 0$

其中c为常数，$\varphi(x)$为给定的初始值。在(x,t)平面上引进斜率为$dx/dt=c$的直线族

$$x-ct=\text{常数}$$

从式（1-4-1）可以看出，沿此直线族有

$$\frac{du}{dt}=0$$

即$u=u(\xi)$，$\xi=x-ct$，这说明沿着这族直线，扰动波的传播不随时间而改变，此直线族也就是特征线。再根据初始条件，可得微分方程（1-4-1）的解为

$$u(x,t)=\varphi(x-ct)$$

若给定的初始条件$\varphi(x)$是一三角形，则在$t=t_0$时刻仍为三

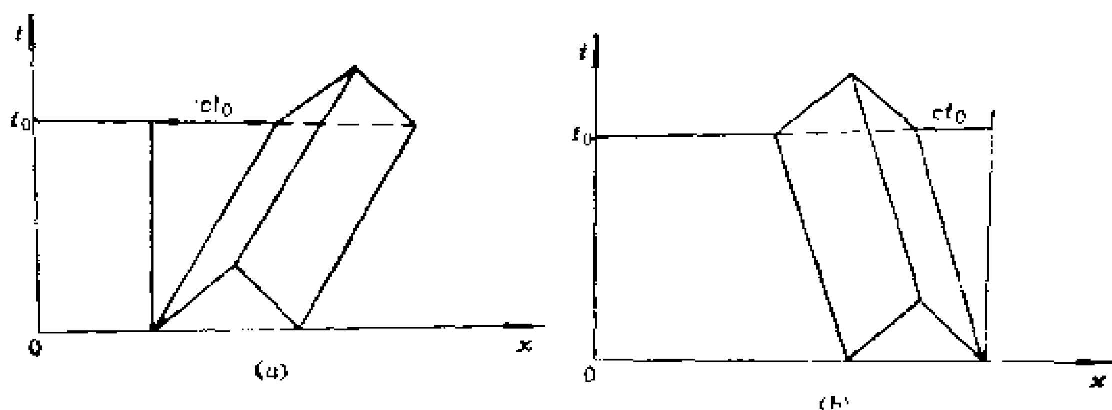


图1-1 扰动波的传播

(a) $c>0$ 的图形；(b) $c<0$ 的图形。

角形，只是以速度 c 向前传播了一段距离 ct_0（参见图1-1）。也就是说扰动波沿特征线以速度 c 传播，当 $c>0$，沿 x 的正向传播；当 $c<0$ 时，沿 x 的负向传播，而波形保持不变。

扰动波以有限速度传播是双曲型方程解的一个重要特性。对于更为一般的双曲型方程，波形、波幅均可能有变化，但是扰动波恒以有限速度传播，并能保持波阵面。

二、二阶波动方程

考虑以下二阶波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \qquad (1\text{-}4\text{-}2)$$

初始条件

$$u(x,\ 0)=f(x)$$

$$u_t(x,\ 0)=g(x)$$

定解域

$$\begin{cases}-\infty<x<+\infty\\ t\geqslant 0\end{cases}$$

二阶波动方程为双曲型方程，其特征线为

$$x\pm ct=\text{const}$$

引入特征坐标：$\xi=x+ct$，$\eta=x-ct$，则方程（1-4-2）可写为以下形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

故其解有以下形式： $u=F_1(\xi)+F_2(\eta)$ 或写为

$$u(x,\ t)=F_1(x+ct)+F_2(x-ct) \qquad (1\text{-}4\text{-}3)$$

这就是波动方程的达朗伯（D′Alembert）解，其中 F_1 和 F_2 的函数形式可由给定的初始条件来确定。最后可得

$$u(x,\ t)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\tau)d\tau \qquad (1\text{-}4\text{-}4)$$

现以二阶波动方程为例，讨论双曲型方程的定解域。从方程（1-4-2）的解（1-4-3）或（1-4-4）可以看出，通过（t，x）平面上任意一个点（t_0，x_0）存在有两条特征线，分别为通过该点斜率为 $dx/dt=c$ 和 $dx/dt=-c$ 的两条直线（参见图1-2）。在（t_0，x_0）点上的解 $u(t_0,\ x_0)$ 只依赖于 $x_0-ct_0\leqslant x\leqslant x_0+ct_0$ 区间内的初始值。在式（1-4-4）中所给出的解第一项表示初始数据沿特征线的传播，而第二项表示在 $t>0$ 时刻，闭区间 $x_0-ct_0\leqslant x\leqslant x_0+ct_0$ 内初始数据的效应。

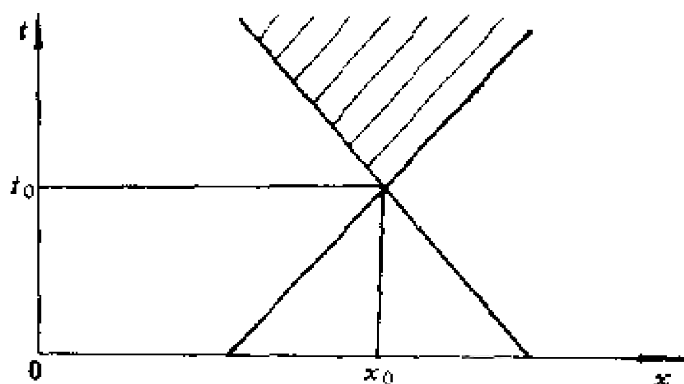


图1-2 解的依赖域和影响域

这说明在（t_0，x_0）点处的解 $u(t_0,\ x_0)$ 仅仅依赖于通过该点的两条特征线和初值线所包围的区域内的信息，任何存在于这一区域外的扰动都不可能影响（t_0，x_0）点处的解；（t_0，x_0）点

的影响域是由该点发出的两条特征线所包围的区域（如图 1-2 中的阴影区）。方程的解具有有限依赖域和影响域是双曲型方程解的又一重要特性。

三、热传导方程

热传导方程是抛物型方程的模型方程，它描述物理问题的耗散过程，而双曲型方程是描述物理问题的对流过程。热传导方程的初值问题有以下形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\qquad \nu>0 \tag{1-4-5}$$

初始条件：

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad -\infty<x<+\infty,\quad t\geqslant 0$$

该问题的解有以下形式

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t}\right]\varphi(\xi)d\xi$$

设给定的初始条件 $\varphi(x)$ 为三角形，则以后时刻的演化过程如图1-3(b)中所示。可以看出，初始扰动波的棱角逐渐平滑化。这种物理问题的耗散过程与热传导中温度的等化过程是相同的。不管初始分布如何集中，扰动总是在瞬刻之间传播于无穷，

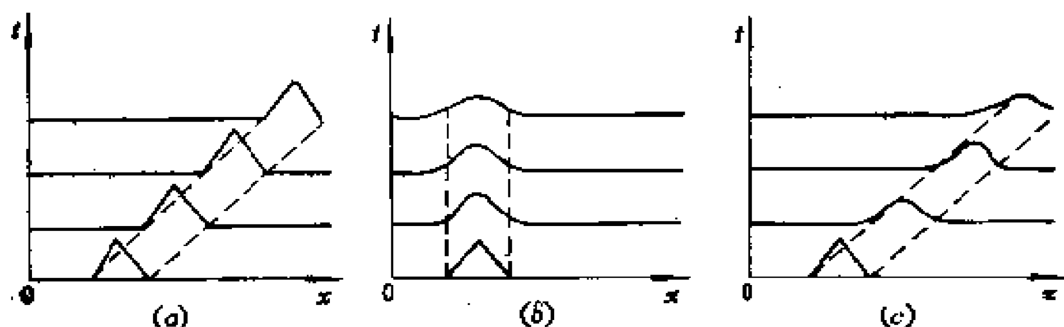


图1-3　扰动波的传播

(a) 对于波动方程；(b) 对于热传导方程；(c) 对于伯格斯(Burgers)方程。

虽然它的影响是随距离按指数衰减的．但它是以无限速度传播的。这是抛物型方程解的特征。

设所考虑的物理问题的特征长度为L，一个非均匀的初始分布在耗散过程中将趋于等化。可以用量纲分析来估计等化所需的时间T。显然，T不依赖于u的分布本身，而只依赖于耗散系数ν（其量纲为〔长度〕/〔时间〕）和L（其量纲为〔长度〕）。ν与L只有一个量纲为时间的组合，即L^2/ν——时间量纲，因此在量级上应有

$$T\sim L^2/\nu$$

这就是等化时间或称耗散时间，也就是物理过程的活跃时间。这一特征量是在求解问题时必须考虑到的。一般来讲，解题的时间应比该特征时间T约大半个量级。

四、线性伯格斯（Burgers）方程

伯格斯方程是双曲-抛物型方程，它描述物理问题的对流和耗散的综合过程，所以它兼有一阶波动方程和热传导方程的特性。线性伯格斯方程的初值问题有以下形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+c\dfrac{\partial u}{\partial x}=\nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,\ 0)=\varphi(x) \\ -\infty<x<+\infty,\quad t\geqslant 0 \end{cases} \tag{1-4-6}$$

不难求出该问题的解为

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(x-\xi-ct)^2}{4\nu t}\right]\varphi(\xi)d\xi$$

若初始条件$\varphi(x)$为一三角形，在图1-3(c)中给出了$t>0$时刻的演变过程，这里表现了耗散与对流相耦合的物理过程，扰动波仿佛以集体速度c传播，但由于耗散作用，它不能保持波阵面。为了比较，在图1-3中还给出了方程(1-4-1)、方程(1-4-5)的解在$t>0$时刻的演变过程，且都假设给定的初始条件$\varphi(x)$为三角形。从这里可以清楚看到三者的差别，也简单地

给出了双曲型、抛物型和双曲-抛物型方程所描述的物理问题之间的差别。

第五节　黎曼间断解[57, 58]

众所周知，非线性双曲型方程的一个重要特点是无论初值是否光滑，其解都可能产生间断。为了正确模拟间断面，有的计算方法都以一维非定常理想气体初值问题的准确解，即黎曼（Riemann）问题间断解为基础来构造差分格式，这里将给出黎曼问题的间断解。

一、间断面分类

一般来讲，双曲型方程解的间断面可分为两类，一为弱间断，即参数连续，而参数导数不连续，如稀疏波波头；另一为强间断，即参数产生间断，如激波和接触间断。下面讨论强间断。

设 n 为间断面的法向单位向量，Z 为间断面运动的法向速度，则有质量守恒关系式

$$\rho_1(\vec{V}_1\cdot \mathbf{n}-Z)=\rho_2(\vec{V}_2\cdot \mathbf{n}-Z) \qquad (1\text{-}5\text{-}1)$$

动量守恒关系式

$$\rho_1\vec{V}_1(\vec{V}_1\cdot \mathbf{n}-Z)+p_1\cdot \mathbf{n}=\rho_2\vec{V}_2(\vec{V}_2\cdot \mathbf{n}-Z)+p_2\cdot \mathbf{n} \qquad (1\text{-}5\text{-}2)$$

能量守恒关系式

$$\rho_1E_1(\vec{V}_1\cdot \mathbf{n}-Z)+p_1\vec{V}_1\mathbf{n}=\rho_2E_2(\vec{V}_2\cdot \mathbf{n}-Z)+p_2\vec{V}_2\mathbf{n} \qquad (1\text{-}5\text{-}3)$$

式中　ρ——密度；

p——压力；

$\vec{V}$——速度，$\vec{V}=(u,\ v,\ w)$；

E——单位体积气体的总能量。

$$E=\frac{p}{(r-1)\rho}+\frac{V^2}{2}$$

下标1，2——对应表示间断面前后的参数；

r——比热比。若以m表示过间断面的质量流，则有

$$m=\rho_1(\vec{V}_1\cdot \mathrm{n}-z)=\rho_2(\vec{V}_2\cdot \mathrm{n}-z) \qquad (1\text{-}5\text{-}4)$$

由式（1-5-2）可得

$$m(\vec{V}_1-\vec{V}_2)=(p_2-p_1)\cdot \mathrm{n} \qquad (1\text{-}5\text{-}5)$$

对式（1-5-5）的两端点乘n，则得

$$m(\vec{V}_1\cdot \mathrm{n}-\vec{V}_2\cdot \mathrm{n})=p_2-p_1 \qquad (1\text{-}5\text{-}6)$$

对式（1-5-5）两端叉乘n得

$$m(\vec{V}_1\times \mathrm{n}-\vec{V}_2\times \mathrm{n})=0 \qquad (1\text{-}5\text{-}7)$$

因接触间断面定义为流体不穿过面，故有$m=0$。由于ρ_1和ρ_2不等于零，故从式（1-5-4）可得

$$\vec{V}_1\cdot \mathrm{n}=\vec{V}_2\cdot \mathrm{n}=z$$

从式（1-5-6）可得：$p_1=p_2$，这说明对于接触间断，流体法向速度和压力都是连续的，只有密度和切向速度不连续。

对于激波、因$m\neq 0$，故从式（1-5-7）可知：

$$\vec{V}_1\times \mathrm{n}=\vec{V}_2\times \mathrm{n}$$

即切向速度连续，而密度、法向速度、压力和能量过激波产生间断。

二、黎曼间断解

（一）问题的提出

考虑一维非定常理想气体流动，其基本方程的守恒型有以下形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho u^2+p)}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\dfrac{\partial(\rho Eu+\rho u)}{\partial x}=0 \end{cases} \qquad (1\text{-}5\text{-}8)$$

其中的参数的定义与前面相同，取$t=0$时刻的初始值在$x<0$

和 $x>0$ 处分别为常数分布：u_1，ρ_1，p_1 和 u_1，ρ_1，p_1。求方程组（1-5-8）满足以上初始值，且在间断线上满足间断条件的解。间断条件有以下形式

$$\begin{cases} \rho_1(u_1-Z)=\rho_2(u_2-Z) \\ \rho_1u_1(u_1-Z)+p_1=\rho_2u_2(u_2-Z)+p_2 \\ \rho_1E_1(u_1-Z)+p_1u_1=\rho_2E_2(u_2-Z)+p_2u_2 \end{cases} \tag{1-5-9}$$

这里 Z 为间断线 $x=x(t)$ 的速度。

（二）解的分类

一般情况下，给定的初始间断并不满足（1-5-9）关系式，因而它是不稳定的。在 $t>0$ 以后，立刻分解为若干个满足此关系式的间断线，并以各自的速度分别运动。在上面所提出的一维非定常理想气体的流动中，初始间断所分解的解，在考虑到熵增的条件下，是唯一确定的。这些准确解，即黎曼问题间断解，依照所给定的初始条件不同，可分为 5 类。现在图 1-4 中将这 5 类不同的解用图形表示出来，以后将具体给出这 5 类准确解。

图中虚线表示接触间断，实线表示激波，一族中心直线表示

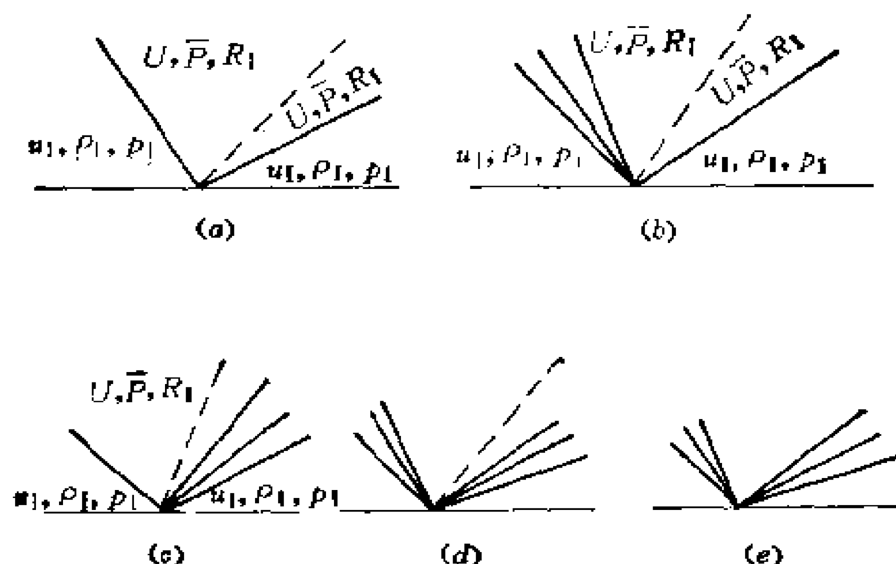


图1-4　黎曼间断解

中心稀疏波。应指出，在图（e）中，表示左右两个中心稀疏波之间为真空区。在这些解中，对于任何固定的 $t>0$ 时刻，左、右波尚未到达的波前区域内，流体状态仍分别保持常数分布：u_{I}，ρ_{I}，p_{I} 及 u_{II}，ρ_{II}，p_{II}；接触间断两边的速度和压力值相同，以 U、$\bar{p}$ 表示，密度值不同，分别以 R_{I} 和 R_{II} 表示；中心稀疏波是弱间断，它反映了气流的等熵膨胀过程，在此区域内，物理量由波前状态 U_i，ρ_i，p_i 连续过渡到波后状态 U、R_i，$\bar{p}$，且有 $\bar{p}\leqslant p_i(i=\mathrm{I},\ \mathrm{II})$，只有物理量的导数在波头和波尾处是间断的；对于激波，物理量由波前状态 u_i，ρ_i、p_i 跳到波后状态 U，R_i，$\bar{p}$ 时，要求熵是增加的，且 $\bar{p}\geqslant p_i(i=\mathrm{I},\ \mathrm{II})$。

（三）求解方法

对于理想气体，由状态方程，单位体积气体的内能有以下形式

$$e=\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}$$

其中 γ 为比热比。等熵关系式为

$$\frac{p}{\rho^{\gamma}}=\mathrm{const}$$

声速

$$c^2=\gamma\frac{p}{\rho}$$

根据图 1-4 的间断解中的符号，对于左边的激波可将间断条件（1-5-9）写为

$$\begin{cases}(R-\rho_I)Z-(RU-\rho_I u_I)=0\\(RU-\rho_I u_I)Z-[(RU^2+\bar{p})-(\rho_I u_I^2+p_I)]=0\\(R\bar{E}-\rho_I E_I)Z-[(R\bar{E}U+\bar{p}U)-(\rho_I E_I u_I+p_I u_I)]=0\end{cases}\tag{1-5-10}$$

其中

$$E_I=\frac{p_I}{(\gamma-1)\rho_I}+\frac{u_I^2}{2},\qquad \bar{E}=\frac{\bar{p}}{(\gamma-1)R}+\frac{U^2}{2}$$

由式（1-5-10），对于左激波可得

$$U-u_{\mathrm{I}}+\frac{\bar{p}-p_{\mathrm{I}}}{A_{\mathrm{I}}}=0 \qquad (1\text{-}5\text{-}11)$$

同样，对于右激波可得

$$U-u_{\mathrm{II}}-\frac{\bar{p}-p_{\mathrm{II}}}{A_{\mathrm{II}}}=0 \qquad (1\text{-}5\text{-}12)$$

其中

$$A_i=\rho_i c_i\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}\,\frac{\bar{p}}{p_i}+\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \qquad (1\text{-}5\text{-}13)$$

$$(i=\mathrm{I},\ \mathrm{II})$$

在中心稀疏波区域内，由于黎曼不变量沿特征线保持常数，故有

$$\frac{u_i}{2}+\frac{c_i}{\gamma-1}=\frac{U}{2}+\frac{1}{\gamma-1}\left(\gamma\,\frac{\bar{p}}{R}\right)^{1/2}$$

再利用

$$c_i^2=\gamma\,\frac{p_i}{\rho_i},\qquad \frac{p_i}{\rho_i^{\gamma}}=\frac{\bar{p}}{R^{\gamma}}\quad (i=\mathrm{I},\ \mathrm{II})$$

则对于稀疏波的波前、波后状态可推出以下关系式。对于左稀疏波

$$U-u_{\mathrm{I}}-\frac{2}{\gamma-1}c_{\mathrm{I}}\left[1-\left(\frac{\bar{p}}{p_{\mathrm{I}}}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\right]=0 \qquad (1\text{-}5\text{-}14)$$

对于右稀疏波

$$U-u_{\mathrm{II}}-\frac{2}{\gamma-1}c_{\mathrm{II}}\left[1-\left(\frac{\bar{p}}{p_{\mathrm{II}}}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\right]=0 \qquad (1\text{-}5\text{-}15)$$

现将式（1-5-11），（1-5-12），（1-5-14）和（1-5-15）统一写为以下形式

对于左波

$$U-u_{\mathrm{I}}=-f(\bar{p},\ p_{\mathrm{I}},\ \rho_{\mathrm{I}}) \qquad (1\text{-}5\text{-}16)$$

对于右波

$$U-u_{\mathrm{II}}=f(\bar{p},\ p_{\mathrm{II}},\ \rho_{\mathrm{II}}) \qquad (1\text{-}5\text{-}17)$$

其中

$$
f(\bar{p},\ p_i,\ \rho_i)=\begin{cases}\dfrac{\bar{p}-p_i}{\rho_i c_i\left[\dfrac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\dfrac{\bar{p}}{p_i}\right)+\dfrac{\gamma-1}{2\gamma}\right]^{1/2}} & \text{当 } \bar{p}\geqslant p_i \\[2ex] \dfrac{2c_i}{\gamma-1}\left[\left(\dfrac{\bar{p}}{p_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}-1\right] & \text{当 } \bar{p}<p_i\end{cases}
$$

由方程（1-5-16）和（1-5-17）可求出波后速度U和压力$\bar{p}$。消去U可得到只含一个未知量的方程为

$$
u_1-u_1=f(\bar{p},\ p_1,\ \rho_1)+f(\bar{p},\ p_1,\ \rho_1)\equiv F(\bar{p}) \tag{1-5-18}
$$

为了对给定的初始条件判断其间断分解的类型，需要讨论函数$F(\bar{p})$的性质。不难证明，函数$f(\bar{p},\ p_i,\ \rho_i)$在$\bar{p}=p_i$处是连续的，并有连续的一阶导数。因有

$$
\lim_{\bar{p}\to p_i^-} f'(\bar{p},\ p_i,\ \rho_i)=\lim_{\bar{p}\to p_i^+} f'(\bar{p},\ p_i,\ \rho_i)=\frac{1}{\rho_i c_i}
$$

且当$\bar{p}>0$时，$f(\bar{p},\ p_i,\ \rho_i)$是单调上升的凸函数，即有

$$
f'(\bar{p},\ p_i,\ \rho_i)>0,\quad f''(\bar{p},\ p_i,\ \rho_i)>0
$$

因此，在$\bar{p}>0$时，$F(\bar{p})$也是单调上升、导数连续的凸函数。根据这一性质，可以给出间断分解类型的判别式。

为了讨论确定起见，先设$p_1\geqslant p_1$，根据给定的初始条件，可作以下判断：

1．当$u_1-u_1\geqslant F(p_1)$时

$$
F(p_1)=\frac{p_1-p_1}{\rho_1 c_1\left[\dfrac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\dfrac{p_1}{p_1}\right)+\dfrac{\gamma-1}{2\gamma}\right]^{1/2}}
$$

因$u_1-u_1=F(\bar{p})$，则由给定的初值可知，$F(\bar{p})\geqslant F(p_1)$，又因$F(\bar{p})$是单调上升、导数连续的凸函数，故可有

$$
\bar{p}\geqslant p_1\geqslant p_1
$$

即左波和右波都是激波，左激波向左边低压区传播（$\bar{p}\geqslant p_{\mathrm{I}}$），右激波向右边低压区传播（$\bar{p}\geqslant p_1$）。在左右激波之间的区域内，压力连续（$p=\bar{p}$），气体质点都将向同一方向运动，且速度连续，但一般说来密度是间断的，故在该区域内形成一接触间断（或称切向间断），这对应于图 1-4 中的（a）类解。

2．当 $F(p_1)>u_1-u_{\mathrm{I}}\geqslant F(p_{\mathrm{I}})$ 时

$$F(p_{\mathrm{I}})=-\frac{2c_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{p_{\mathrm{I}}}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\right]$$

则可推出 $p_{\mathrm{I}}>\bar{p}\geqslant p_1$，即左波为激波，右波为稀疏波。激波与稀疏波之间的区域内，由于激波后的压力升高，而稀疏波降低压力，可使压力连续，速度连续而密度可产生间断，故在此区域内将形成一接触间断，这对应于图 1-4 中的（c）类解。

3．当 $F(p_{\mathrm{I}})>u_1-u_{\mathrm{I}}\geqslant F(0)$ 时，

$$F(0)=-\frac{2a_{\mathrm{I}}}{\gamma-1}-\frac{2a_1}{\gamma-1}$$

则可得 $p_1\geqslant p_{\mathrm{I}}>\bar{p}\geqslant 0$，即左波和右波都是稀疏波，这对应于图 1-4 中的（d）类解。

4．当 $F(0)>u_1-u_1$ 时

左波和右波都是稀疏波，且在两个稀疏波之间出现真空区。在这种情况下，左右两稀疏波之后没有统一的波后速度，式（1-5-14）和（1-5-15）中的 U 就不再表示同一个量，且用来求 $\bar{p}$ 的式（1-5-18）也不再成立。在真空区内，$R_i=0$、$\bar{p}=0$，相应的声速亦为零。这对应于图 1-4 中的（e）类解。

若设所给的初始值满足 $p_1\geqslant p_{\mathrm{I}}$，则解的类型与上面相似，只是当 $F(p_1)>u_1-u_1\geqslant F(p_1)$ 时，可推出 $p_1>\bar{p}\geqslant p_1$，即右波为激波，左波为稀疏波，这对应于图 1-4 中的（b）类解。

下面讨论流动参数的确定。由方程（1-5-18）可求出 $\bar{p}$，因此方程为超越方程，故须迭代求解。求得 $\bar{p}$ 值后，可由式（1-5-16）和（1-5-17）确定 U 值

$$U=\frac{1}{2}[u_l+u_r+f(\bar{p},\ p_l,\ \rho_l)-f(\bar{p},\ p_r,\ \rho_r)]$$

(1-5-19)

一维非定常理想气体在（t，x）平面上的间断解$u(t, x)$，$\rho(t, x)$，$p(t, x)$可根据解的类型及（t，x）的位置分别由以下公式给出。

1．左波$x/t<U$的区域

当左波为激波时，激波速度Z和波后密度R_l可由关系式（1-5-10）给出

$$\begin{cases} Z_l=u_l-\dfrac{A_l}{\rho_l} \\ R_l=\dfrac{\rho_l A_l}{A_l-\rho_l(u_l-U)} \end{cases} \tag{1-5-20}$$

右激波的波前区，$Z_l<x/t<U$，u、ρ，p取波后值：U，R_l，$\bar{p}$。

当左波为稀疏波时，波头的波速Z_l和波尾的波速Z_l^*可由特征线的表达式给出

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=Z_l=u_l-c_l \\ Z_l^*=U-c_l^* \end{cases} \tag{1-5-21}$$

波后的密度R_l可由声速$c_l^{*2}=\gamma p/R$推出

$$R_l=\frac{\gamma\bar{p}}{c_l^{*2}}$$

其中c_l^*可由黎曼不变量表达式确定

$$c_l^*=c_l+\frac{\gamma-1}{2}(u_l-U)$$

在左稀疏波的波前和波后区，$x/t<Z_l$和$Z_l^*<x/t<U$．u，ρ，p分别取波前值和波后值，在稀疏波区域内，$Z_l\leqslant x/t\leqslant Z_l^*$，根据黎曼不变量关系有

$$u+\frac{2}{\gamma-1}c=u_l+\frac{2}{\gamma-1}c_l$$

及特征线：$u-c=x/t$ 可确定声速 c 为

$$c(t, x)=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(u_{\mathrm{I}}-\frac{x}{t}\right)+\frac{2}{\gamma+1}c_{\mathrm{I}}$$

由此可得

$$\begin{cases} u(t, x)=\dfrac{x}{t}+c \\ p(t, x)=p_{\mathrm{I}}\left(\dfrac{c}{c_{\mathrm{I}}}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \\ \rho(t, x)=\dfrac{\gamma p}{c^2} \end{cases} \tag{1-5-22}$$

2. 右波$U<x/t$的区域

当右波为激波时，激波速度Z_{I}及波后密度R_{I}为

$$\begin{cases} Z_{\mathrm{I}}=u_{\mathrm{I}}+A_{\mathrm{I}}/\rho_{\mathrm{I}} \\ R_{\mathrm{I}}=\dfrac{\rho_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{I}}}{A_{\mathrm{I}}+\rho_{\mathrm{I}}(u_{\mathrm{I}}-U)} \end{cases} \tag{1-5-23}$$

上式和（1-5-20）中的A_i($i=\mathrm{I}$, II）与（1-5-13）式中的 A_i 表达式相同。

在右激波的波前区，$Z_{\mathrm{I}}<x/t$，u，ρ，p 可取波前值u_{I}，ρ_{I}，p_{I}，在右激波波后区，$U<x/t<Z_{\mathrm{I}}$，u，ρ，p取波后值U，R_{I}，$\bar{p}$。

当右波为稀疏波时，稀疏波波头的速度Z_{I}、波尾速度 Z_{I}^* 和波后密度R_{I}按以上类似的方法可求得

$$\begin{cases} Z_{\mathrm{I}}=u_{\mathrm{I}}+c_{\mathrm{I}} \\ Z_{\mathrm{I}}^*=U+c_{\mathrm{I}}^* \\ R_{\mathrm{I}}=\dfrac{\gamma p}{c_{\mathrm{I}}^{*2}} \end{cases} \tag{1-5-24}$$

其中

$$c_{\mathrm{I}}^*=c_{\mathrm{I}}-\frac{\gamma-1}{2}(u_{\mathrm{I}}-U)$$

在右稀疏波的波前区，$Z_{\mathrm{I}}<x/t$ 和波后区，$U<x/t<Z_{\mathrm{I}}^*$、u，ρ，p 分别取波前值及波后值；在右稀疏波的区域内，$Z_{\mathrm{I}}^*\leqslant x/t\leqslant Z_{\mathrm{I}}$，可由黎曼不变量关系式

$$u-\frac{2}{\gamma-1}c=u_{\mathrm{I}}-\frac{2}{\gamma-1}c_{\mathrm{I}}$$

确定声速 c

$$c(t,\ x)=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left(\frac{x}{t}-u_{\mathrm{I}}\right)+\frac{2}{\gamma+1}c_{\mathrm{I}}$$

由此可得 u，ρ，p 的计算公式为

$$\begin{cases} u(t,\ x)=\dfrac{x}{t}-c \\ p(t,\ x)=p_{\mathrm{I}}\left(\dfrac{c}{c_{\mathrm{I}}}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \\ \rho(t,\ x)=\gamma\dfrac{p}{c^2} \end{cases} \tag{1-5-25}$$

3. 出现真空区时

左右稀疏波波后压力$\bar{p}=0$，密度$R_l=R_r=0$，且波后速度U已没有意义，因此式（1-5-21）和（1-5-24）中稀疏波波尾速度计算公式不再成立，需改写为

$$\begin{cases} Z_{\mathrm{I}}^{*}=u_{\mathrm{I}}+\dfrac{2}{\gamma-1}c_{\mathrm{I}} \\ Z_{r}^{*}=u_{r}-\dfrac{2}{\gamma-1}c_{r} \end{cases} \tag{1-5-26}$$

而稀疏波区域内的流动参数计算方法不变。

参 考 文 献

1 Mueller T J and O'Leary R A. Physical and Numerical Experiments in Laminar Incompressible Separating and Reattaching Flows. Los Angeles California June 29—July 1 1970

2 Moin P and Kim J. The Structure of the Vorticity Field in Turbulent Channel Flow Part I. Analyses of Instantaneous Fields Statistical Correlations. Journal of Fluid Mechanics, No. 155 1985, 441～464

3 Kim J and Moin P. The structure of the Vorticity Field in Turbulent Channel Flow Part II Study of Ensemble-Averaged Fields. Journal of Fluid Mechanics. No. 162. 339～363

4 Krist S E and Zang T A. Simulations of Transition and Turbulence on the Navier—Stokes Computer. AIAA Paper 87—1110

5 Courant R, Friedrichs K O and Lewy H. On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. IBM Journal, March, 1967, 215～234

6 Richtmyer R D and Morton K W. Difference Methods for Initial-Value Problems. Interscience, New York, 1967.

7 Дородницин А А. ОБ одном Методе численного решения некоторых задач аэродинамики. Труды Ⅲ Всесоюз. Матем Свезда Ⅲ. 1956. М. Изд-во АН СССР. 1958, 447～453

8 Van-Dyke M D. The Supersonic blunt body problem-review and Extension. Journal Aerospace Sci. 25 (1958). 8. 485～496

9 Теленин Г Ф и Тиняковъ Г П. Исследование Сверхзвукового Обтекания Сферы Воздухом и углекислым Газом при Термохимическово Равновесии. ДАН СССР, 1964. 159 (1), 39～42

10 Murman. E M and Cole J J. Calculation of Plane Steady Transonic Flows. AIAA J. January 1971. 9 (1), 114～121

11 Jameson A. Numerical Caculation of the Three Dimensional Transonic Flow Over a Yawed Wing. Proceedings AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. Palm Springs, CA, July, 1973.

12 Jameson A. Transonic Flow Calculation. MAE Report 1651. Dept of Mechanical and Aerospace Engineering Princeton University.

13 Gary J. Numerical Computation of Hydrodynamic Flow Which Contain a Shock. Courant Institute of Mathematical Sciences Report NYU 9603. New York Univesity

14 Jameson A Schmidt w and Turkel E Numerical Solutions of the Euler equations by finite Volume methods using Rurge-Kutta time-stepping Schemes AIAA Paper No. 81-1259 1981

15 李松波. 一阶拟线性混合型方程及初值问题的数值解法和具有脱体激波绕流计算. 全国计算数学会议上的报告, 1963

16 庄逢甘、高玉文 利用积分关系式方法求解钝头超声速绕流 北京空气动力学研究所技术报告, 1963

17 傅德薰、纪楚群和杨振生. 超音速钝体绕流数值计算 航空学报, No. 2, 1979.

18 李家良, 张锡成, 居绍一等 理想流组合体小攻角气动力的数值方法. 气动力学刊, Vol 1, No 1 1979

19 纪楚群. 弯头钝锥的超音速无粘流数值计算方法 《空气动力学学报》No. 1, 1984.

20 纪楚群 有内激波的超音速无粘绕流数值计算方法. 航空学报, No. 2, 1980.

21 朱幼兰、钟锡昌、陈炳木等 初边值问题差分方法及绕流. 科学出版社, 1980.

22 饶大相, 罗荣存 钝体绕流的非定常差分法. 宇航出版社, 1986.

23 Huang L C. Pseudo-Unsteady Difference Scheme for Discontinuous Solutions of Steady State One-Dimensional Fluid Dynamics Equations. J. Compt. Phys. 1981 (42), 195～211

24 马延文. 人工不定常方法求解一维Navier-Stokes方程. 计算数学，1978(2).

25 Moretti G. Three Dimensional Supersonic Steady Flows With any Number of Imbedded Shocks. AIAA Paper No. 74—10. 1974.

26 Lax P D and Wendroff B. Difference Schemes for Hyperbolic Equations With High Order of accuracy. Comm. Pure Appl. Math. 1964(17), 381～398

27 Le Roux A Y. A Numerical Conception of entropy for quasilinear equations. Math Comp. 1979. 31, 848～872

28 Steger J and Warming R F. Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamics equations with Application to Finite Difference Methods. NASA TMD—78605, 1979

29 傅德薰. 马延文 "气动计算中一个简单有效的差分格式" <空气动力学学报>, 1985 (2)

30 马延文, 傅德薰. "数值计算可压缩Navier-stokes方程的一个新的系数矩阵分裂法". 计算物理, 1985 (2).

31 Garten A. On a class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite-Difference Schemes. NYU Report, Oct. 1982.

32 Roe P L. Some Contributions to the Modeling of Discontinuous Flows. AMS-SIAM Seminar, San Diego, June 1983.

33 Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme Ⅱ. Journal of Computational Physics. 1974 14, 363～389

34 Osher S. Shock Modeling in transonic and Supersonic Flow. Recent Advances in Numerical Methods in Fluids. Vol. 4, W. G. Habashi Ed

35 Yee H C, Warming R F and Harten A. Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steaty-state Calculations. AIAA Paper 83—1902, 1983

36 Harten A and Hyman J M. A Self-Adjusting Grid for the Computation of weak Solutions of Hyperbolic Conservation Laws. Los Alamos Nat. Lab. Report LA 9105, 1981.

37 Yee H C. Construction of Explicit and Implicit Symmetric TVD Schemes and Their Applications. Journal of Comp. Phys. 1987 68, 151～179

38 Ma Yanwen and Fu Dexun. Numerical Solutions of Compressible Flow with Compact Scheme. AIAA Paper No. 87—1123, 1987

39 Zhang Han-Xin and Zhuang Feng-Gan. On Non-Oscillatory and Parameter-Free Finite Difference Scheme and its Application to Numerical Solution of Euler and Navier-Stokes Equations. International Symposium on Computational Fluid Dynamics. Nagoya Japon, 1989.

40 Wu Huamo. New Accurate High resolution TVD Shemes-Analysis and Applications International Symposium on Computational Fluid Dynamics. Nagoya Japan, 1989

41 Harten A. On High-Order Accurate Interpolation for Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes. The IMA Volumes in Mathematics and it Applications. Springer-Verlag 1986, 2: 71~106.

42 Roe P L Approximate Riemann Solvers Parameter Vector and Difference Schemes. Journal of Compt. Physics. 1981, 43: 357~372

43 Harten A and Osher S. Uniformly High-Order Accurate Nonoscillatory Schemes I. SIAM J. Num Anal. 1987, 24(2), 279~309

44 Harten A., Osher S, Engquist B and Chakravarthy S R. Some Results on Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes. ICASE Report 86—18, Mar 1986.

45 Lombard C K, Oliger J, Yand J Y. and Davy W C. Conservative Supra-Characteristics Method for Splitting the Hyperbolic Systems of Gasdynamics Equations With Computed Boundaries for Real and perfect Gases. AIAA Paper No. 82—0873, 1982.

46 Yang J Y and Lombard C K. Uniformly Second Order accurate ENO Schemes for the Euler Equations of Gas Dynamics. AIAA Paper No. 87—116, 1987.

47 Zhuang F G and Zhang X H. On a Marching Iterative Method in Solving Gas Dynamic Equations. Lecture Notes in Physics, 10th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics Beijing, 1986.

48 Chorin A J A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problem. Journal Comp Phys. 1967 2, 12~26

49 MacCormack R W and Baldwin B S. A Numerical Method for solving the Navier-Stokes Equations with application to shock boundary layer Interactions. AIAA Paper No. 75—1, 1975.

50 Baldwin B S and lomax H. Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Flow. AIAA Paper No. 78—257, 1978

51 Rizzi A and Engquist B. Selected Topics in the Theory and Practice of Computational Fluid Dynamics. J. of Computational Physics 1987, 72: 1~69

52 傅德薰．高超音速平板前缘干扰．航空学报，1983（4）

53 傅德薰，张英文．超音速压缩折角层流分离流数值解．全国计算数学学术会议论文集，1980.

54 傅德薰．边条件及差分方程的数值解．第二届全国计算流体力学方法会议论文集，198[illegible]

55 傅光明，傅德薰．超音速绕流计算中边条件的几个问题．第一届全国计算流体力学方法会议论文集，1981.

56 高树椿，顾钢民．深凹腔外形分离流场的数值计算．空气动力学学报，1984（4）
57 Ландау Л Д и Лифшиц, Е М. Механика Сплошной Среды. Гостехиздат Москва. 1954
58 李德元，徐国荣，水鸿寿等．二维非定常流体力学数值方法．北京：科学出版社，1987
59 Fu Dexun and Ma Yanwen. Diffusion Analogy and Shock Capturing for Solving the Aerodynamic Equations. Proceedings of 4 th International Symposium on Computational Fluid Dynamics. Davis. 1991
60 黄敦，陈证福．构造总变差不增格式的思路和若干数学论证．北京计算流体力学讨论会文集，1989．

第二章　双曲型偏微分方程及其初边值问题

第一节　双曲型偏微分方程的特征——两个自变量

首先以熟知的一维非定常等熵流动方程讨论特征方向、特征线和特征关系，方程可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2-1-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2-1-2}$$

式中

$$p=f(\rho);$$

$$c^2=\frac{dp}{d\rho}=f'(\rho)$$

在式（2-1-1）或（2-1-2）中未知量 ρ 和 u 的微分方向是不一致的。线性组合以上方程：$l^{(1)}\times(2\text{-}1\text{-}1)+l^{(2)}\times(2\text{-}1\text{-}2)$，使其变量的微分方向一致，即使得

$$\frac{l^{(1)}u+l^{(2)}c^2/\rho}{l^{(1)}}=\frac{l^{(1)}\rho+l^{(2)}u}{l^{(2)}}=\frac{dx}{dt}$$

其中 $\frac{dx}{dt}$ 是 ρ 和 u 的共同微分方向，因此

$$\begin{pmatrix} u-\frac{dx}{dt} & \frac{c^2}{\rho} \\ \rho & u-\frac{dx}{dt} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l^{(1)} \\ l^{(2)} \end{pmatrix}=0$$

$l^{(1)}$ 和 $l^{(2)}$ 不全为零意味着矩阵的行列式为零。这样得出方程（2-1-1），（2-1-2）的特征方向为

$$\frac{dx}{dt}=u+c \tag{2-1-3}$$

$$\frac{dx}{dt}=u-c \tag{2-1-4}$$

分别对应 $(l^{(1)},\ l^{(2)})=(c,\ \rho)$ 和 $(-c,\ \rho)$。线性组合成方程

$$c\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+(u+c)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\}+\rho\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+(u+c)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=0 \tag{2-1-5}$$

$$c\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+(u-c)\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\}-\rho\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+(u-c)\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=0 \tag{2-1-6}$$

称为方程（2-1-1）和（2-1-2）的特征关系。

引进两族曲线 $\alpha(x,\ y)$=常数和 $\beta(x,\ y)$=常数，使上式（2-1-3）和（2-1-4）分别成立，即引进两族特征线，见图 2-1。

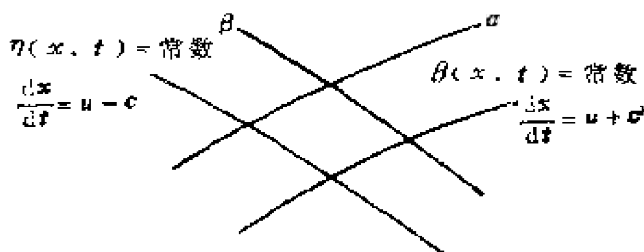


图2-1　特征线族

式（2-1-3）～(2-1-6）可依次写为

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}=(u+c)\frac{\partial t}{\partial\alpha} \tag{2-1-7}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\beta}=(u-c)\frac{\partial t}{\partial\beta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{c}{\rho}\ \frac{\partial\rho}{\partial\alpha}=0 \tag{2-1-8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\beta}-\frac{c}{\rho}\ \frac{\partial\rho}{\partial\beta}=0$$

这 4 个未知量 x，t，ρ，u 的 4 个偏微分方程也是特征线法的

出发方程。式（2-1-8）也可以写为

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha}=0 \quad R=\frac{u}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{c}{\rho}d\rho=\frac{u}{2}+\frac{c}{\gamma-1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta}=0 \quad S=-\frac{u}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{c}{\rho}d\rho=-\frac{u}{2}+\frac{c}{\gamma-1}$$

（2-1-9）

其中进一步假设 $p=f(\rho)=A\rho^{\gamma}$。R 和 S 称为黎曼（Riemann）不变量，分别沿 α 和 β 族不变。在一个区域里，如果其一为常数．例如 R 不但对固定 β 沿 α 不变，而且对所有 β 不变，那么区域为简单波区域。

从以上可看到三点特征性质：

（1）如果存在偏微分方程的线性组合，使所有未知量都在一个方向微分，这个方向称为特征方向。如果一条曲线上的每点的切向都是特征方向，那么称这条曲线为特征线。对于特征线偏微分方程（或组合）表示一个内微分关系（内微分即切向微分）。可见在特征线上不能任意给初值，它必须满足这个内微分关系，即特征关系，经常称为相容关系。

（2）特征线是解的唯一可能的分支线，即如果在特征线上给初值，那么可以有若干个解，也可以说，它的外导数（非切向导数）不唯一确定。

（3）特征线可能是解的一阶外导数的间断线。

现在讨论简单的拟线性偏微分方程，并以它说明特征的普遍意义。考虑

$$a\frac{\partial \varphi}{\partial x}+b\frac{\partial \varphi}{\partial y}=c \qquad (2\text{-}1\text{-}10)$$

式中 a，b，c 依赖于 x，y，φ。这个方程表示解 $\varphi=\varphi(x, y)$ 可能的切平面，其法向量为 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, -1\right)$。可能的切平面的包络为一条线，见图2-2，其切向为（a，b，c）。以这方向为切向的曲线称为方程（2-1-10）的"特征线"，它满足常微分方程

$$\frac{dx}{ds}=a, \quad \frac{dy}{ds}=b \tag{2-1-11}$$

$$\frac{d\varphi}{ds}=c \tag{2-1-12}$$

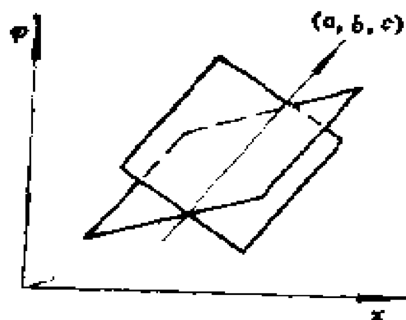


图2-2　单个拟线性方程的"特征线"

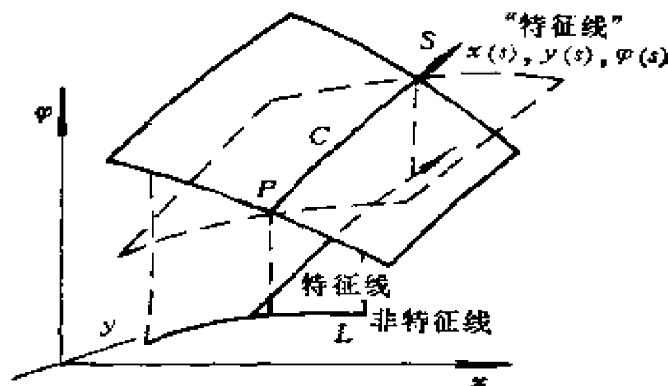


图2-3　单个拟线性方程的解面

其中 s 是沿"特征线"的参量。注意：经常把式（2-1-11）称为方程（2-1-10）的特征方向，并把以这方向为切向的曲线称为方程（2-1-10）的特征线。其实它是以上"特征线"在xy平面上的投影。

如果在一条非特征线上给初值（如图 2-3 中的 L 上），那么在每点解常微分方程组（2-1-11）(2-1-12）得出"特征线"族，如以P为起点的曲线C，这族"特征线"生成方程（2-1-10）的解面。在L上可给出另一初值，如图中也通过P点的虚线，这样就得到不同的解面。这就说明了在特征线上给初值，解的非唯一性。

考虑任意曲线C_0，沿它的参量取为 s，不妨设$\frac{dy}{ds}\neq 0$。这时$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$是外导数，设它在曲线上有间断，记$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_2$，下标 1 和 2 表示曲线的两侧。由于$\varphi$本身连续，故有

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right]=0 \text{ 或} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\frac{dx}{ds}+\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\frac{dy}{ds}=0,$$

那么

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=-\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dy}{ds}}$$

从式（2-1-10）得

$$a\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]+b\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]=0$$

从而

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]\left(a-b\frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dy}{ds}}\right)=0$$

因为设$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]$不为0，所以第二因子为0，即$C_0$是特征线。这说明特征线可能是解的一阶外导数的间断线。

现在讨论拟线性偏微分方程组

$$\boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}=\vec{C} \tag{2-1-13}$$

式中$\vec{U}$，$\vec{C}$为m维向量；$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$为$m\times m$矩阵，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\vec{C}$依赖于x、y，$\vec{U}$。利用特征性质（2），即在特征线上给定$\vec{U}$不能唯一确定其外导数来讨论方程（2-1-13）的特征线。让s为沿特征线的参量，内导数$\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}\frac{dy}{ds}$为已知，不妨设$\frac{dy}{ds}\neq 0$，那么

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}=-\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dy}{ds}}+\cdots$$

代入式（2-1-13）并令

$$\frac{dx}{dy} = \lambda \qquad (2\text{-}1\text{-}14)$$

得

$$(A - \lambda B)\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \cdots$$

其右端为已知量，$\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}$是外导数，它不是唯一的，因此有

$$\det(A - \lambda B) = 0 \qquad (2\text{-}1\text{-}15)$$

对某解$\vec{U} = \vec{U}(x, y)$，A和B是x和y的函数。在某点(x, y)若式（2-1-15）有m个互导的实根λ或有m个线性无关的$\vec{l}$，满足$\vec{l}A = \lambda\vec{l}B$，即称方程（2-1-13）为双曲型的，（对应互异实根，称为严格的双曲型）。这时式（2-1-14）就是它的特征方向，以这方向为切向的曲线就是它的特征线。用$\vec{l}$左乘式（2-1-13）得特征关系

$$\vec{l}B\left(\lambda\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial y}\right) = \vec{l}\vec{C} \qquad (2\text{-}1\text{-}16)$$

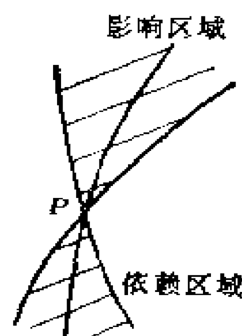


图2-4　拟线性双曲型方程组的影响区域和依赖区域





图2-5　拟线性双曲型方程组的似空与似时曲线

这里不讨论方程(2-1-13)的求解，但应指出：从一点P向指定的“上”方向发出的最外侧的两条特征线之间是该点解的影响区域，同样向“下”部分是解的依赖区域，见图2-4。另外，如果一条曲线$\mathscr{S}$每点的所有特征线方向都指向一边，称$\mathscr{S}$为似空的。如果不同的特征方向指向不同的两边，称$\mathscr{S}$为似时的，见图2-5。以下就讨论涉及一个似时一个似空坐标轴的双曲型方程组。

一维非定常流体力学方程经常写为守恒型

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0 \quad \vec{F} = \vec{F}(\vec{U}) \tag{2-1-17}$$

如一维非定常等熵流动方程为

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \end{pmatrix}$$

方程（2-1-17）可写为

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = 0, \quad A = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}} \tag{2-1-18}$$

相当于方程（2-1-13）中$B = I$，$y = t$，$\vec{C} = 0$。设方程是双曲型的，而$\lambda_1 \cdots \lambda_m$是$A$的特征值，$\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_m$是相应的特征向量．那么

$$A = R\Lambda R^{-1} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} \tag{2-1-19}$$

其中R是矩阵（$\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_m$）

$$R^{-1} = L = \begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vdots \\ \vec{l}_m \end{pmatrix} \tag{2-1-20}$$

其中$\vec{l}_i$就是对应λ_i的左特征向量。（当然任意左特征向量集组成的矩阵L不一定满足此式）。方程（2-1-18）左乘L，得特征关系

$$L\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \Lambda L\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = 0 \tag{2-1-21}$$

其中每一个分量方程即为

$$\vec{l}_i\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \vec{U}}{\partial x}\right) = 0 \tag{2-1-22}$$

对一维非定常等熵流动方程，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}$，对应$\frac{dx}{dt} = \lambda = u + c$，$\vec{l} = (u - c, -1)$，对应$\frac{dx}{dt} = \lambda = u - c$，$\vec{l} = (u + c, 1)$，即得出式（2-1-22）可简化为式（2-1-5）和（2-1-6）。

如果方程(2-1-18)是线性的，那么式（2-1-22)可写为$\vec{l},\vec{U}$的微分关系，而$\vec{l},\vec{U}$称为特征变量。但对非线性方程，特征关系写到式（2-1-22）为止。

现在说明边界条件个数。设求解区域的左边界为$x=0$。在边界上，对应每一个指向区域内的特征线，要给一个边界条件。

当边界条件个数小于未知量个数，可以补充对应向外特征方向的特征关系。用给定的边界条件和这些特征关系的适当差分格式，联立求出边界上的未知量。实际计算表明这样的边界处理是最合理且最可靠的。

例 轴对称定常超声速流的基本方程是

$$A\frac{\partial \vec{U}}{\partial Z}+B\frac{\partial \vec{U}}{\partial r}+\vec{D}=0 \qquad (2-1-23)$$

式中

$$\vec{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ u\\ v\\ p\end{pmatrix}\quad A=\begin{pmatrix}u&\rho&0&0\\0&u&0&1/\rho\\0&0&u&0\\0&\rho c^2&0&u\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}v&0&\rho&0\\0&v&0&0\\0&0&v&1/\rho\\0&0&\rho c^2&v\end{pmatrix}\quad \vec{D}=\begin{pmatrix}\rho v/r\\0\\0\\c^2\rho v^2/r\end{pmatrix} \qquad (2-1-24)$$

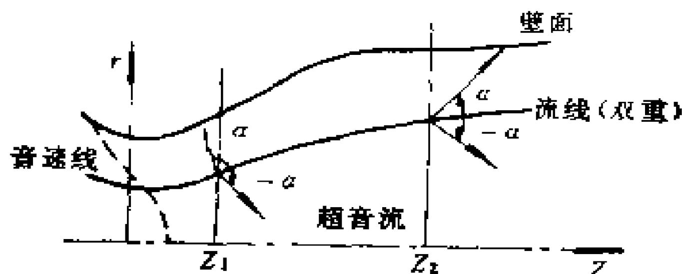


图2-6 轴对称喷管超声速流动的特征线

特征线如图2-6所示（推导略，但可见下节）。

特征方向是

$$\frac{dr}{dz}=\tan\theta=\frac{v}{u} \qquad \text{双重}$$

$$\frac{dr}{dz}=\tan(\theta\pm\alpha), \quad \sin\alpha=\frac{c}{q}$$

式中 $q=u^2+v^2$。直线 $z=z_2$是似空的，以它做为左边界需给出 4 个边界条件。直线 $z=z_1$不是似空的，以它做为左边界只需给出 3 个边界条件，但不可能以它向右推进计算。

第二节 双曲型偏微分方程的特征——三个自变量

給定拟线性偏微分方程组

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}=\vec{C} \qquad (2\text{-}2\text{-}1)$$

式中 $\vec{U}$ 和 $\vec{C}$ 为m维向量，$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$为$m\times m$阶矩阵，并$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\vec{C}$ 依赖于 x、y，$\vec{U}$。

如二维非定常等熵流动方程可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u\\v\\\rho\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u & 0 & c^2/\rho\\0 & u & 0\\\rho & 0 & u\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u\\v\\\rho\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}v & 0 & 0\\0 & v & c^2/\rho\\0 & \rho & v\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\\\rho\end{pmatrix}=0 \qquad (2\text{-}2\text{-}2)$$

特征面$\phi(x, y, t)=0$是这样的曲面：在它上面给定$\vec{U}$，不能唯一确定其外导数。引入坐标变换 $x, y, t\to\xi, \eta, \phi$；这里$\phi$坐标方向是特征面的法向；$\xi, \eta$方向是其切向，那么方程（2-2-1）变为

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\frac{\partial\vec{U}}{\partial\phi}=-\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right.$$

$$\left.+\boldsymbol{B}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\frac{\partial\vec{U}}{\partial\xi}-\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\boldsymbol{B}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\frac{\partial\vec{U}}{\partial\eta}+\vec{C}$$

$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \phi}$不唯一，意味着

$$det(n_t I + n_x \mathbf{A} + n_y \mathbf{B}) = 0 \tag{2-2-3}$$

见图 2-7。对某解 $\vec{U}=\vec{U}(x, y, t)$，在某点（x，y，t）如果对任何实的 n_x，n_y，式（2-2-3）有 m 个不同的实根 n_t，或 $n_x\mathbf{A}+n_y\mathbf{B}$ 有 m 个线性无关的左特征向量 $\vec{l}$，则称方程（2-2-1）为双曲型的。

对方程（2-2-2），关系式（2-2-3）可写为以下形式

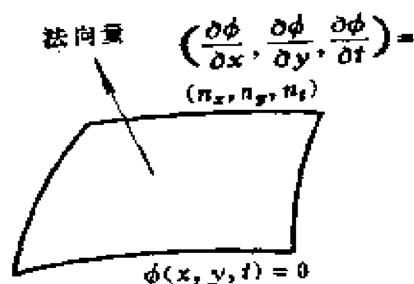


图2-7　拟线性双曲型方程组的特征面

$$det\begin{vmatrix} L & 0 & c^2/\rho\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ 0 & L & c^2/\rho\cdot\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \rho\frac{\partial \phi}{\partial x} & \rho\frac{\partial \phi}{\partial y} & L \end{vmatrix} = 0$$

$$L = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{2-2-4}$$

或

$$L\left\{L^2 - c^2\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right]\right\} = 0$$

或

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \tag{2-2-5}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - c^2\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right] = 0 \tag{2-2-6}$$

为了表示方便，把$\phi(x, y, t)=0$写为$t=\psi(x, y)$，$\frac{\partial\phi}{\partial t}=-1$，$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x}$，$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y}$，那么式（2-2-5），（2-2-6）可写为

$$u\frac{\partial\psi}{\partial x}+v\frac{\partial\psi}{\partial y}=1 \qquad (2\text{-}2\text{-}7)$$

$$\left(-1+u\frac{\partial\psi}{\partial x}+v\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2-c^2\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]=0 \qquad (2\text{-}2\text{-}8)$$

一般设$\phi(x, y, t)=0$可表示为$t=\psi(x, y)$，式（2-2-3）在代入$\vec{U}(x, y, t)$后是一个一阶非线性偏微分方程

$$Q(x, y, \psi, p, q)=0, \quad p=\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad (2\text{-}2\text{-}9)$$

对于方程（2-2-9）可给出以下三个要点

（1）非线性偏微分方程（2-2-9）给出解$t=\psi(x, y)$可能的切平面法向$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, -1\right)$。与拟线性方程(2-1-10)不同，这里在一点上可能的切平面包络是一个蒙日(monge)锥。对应有：可能的特征面的切平面（即特征平面）包络的锥称为特征锥。

（2）蒙日锥的母线方程是$Q=0$和

$$\frac{dx}{ds}=\frac{\partial Q}{\partial p}, \quad \frac{dy}{ds}=\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{dt}{ds}=p\frac{\partial Q}{\partial p}+q\frac{\partial Q}{\partial q} \qquad (2\text{-}2\text{-}10)$$

其中s是沿母线的参数。对应特征锥母线的方程是（2-2-10）。

（3）位于解面$t=\psi(x, y)$的母线称为“特征线”，所有解面的母线（即“特征线”）也就是偏微分方程（2-2-1）的特征方程（2-2-9）的“特征线”。当讨论所有的特征面时对应特征锥的母线称为“次特征线”。“特征线”生成解面，对应：“次

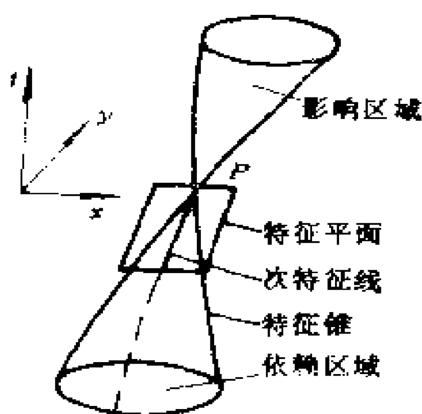


图2-8　拟线性双曲型方程组的特征

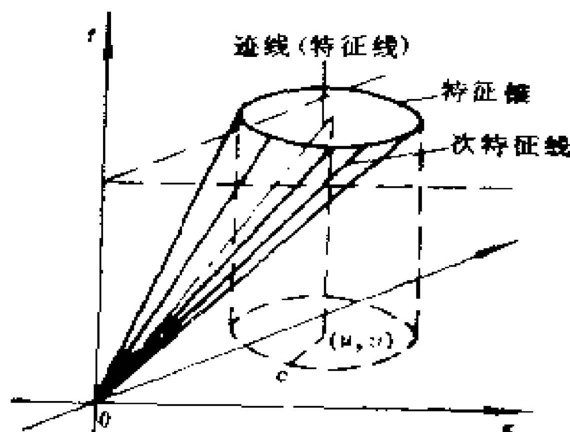


图2-9　二维非定常等熵流动方程的特征

特征线"，生成特征锥，见图 2-8。

类似两个自变量的情况，从一点P向上（正t方向）发出的特征锥内部是P点的影响区域，而向下的特征锥内部是P的依赖区域。

如对二锥非定常等熵流动，方程（2-2-7）是一个线性偏微分方程，可以认为特征锥退化为一条线，也就是次特征线。其方程为

$$\frac{dx}{ds}=u\qquad \frac{dy}{ds}=v\qquad \frac{dt}{ds}=\frac{d\psi}{ds}=pu+qv=1\qquad(2\text{-}2\text{-}11)$$

或

$$\frac{dx}{dt}=u\qquad \frac{dy}{dt}=v$$

这就是流动的迹线，通常称它为方程（2-2-2）的特征线。

由方程（2-2-8）可导出

$$\frac{dx}{ds}=2(Lu-c^2p)\qquad \frac{dy}{ds}=2(Lv-c^2q)\qquad \frac{dt}{ds}=2L\qquad(2\text{-}2\text{-}12)$$

或写为

$$\left(\frac{dx}{dt}-u\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-v\right)^2=c^2$$

它表示图 2-9 所示的特征锥的母线，即次特征线。

从以上讨论容易看到，对于二维定常等熵流，式（2-2-2）中 $\frac{\partial}{\partial t}$ 项为0，式（2-2-4）中不出现 $\frac{\partial \phi}{\partial t}$，相当于 $\frac{\partial \phi}{\partial t}=0$，即特征面都垂直于 xy 平面，记为 $\phi(x, y)=0$，那么迹线变为流线，它是定常情况下的特征线。对特征锥，在亚声速流动的情况下，其投影如图 2-10（a）所示，此时不存在切锥面并垂直于 xy 平面的 $\phi(x, y)=0$，即定常情况下不存在特征线，这种情况对应于椭圆型方程。在超声速流动的情况，特征锥的投影如图 2-10（b）所示，可知有两个这样的 $\phi(x, y)=0$；即在定常情况下有两条特征线

$$\frac{dy}{dx}=\tan(\theta \pm \alpha), \quad \sin\alpha=\frac{c}{q}$$

因此超声速定常方程是双曲型的。

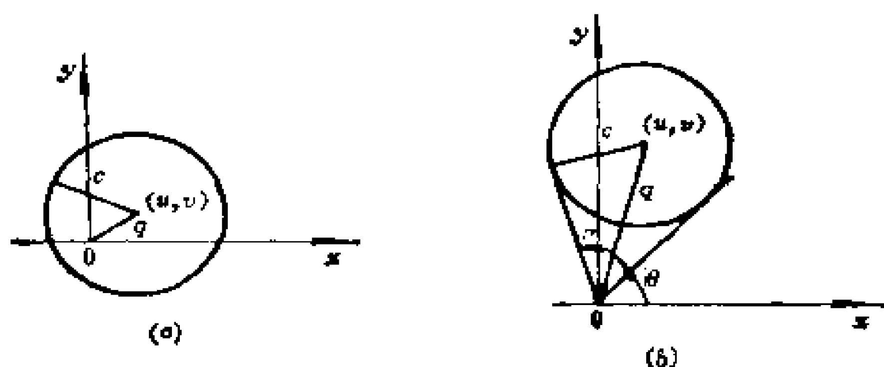


图2-10　特征锥的投影

（a）亚声速流；（b）超声速流。

当方程（2-2-1）为双曲型时，对任何实 n_x，n_y（不妨设 $n_x^2+n_y^2=1$）有 m 个线性无关的 $\vec{l}$

$$\vec{l}(n_t\mathbf{I}+n_x\mathbf{A}+n_y\mathbf{B})=0$$

以 $\vec{l}$ 左乘式（2-2-1）得特征关系

$$\vec{l}\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\mathbf{A}\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}+\mathbf{B}\frac{\partial \vec{U}}{\partial y}\right)=\vec{l}\vec{C} \qquad (2\text{-}2\text{-}13)$$

注意它是一个内微分方程，即

$$\vec{l}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}+A\frac{\partial \xi}{\partial x}+B\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)\frac{\partial \vec{U}}{\partial \xi}+\vec{l}\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right.$$
$$\left.+A\frac{\partial \eta}{\partial x}+B\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial \vec{U}}{\partial \eta}=\vec{l}\vec{C}$$

对应两个自变量情况的特征线，这里有

（1）如果存在偏微分方程或其线性组合使所有的未知量在同一平面上微分，这个平面称为特征平面，即对特征面，偏微分方程（组合）表示内微分方程。

（2）在特征面上给初值 $\vec{U}$，一阶外导数不唯一确定。

（3）特征面是解可能有一阶外导数的间断面。

还可以证明：这种导数的间断是沿次特征线传播的，并且一点的扰动沿特征锥面的次特征线传播到空间。

在此进一步说明次特征线方向。设某解 $\vec{U}=\vec{U}(x, y, t)$，在一点 (x, y, t) 上考虑。

$$Q=det(n_t\boldsymbol{I}+n_x\boldsymbol{A}+n_y\boldsymbol{B})=0 \qquad (2\text{-}2\text{-}14)$$

即式（2-2-3），取 $n_t=-\lambda$ 时，则 λ 为 $n_x\boldsymbol{A}+n_y\boldsymbol{B}$ 的特征值，令 $\vec{l}$ 和 $\vec{r}$ 分别为对应的左和右特征向量，由微分 $(n_t\boldsymbol{I}+n_x\boldsymbol{A}+n_y\boldsymbol{B})\vec{r}=0$，得

$$(n_t\boldsymbol{I}+n_x\boldsymbol{A}+n_y\boldsymbol{B})d\vec{r}+(dn_t\boldsymbol{I}+dn_x\boldsymbol{A}+dn_y\boldsymbol{B})\vec{r}=0$$

左乘 $\vec{l}$，得

$$\vec{l}(dn_t\boldsymbol{I}+dn_x\boldsymbol{A}+dn_y\boldsymbol{B})\vec{r}=0 \qquad (2\text{-}2\text{-}15)$$

从式（2-2-14）有

$$dQ=\frac{\partial Q}{\partial n_t}dn_t+\frac{\partial Q}{\partial n_x}dn_x+\frac{\partial Q}{\partial n_y}dn_y=0 \qquad (2\text{-}2\text{-}16)$$

类似式（2-2-10），可导出。

$$\frac{dt}{ds}=\frac{\partial Q}{\partial n_t} \qquad \frac{dx}{ds}=\frac{\partial Q}{\partial n_x} \qquad \frac{dy}{ds}=\frac{\partial Q}{\partial n_y}$$

是次特征线方向。比较式（2-2-15）与（2-2-16）得出

$$\frac{dt}{ds}=1 \qquad \frac{dx}{ds}=\vec{l}\boldsymbol{A}\vec{r} \qquad \frac{dy}{ds}=\vec{l}\boldsymbol{B}\vec{r} \qquad (2\text{-}2\text{-}17)$$

是次特征线方向。

关于边界条件的个数，三个自变量的情况比两个自变量的情况要复杂得多，求解域的每点都有无穷个特征面。不过，在边界上可以如下定义“向内”的特征面。然后类似第一节，从边界“向内”的特征面的个数就是边界条件的个数。设求解区域的左边界为 $x=0$，在左边界考虑外法向量 $(n_x, n_y)=(-1, 0)$ 的特征面，这时式（2-2-3）变为

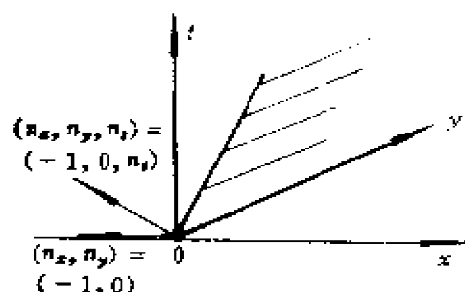


图2-11　左边界的“向内”特征面

$$det(n_t I - A) = 0 \qquad (2\text{-}2\text{-}18)$$

n_t 就是 A 的特征值 λ。当 $n_t > 0$，称特征面“向内”，见图 2-11。对应这样的 n_t，需给一个边界条件。从表面上看，二维非定常问题边界条件个数的分析类似于对应的一维问题的分析。

对方程（2-2-2）中 A 的特征值 $\lambda = u$，$u \pm c$，如果在 $x=0$ 处，$u<c$，则需给两个边界条件；如果在 $x=0$ 处，$u>c$，则需给三个边界条件；如图 2-12 所示。注意，关键在于 u 是亚声速还是超声速，而不在于流动本身，即不在于 q 是亚声速还是超声速。

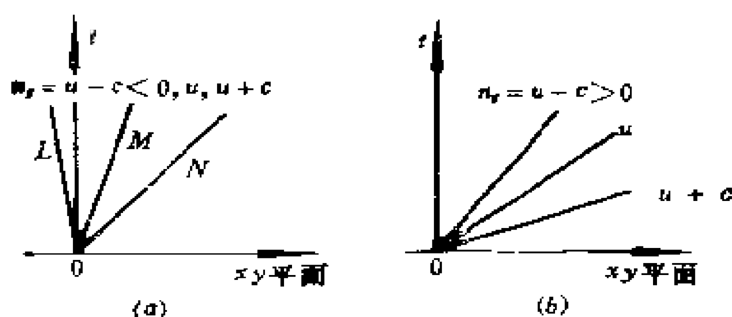


图2-12　二维非定常等熵流动方程的特征面

（a）u 亚声速情况；（b）u 超声速情况。

另外，类似第一节为求边界上的值，可以补充“向外”特征面上的特征关系，即对 $n_t < 0$（$\lambda < 0$）（或对 $(n_x, n_y) = (1,$

0), $n_r > 0$ ($\lambda < 0$)), 找出$\boldsymbol{A}$的左特征向量$\vec{l}$, 左乘式（2-2--1), 得式（2-2-13）的简化式为

$$\vec{l}\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\lambda\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\right)+\vec{l}\boldsymbol{B}\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}=\vec{l}\vec{C} \qquad (2-2-19)$$

注意$\lambda=\vec{l}\boldsymbol{A}\vec{r}$, 此处左右特征向量是规格化的。再令$\mu=\vec{l}\boldsymbol{B}\vec{r}$, 根据式（2-2-17）有

$$\lambda=\vec{l}\boldsymbol{A}\vec{r}=\frac{dx}{ds} \qquad \mu=\vec{l}\boldsymbol{B}\vec{r}=\frac{dy}{ds}$$

其中s是沿次特征线的参数。因此特征关系式（2-2-19）可写为

$$\vec{l}\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)$$

$$+(\vec{l}\boldsymbol{B}-\vec{l}\mu)\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}=\vec{l}\vec{C}$$

或

$$\vec{l}\frac{\partial\vec{U}}{\partial s}+(\vec{l}\boldsymbol{B}-\vec{l}\mu)\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}=\vec{l}\vec{C} \qquad (2-2-20)$$

对于二维非定常等熵流方程（2-2-2),在$x=0$处，当$u<c$时，需给出两个边界条件。为确定边界值再用一个特征关系，对应$\lambda=u-c<0$（“向外”特征面)，且有$\vec{l}=(\rho,\ 0,\ -c)$, $\vec{r}=\left(\frac{1}{2\rho},\ 0,\ -\frac{1}{2c}\right)$。特征关系式（2-2-19）此处为

$$(\rho,\ 0,\ -c)\left(\frac{\partial}{\partial t}+(u-c)\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}u\\v\\\rho\end{pmatrix}\right)$$

$$+(\rho v,\ -\rho c,\ -cv)\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\\\rho\end{pmatrix}=0 \qquad (2-2-21)$$

注意，微分都在“向外”特征平面上，如图2-13中L。又$\vec{l}\boldsymbol{B}-u\vec{l}=(0,\ -\rho c,\ 0)$, $\vec{l}\boldsymbol{B}\vec{r}=v$, 所以以次特征线表示的特征关系式（2-2-20）在此为

$$(\rho,\ 0,\ -c)\frac{\partial}{\partial s}\begin{pmatrix}u\\v\\\rho\end{pmatrix}+(0,\ -\rho c,\ 0)\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}u\\v\\\rho\end{pmatrix}=0$$

或

$$\rho\frac{\partial u}{\partial s}-c\frac{\partial \rho}{\partial s}-\rho c\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (2\text{-}2\text{-}22)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}-(u-c)\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$$

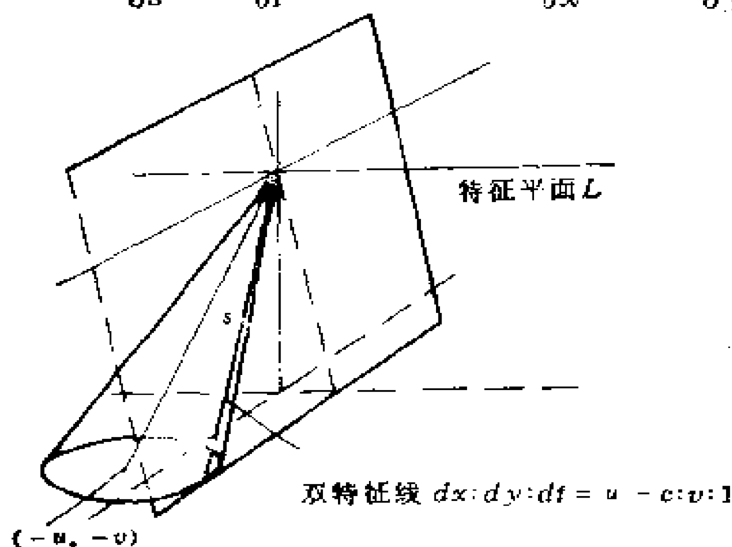


图2-13　二维非定常等熵流动在左边界的向外特征面

从上可清楚地看到选择法向量的投影垂直边界的"向外"特征面的理由，即它的向下部分完全位于求解区域内。所有沿此特征面传播到边界点的信息都在区域内。如果适当地差分化，边界的计算格式所需的值也都在区域内。

对一般的边界，做坐标变换

$$x=x(\alpha,\ \beta) \qquad y=y(\alpha,\ \beta)$$

其中设变换雅可比（Jacobian）矩阵

$$\mathbf{J}=\frac{\partial x}{\partial \alpha}\ \frac{\partial y}{\partial \beta}-\frac{\partial x}{\partial \beta}\ \frac{\partial y}{\partial \alpha}\neq 0$$

即得

$$\alpha=\alpha(x,\ y) \quad \beta=\beta(x,\ y)$$

并

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}=\frac{1}{J}\ \frac{\partial y}{\partial \beta} \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial y}=-\frac{1}{J}\ \frac{\partial x}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\qquad\frac{\partial\beta}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\alpha}$$

当α、β坐标系正交（见图 2-14），有

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}+\frac{\partial y}{\partial\alpha}\frac{\partial y}{\partial\beta}=0$$

并尺度规格化为

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2=1$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\beta}\right)^2=1$$

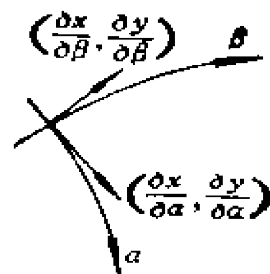


图2-14　一般边界的坐标系

那么$J=1$，并有

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}=\frac{\partial y}{\partial\beta}\qquad\frac{\partial y}{\partial\alpha}=-\frac{\partial x}{\partial\beta}$$

把

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}=\frac{\partial\vec{U}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\vec{U}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}=\frac{\partial\vec{U}}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\vec{U}}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial y}$$

代入方程（2-2-1）得

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+(k_1\boldsymbol{A}+k_2\boldsymbol{B})\frac{\partial\vec{U}}{\partial\alpha}+(\tilde{k}_1\boldsymbol{A}+\tilde{k}_2\boldsymbol{B})\frac{\partial\vec{U}}{\partial\beta}=\vec{C}\tag{2-2-23}$$

其中

$$k_1=\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\beta}\quad k_2=-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\beta}$$

$$\tilde{k}_1=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial\alpha}\quad\tilde{k}_2=\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial\alpha}$$

当α　β坐标系正交且尺度规格化，有

$$k_1=\tilde{k}_2=n_1\qquad k_2=-\tilde{k}_1=n_2$$

这时把（α，β）写为（n，m），见图 2-15，方程（2-2-23）可写为

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+A_n\frac{\partial\vec{U}}{\partial n}+B_m\frac{\partial\vec{U}}{\partial m}=\vec{C} \qquad (2\text{-}2\text{-}24)$$

其中

$$A_n=n_1A+n_2B \quad B_m=-n_2A+n_1B$$

对应式（2-2-18）有

$$det(n_tI-A_n)=0 \qquad (2\text{-}2\text{-}25)$$

对应式（2-2-19）有

$$\vec{l}\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\lambda_n\frac{\partial\vec{U}}{\partial n}\right)+\vec{l}B_m\frac{\partial\vec{U}}{\partial m}=\vec{l}\vec{C} \qquad (2\text{-}2\text{-}26)$$

其中 λ_n 是 A_n 的特征值，$\lambda_n<0$，$\vec{l}$ 对应左特征向量。同样也可得出对应式（2-2-20）形式的特征关系。

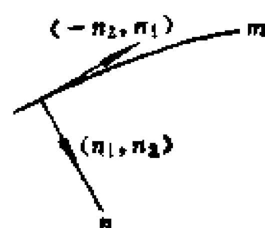


图2-15　一般边界的正交坐标系

例　轴对称非定常无粘流的方程是

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+A\frac{\partial\vec{U}}{\partial z}+B\frac{\partial\vec{U}}{\partial r}+\vec{D}=0 \qquad (2\text{-}2\text{-}27)$$

其中 $\vec{U}$、A、B和 $\vec{D}$ 由式（2-1-24）给出。

矩阵 k_1A+k_2B 的特征值 λ 为

$$\lambda_0=k_1u+k_2v \quad \lambda_\pm=\lambda_0\pm ck$$

$$k=\sqrt{k_1^2+k_2^2}$$

对应左特征向量组成矩阵 L

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 & k/\rho c \\ 0 & -k_1 & -k_2 & k/\rho c \end{pmatrix}$$

特征关系式为

$$L\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\lambda\frac{\partial\vec{U}}{\partial\alpha}\right)+L(\tilde{k}_1A+\tilde{k}_2B)\frac{\partial\vec{U}}{\partial\beta}+L\vec{D}=0$$

即

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\lambda_0\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\right)-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\lambda_0\frac{\partial p}{\partial\alpha}\right)$$

$$+\tilde{u}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \beta}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial \beta}\right)=0$$

$$\tilde{u}=\tilde{k}_1 u+\tilde{k}_2 v \tag{2-2-28}$$

$$k_2\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda_0\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)-k_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda_0\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)$$
$$+k_2\tilde{u}\frac{\partial u}{\partial \beta}-k_1\tilde{u}\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{1}{J\rho}\frac{\partial p}{\partial \beta}=0 \tag{2-2-29}$$

$$\pm k_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\lambda_\pm\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)\pm k_2\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\lambda_\pm\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)$$
$$+\frac{k}{\rho c}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\lambda_\pm\frac{\partial p}{\partial t}\right)+(\pm k_1\tilde{u}+k\tilde{k}_1 c)\frac{\partial u}{\partial \beta}$$
$$+(\pm k_2\tilde{u}+k\tilde{k}_2 c)\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{1}{\rho}\left(\pm k_1\cdot\tilde{k}_1\pm k_2\cdot\tilde{k}_2+\frac{k\tilde{u}}{c}\right)$$
$$\times\frac{\partial p}{\partial \beta}+\frac{kcv}{r}=0 \tag{2-2-30}$$

考虑轴对称喷管固壁边界，设α、β轴正交并尺度规格化，即上述（α，β）=（n，m）。设上边界n=const为固壁，即流线（见图2-15），这时$\lambda_0=n_1u+n_2v=0$，$\lambda_+=c>0$，$\lambda_-=-c<0$。对应$\lambda>0$，给一个边界条件，且用式（2-2-28），（2-2-29）和（2-2-30）（其中取负号）确定边界上4个未知量的值。

在此指出：边界处理的方法多种多样，但如第一节所述，补充特征关系式是最合理和最可靠的方法。有关边界条件本身的提法将在第五节至第八节讨论。

第三节　广义简单波和广义黎曼不变量

在这一节中主要是将一维非定常具有两个未知量问题的简单波和黎曼不变量推广到m个未知量的问题。提及的概念都属于双曲型偏微分方程和近年提出的差分格式及其分析的基础。

考虑所谓“可约”双曲型方程组

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}(\vec{U})\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}=0 \tag{2-3-1}$$

这里$\boldsymbol{A}$仅依赖于$\vec{U}$且右边非齐次项为零，如方程（2-1-18）。对$m=2$，特征关系有以下形式

$$\vec{l}_1\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\lambda_1\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}\right)=0$$

$$\vec{l}_2\left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\lambda_2\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}\right)=0$$

引入特征坐标系，上式可写为

$$\vec{l}_1\frac{\partial \vec{U}}{\partial \alpha}=0 \quad 沿\ C_1: \quad \frac{dx}{dt}=\lambda_1 \tag{2-3-2}$$

$$\vec{l}_2\frac{\partial \vec{U}}{\partial \beta}=0 \quad 沿\ C_2: \quad \frac{dx}{dt}=\lambda_2 \tag{2-3-3}$$

式（2-3-2）可写为

$$l_{11}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha}+l_{12}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha}=0$$

因为存在积分因子使$\mu_1 l_{11}du_1+\mu_1 l_{12}du_2=dJ_1$，所以有

$$\frac{\partial J_1}{\partial \alpha}=0\ 或\ J_1=r(\beta) \tag{2-3-4}$$

同理得

$$\frac{\partial J_2}{\partial \beta}=0\ 或\ J_2=s(\alpha) \tag{2-3-5}$$

J_1，J_2称为黎曼不变量。

一般积分因子不容易找出，但对一维非定常等熵流动方程（2-1-1）、（2-1-2）有$J_1=\frac{u}{2}+\frac{c}{\gamma-1}$，$J_2=-\frac{u}{2}+\frac{c}{\gamma-1}$，见式（2-1-9）。

现列出对于$m=2$简单波的特性如下

（1）对所有β，$J_1(u_1,\ u_2)=$常数$=r_0$（当然也可以用$J_2=$常数），可作为简单波的一种定义。

（2）当$\frac{\partial J_1}{\partial u_2}\neq 0$时，$u_2=u_2(u_1)$。

（3）又因沿 C_2 有 $J_2(u_1, u_2) = s(\alpha)$，所以 u_1 = 常数，u_2 = 常数，因此 C_2 特征线是直线。

（4）另外，常态区域的邻近区域（见图 2-16 的阴影区）是简单波区域，因为常态区域的 $J_1 = r_0$，比如说，沿特征线 C_1 传进邻近区域。

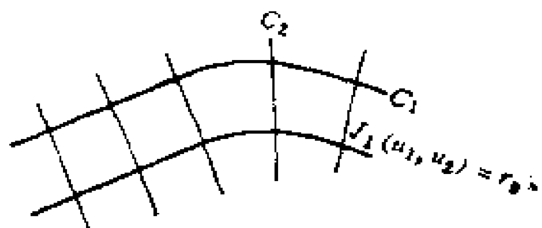


图2-16　常态区及其邻近区

对 $m \geqslant 3$，一般不存在积分因子使 $\mu(l_{i1}du_1 + l_{i2}du_2 + \cdots + l_{im}du_m)$ 为全微分。这里用上述特性（2）推广简单波的概念，即

$$\vec{U} = \vec{U}(u_1) = \vec{U}(\xi), \quad \xi = \xi(x, t)$$

代进方程（2-3-1）得

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial t} I + \frac{\partial\xi}{\partial x} A\right)\frac{d\vec{U}}{d\xi} = 0$$

可见 $\frac{d\vec{U}}{d\xi}$ 是 A 的右特征向量，其对应的特征值为 λ，而 λ 满足

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \lambda\frac{\partial\xi}{\partial x} = 0 \tag{2-3-6}$$

A 有 m 个特征值 $\lambda_1 \cdots \lambda_m$，若对 λ_i，式（2-3-6）成立，则沿特征线 $\frac{dx}{dt} = \lambda_i(\vec{U}(\xi))$，$\xi$ = 常数或 $\vec{U}(\xi)$ = 常数，从而此族特征线是直线，即为特性（3）。此时称这样的区域为 λ_i 广义简单波区域，而在这简单波中 $\vec{U}$ 由

$$\frac{du_1}{r_{i1}} = \frac{du_2}{r_{i2}} = \cdots \frac{du_m}{r_{im}} \tag{2-3-7}$$

定出。这里 $\vec{r}_i$ 为对应于特征值 λ_i 的右特征向量。这导致 $m-1$ 个线性无关的关系式如下

$$J_i^1(u_1 \cdots u_m) = \text{常数}$$
$$\vdots$$
$$J_i^m(u_1, \cdots, u_m) = \text{常数} \tag{2-3-8}$$

称 λ_i 为广义黎曼不变量，即特征（1）。在 $(u_1, \cdots u_m)$ 空

间里，式（2-3-8）相交成曲线，记为 Γ_i，它的切向即 $\vec{r}_i$。对每个 $J_i(u_1\cdots u_m)=$常数，有 $\frac{\partial J_i}{\partial u_1}du_1+\cdots\frac{\partial J_i}{\partial u_m}du_m=0$ 或可写为

$$\nabla_u J_i\cdot\vec{r}_i=0 \qquad (2-3-9)$$

这也可以用来定义 λ_i 广义黎曼不变量。最后指出，常态区的邻近区也是广义简单波区。

例 一维非定常欧拉（Euler）方程可写为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}=0$$

方程（2-3-1）中

$$\vec{U}=\begin{pmatrix}\rho\\u\\S\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}u&\rho&0\\p_\rho/\rho&0&p_s/\rho\\0&0&u\end{pmatrix}$$

这里 $S=C_v\log(p/\rho^\gamma)+$常数，$p=p(\rho,S)$，$c^2=p_\rho\left(=\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)$。容易得出 A 的特征值 λ 和对应右特征向量 $\vec{r}$ 是

$$\lambda=u\quad\vec{r}=\begin{pmatrix}p_s\\0\\-p_\rho\end{pmatrix};\quad\lambda=u+c\quad\vec{r}=\begin{pmatrix}\rho\\c\\0\end{pmatrix};$$

$$\lambda=u-c\quad\vec{r}=\begin{pmatrix}\rho\\-c\\0\end{pmatrix}$$

对 $\lambda=u$，从式（2-3-7）得广义黎曼不变量为

$$du=0,\quad J^1=u=\text{常数}$$

$$dp=p_\rho d\rho+p_s dS=0\quad J^2=p=\text{常数}$$

那么 $\nabla_u J^1=(0,\ 1,\ 0)^T$，$\nabla_u J^2=(p_\rho,\ 0,\ p_s)^T$，可见都满足式（2-3-9），即 $\nabla_u J\cdot(p_s,\ 0,\ -p_\rho)^T=0$。

对 $\lambda = u + c$，从式（2-3-7）得

$$dS = 0,\ J^1 = S = 常数$$

$$du - \frac{c}{\rho}d\rho = 0,\ J^2 = u - \int \frac{c}{\rho}d\rho = 常数$$

在它们相交的曲线上，由 S = 常数，$p = p(\rho)$($p = A\rho^\gamma$，A 为常数)，可得 $J^2 = \frac{u}{2} - \frac{c}{\gamma - 1}$。这与等熵流 $m = 2$ 的情况一样，但在此广义黎曼不变量在广义简单波区域内不变。由 $\nabla_u J^1 = (0, 0, 1)'$，$\nabla_u J^2 = (-c/\rho, 1, \ominus)$，$\ominus$ 为非 0 元素，可见都满足式（2-3-9），$\nabla_u J \cdot (\rho, c, 0)' = 0$

同理对 $\lambda = u - c$，得广义黎曼不变量

$$J^1 = S = 常数$$

$$J^2 = u + \int \frac{c}{\rho}d\rho = 常数$$

在此也说明常用述语——特征场线性退化和真正非线性的意思。设 $\vec{U}(\xi)$ 已求出，令 $c(\xi) = \lambda(\vec{U}(\xi))$，那么从方程（2-3-6）得 $\xi = \xi_0(x - c(\xi)t)$，其中 $\xi_0(x)$ 是方程（2-3-6）的初值，即 $\vec{U}(\xi) = \vec{U}(\xi_0(x - c(\xi)t))$。对线性方程 $\frac{dc(\xi)}{d\xi} = 0$ 即 $c(\xi) = c$，波形随时间不变，由此启发定义：当 $\frac{d\lambda(\vec{U}(\xi))}{d\xi} = \nabla_u \lambda \cdot \vec{r}$ 满足

$$\nabla_u \lambda \cdot \vec{r} \equiv 0 \tag{2-3-10}$$

称特征场（λ，1）为线性退化的（linearly degenerate），而当

$$\nabla_u \lambda \cdot \vec{r} \neq 0 \tag{2-3-11}$$

称特征场为真正非线性的（genuinely nonlinear）。再看标量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

其中 $a(u) = f'(u)$。式（2-3-10）对应 $a'(u) = 0$，a = 常

数，即 $f(u)$ 是直线。式（2-3-11）对应 $a'(u)\neq 0$，设 $a'(u)>0$，那么 $f''(u)>0$，即 $f(u)$ 是凸函数。

以上一维欧拉方程中，对 $\lambda=u$，$\nabla_u\lambda=(0,\ 1,\ 0)'$。显然满足式（2-3-10），相应特征场是线性退化的。而对 $\lambda=u+c$，$\nabla_u\lambda=(c_\rho,\ 1,\ c_s)'$，可导出 $\nabla_u\lambda\cdot\vec{r}=c_\rho\rho+c=\frac{\gamma+1}{2}c\neq 0$，满足式（2-3-11），相应的特征场是真正非线性的，对 $\lambda=u-c$，相应特征场也是真正非线性的。

有关特征场的定义不限于可约方程，并可推广到多维问题。

第四节　双曲型守恒律的弱解

各种间断——稀疏波、接触间断或滑移面和激波——的计算在计算流体力学和计算数学中都属于主攻方向，它的研究已有三四十年的历史，促进了有关数学理论和计算方法的发展，内容十分丰富。这些内容在很多计算流体力学书中都有详细介绍。本节仅给出弱解的几个等价定义，在差分格式的推导和理论分析中，各有各的用途。关于弱解的唯一性，在近几年的流场计算中已成为实际问题，这里也将作些简述。

众所周知对双曲守恒型方程

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}=0,\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0 \tag{2-4-1}$$

其中通量 $\vec{F}=\vec{F}(\vec{U})$，即使初值

$$\vec{U}(x,\ 0)=\vec{U}_0(x) \tag{2-4-2}$$

是充分光滑的，随时间增长，同族特征线可能相交，即解可能有间断，所以必须推广经典解的概念。

逐段光滑函数 $\vec{U}(x,\ t)$ 称为方程（2-4-1）的弱解的三个等价定义如下

（1）在光滑区，$\vec{U}$ 是方程（2-4-1）的经典解，而在间断线 $x=x(t)$ 上 $\left(\text{间断速度 } s=\frac{dx}{dt}\right)$，满足

$$(\vec{U}_+ - \vec{U}_-)\, s = \vec{F}_+ - \vec{F}_- \qquad (2\text{-}4\text{-}3)$$

其中下标+，－表示间断的两侧，式（2-4-3）称为间断解的兰金-雨果诺（Rankine-Hugoniot）条件。

（2）对任意区域Ω，边界$\partial\Omega$逐段光滑，$\vec{U}$满足

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{U}dx - \vec{F}dt = 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}4)$$

（3）对每个充分光滑并当$|x|+t$充分大时为0的试验函数$\varphi(x, t)$ $\vec{U}$满足

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\vec{U} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{F}\right)dxdt$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, 0)\vec{U}_0(x)dx = 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}5)$$

此时称$\vec{U}$是初值问题（2-4-1）、（2-4-2）的弱解。

定义（2）中式（2-4-4）可由式（2-4-1）用散度定理得出并可直接用于离散方程（Ω取为长方形区域）；从式（2-4-4）又可方便地得出间断解的兰金-雨果诺条件（Ω取为包括间断线段并宽度趋于零的区域）。

对二维空间的双曲型守恒律

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial\vec{G}}{\partial y} = 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}6)$$

其中$\vec{F}=\vec{F}(\vec{U})$，$\vec{G}=\vec{G}(\vec{U})$是逐块光滑函数。$\vec{U}(x, y, t)$称为弱解的定义是：

（1）在光滑区内$\vec{U}$是方程（2-4-6）的经典解。设$\sigma(x,$

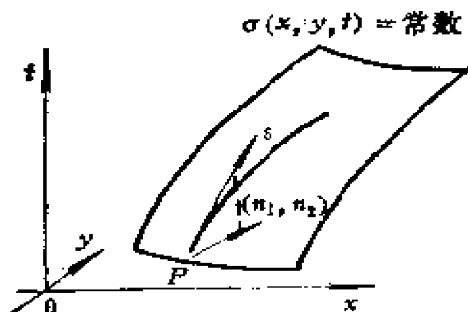


图2-17　间断面

y, t）＝常数为解的一个间断面，见图 2-17；令 $\widetilde{n}=\sqrt{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2}$，$n_1=\frac{\partial\sigma}{\partial x}/\widetilde{n}$，$n_2=\frac{\partial\sigma}{\partial y}/\widetilde{n}$，那么（$n_1$，$n_2$）是$xy$平面上间断线的单位法向量，而 $s=-\frac{\partial\sigma}{\partial t}/\widetilde{n}$是间断线的法向速度●。在间断面上 $\vec{U}$ 满足

$$[\vec{U}]s=[\vec{F}]n_1+[\vec{G}]n_2 \tag{2-4-7}$$

这里符号$[w]=w_+-w_-$，下标＋、－表示间断的两侧。

（2）对任意区域Ω，边界 $\partial\Omega$ 逐块光滑，其外法向量 $n=(n_x, n_y, n_t)$，$\vec{U}$ 满足

$$\iint\limits_{\partial\Omega}(n_t\vec{U}+n_x\vec{F}+n_y\vec{G})ds=0 \tag{2-4-8}$$

（3）对每个充分光滑并当$|x|+|y|+t$ 充分大时为零的试验函数$\varphi(x, y, t)$、$\vec{U}$ 满足

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\vec{U}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{F}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{G}\right)dxdydt$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y, 0)\vec{U}(x, y, 0)dxdy=0 \tag{2-1-9}$$

定义等价性的证明，可见文献[6]；对二维方程组的证明与对一维标量方程的证明相同。

如果有非齐次项，方程（2-4-1）变为

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{F}}{\partial x}=\vec{C} \quad -\infty<x<\infty, \quad t>0$$

● 对曲面$\sigma(x, y, t)=$常数，其法向量为$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}, \frac{\partial\sigma}{\partial y}, \frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)'$。考虑曲面上某曲线$x=x(t)$，$y=y(t)$上的一点$P$，见图 2-17。让$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0$除以$\widetilde{n}$，曲面割$xy$平面的曲线上$P$处的单位法向量为（$n_1$，$n_2$）。从$s=n_1\frac{dx}{dt}+n_2\frac{dy}{dt}$知$P$在法向的速度为$s$。——编者

其中 $\vec{C}=\vec{C}(\vec{U})$，兰金-雨果诺条件式（2-4-3）不变。但是式（2-4-4）变为

$$\oint_{\partial\Omega}\vec{U}dx-\vec{F}dt+\iint_{\Omega}\vec{C}\,dxdt=0$$

式（2-4-5）变为

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\vec{U}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{F}+\varphi\vec{C}\right)dxdt$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\ 0)\vec{U}_0(x)dx=0$$

众所周知，初值问题（2-4-1），（2-4-2）的弱解是不唯一的。对一维非定常空气力学方程，在间断解中根据熵增条件能选出唯一的真实解。对一般双曲型守恒律（2-4-1），也希望能选出它的唯一的真实解，为此也考虑它的所谓熵函数，即一个标量函数 $U(\vec{U})$

（1）U 是 $\vec{U}$ 的凸函数，即 $\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial\vec{U}_i\partial\vec{U}_k}\right)$ 矩阵正定；

（2）U 满足 $\dfrac{\partial U}{\partial\vec{U}}\dfrac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{U}}=\dfrac{\partial F}{\partial\vec{U}}$。这里 $F(\vec{U})$ 称为熵通量。

这样在光滑区 $\vec{U}$ 满足外加的一个守恒定律

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\cdots\frac{\partial U}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial\vec{U}}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial U}{\partial\vec{U}}\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{U}}\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial\vec{U}}\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}$$

对应的熵条件是（在弱意义下）

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\leqslant 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}10)$$

对逐段光滑函数，熵条件的意义是

（1）在光滑区，$\vec{U}$ 满足式（2-4-10），其中取等号；而在间断线上，$\vec{U}$ 满足

$$(F_+-F_-)-s\,(u_+-u_-)\leqslant 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}11)$$

（2）对任意区域 Ω，边界 $\partial\Omega$ 逐段光滑，$\vec{U}$ 满足

$$\int_{\partial\Omega} U dx - F dt \leqslant 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}12)$$

（3）对每个充分光滑并当 $|x|+t$ 充分大时为零的负试验函数 φ，$\vec{U}$ 满足

$$-\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} U + \frac{\partial\varphi}{\partial x} F\right) dx dt$$
$$-\int_{-\infty}^\infty \varphi(x, 0) U(\vec{U}_0(x)) dx \leqslant 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}13)$$

见文献〔7〕。

例 对一维空气动力学守恒律，方程（2-4-1）中

$$\vec{U}=\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix} \qquad \vec{F}=\begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2+p \\ (e+p)u \end{pmatrix}$$

这里单位体积的能量 e 与 p，ρ 的关系是 $p=(\gamma-1)\left(e-\frac{\rho u^2}{2}\right)$，所定义的熵函数和熵通量是

$$U=-\rho S \qquad \widetilde{F}=-\rho u S \qquad (2\text{-}4\text{-}14)$$

其中 S 是第三节中的力学熵（注意此处的反号），见文献〔9〕。

以上熵函数、熵通量和熵条件的定义也可以推广到多维的情况。

对单个守恒律，$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0$，解的唯一性问题已完善解决。熵条件与激波条件（特征线相交）等价，并耗散消失条件$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{的解 } u_\varepsilon \to u\text{，当 } \varepsilon \to 0\right)$能保证熵条件。

对方程组守恒律，当所有特征场真正非线性，对于弱激波可证明熵条件与激波条件（同族特征线相交）等价，耗散消失条件也保证熵条件。对特征场或真正非线性或线性退化也有类似结论。但唯一性仅有一些结果，尚在研究之中。

对多维问题，特别对其它类型的问题，情况很复杂，有满足熵条件的非真实解，也有不满足熵条件的真实解。

在此提及这些内容为了说明计算间断解除了使用所谓的守恒型格式，还需从多方面保证其数值结果的可靠性。

第五节　空气动力学方程边界条件的提法

计算流体的另一大难题是边界条件的处理。这方面的研究，无论是偏微分方程本身还是它的差分近似，都远远落后于实际计算，而在实际流场计算中，如果边界条件提得不适当，那么计算可能不稳定，或数值结果近似错误的解，或在计算定常解时收敛很慢（收敛于正确或错误的解）。对边界条件要求：个数正确，且提法使初边值问题的解连续依赖于初边值。对实际边界（物面、自由面），边界条件可由物理背景决定。对开（open）边界，即计算的边界为从无穷区域切出的有限区域的边界，边界条件还应使问题“好比没有边界”，即无人为的边界层以及无人为的边界反射。

在此分析非线性偏微分方程对初边值小扰动的稳定性。对非线性偏微分方程（这里用一个空间，一个时间变量为例说明问题）

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\mathbf{A}(\vec{U})\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}=\vec{F}(x,\ t,\ \vec{U}) \qquad (2\text{-}5\text{-}1)$$

在给定初值和边界条件后，设有光滑解 $\vec{U}(x,\ t)$。它的小扰动 $\dot{\vec{U}}(x,\ t)$（这里和以后，上标 · 表示扰动量）满足所谓的第一变分方程，这是一个线性变系数方程

$$\frac{\partial \dot{\vec{U}}}{\partial t}+\mathbf{A}(\vec{U}(x,\ t))\frac{\partial \dot{\vec{U}}}{\partial x}=\vec{C}(x,\ t)\dot{\vec{U}} \qquad (2\text{-}5\text{-}2)$$

再局部常系数化并略去低次项，上式简化为

$$\frac{\partial \dot{\vec{U}}}{\partial t}+\mathbf{A}(\vec{U})\frac{\partial \dot{\vec{U}}}{\partial x}=0 \qquad (2\text{-}5\text{-}3)$$

此处 $\vec{U}$ 视为常向量。以下称方程（2-5-3）为“冻结系数”方程。为讨论方便，还经常把求解区域变换到右半空间，那么 $x=0$ 为

左边界．并设当 $x\to\infty$，$\vec{U}\to 0$ 足够快。

以下在半空间上，从方程（2-5-3）与相应的初始和边界条件出发，讨论其解对初边值小扰动的稳定性。这样的讨论对线性双曲型方程有严格的证明；对不完全抛物型方程也有较严格的根据．对非线性方程，这样简化的分析在一般情况下也有很好的参考价值。

本节考虑一个空间、一个时间变量的常系数双曲型方程组

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}=0 \qquad (2\text{-}5\text{-}4)$$

其中 $\vec{U}$ 是 m 维向量；$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times m$ 阶（常）矩阵。设有 p 个正特征值，见图 2-18，考虑它的初始条件

$$\vec{U}(x,\ 0)=\vec{f}(x) \quad x\geqslant 0 \qquad (2\text{-}5\text{-}5)$$

和在 $x=0$ 处的边界条件

$$\boldsymbol{E}\vec{U}(0,\ t)=\vec{g}(t),\quad t>0 \qquad (2\text{-}5\text{-}6)$$

式中　$\vec{f}$——m 维向量；

E——$p\times m$ 维（常）矩阵；

$\vec{g}$——p 维向量。

由双曲型方程的定义，$\boldsymbol{A}$ 可对角化

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}\Lambda\boldsymbol{L} \qquad \Lambda=\begin{pmatrix}\Lambda^{\mathrm{I}} & 0\\ 0 & \Lambda^{\mathrm{II}}\end{pmatrix},\quad \Lambda^{\mathrm{I}}>0\ \Lambda^{\mathrm{II}}\leqslant 0$$

令 $\vec{V}=\boldsymbol{L}\vec{U}$ 特征变量 $\vec{V}$ 满足特征关系

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}=0$$

按 Λ^{I} 和 Λ^{II}，现将 $\vec{V}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 分块，则得

$$\frac{\partial \vec{V}^{\mathrm{I}}}{\partial t}+\Lambda^{\mathrm{I}}\frac{\partial \vec{V}^{\mathrm{I}}}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \vec{V}^{\mathrm{II}}}{\partial t}+\Lambda^{\mathrm{II}}\frac{\partial \vec{V}^{\mathrm{II}}}{\partial x}=0$$

边界条件（2-5-6）可写为

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}\vec{V}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}^{I}\boldsymbol{R}^{I})\begin{pmatrix}\vec{V}^{I}\\ \vec{V}^{I}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}^{I}\vec{V}^{I}+\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}^{I}\vec{V}^{I}=\vec{g}(t)$$

(2-5-7)

当

$$\det(\boldsymbol{E}\boldsymbol{R}^{I})\neq 0 \qquad (2\text{-}5\text{-}8)$$

得如下形式的边界条件

$$\vec{V}^{I}(0,\ t)=\boldsymbol{S}\vec{V}^{I}(0,\ t)+\tilde{\vec{g}}(t) \qquad (2\text{-}5\text{-}9)$$

这里 $\vec{V}^{I}$ 是进入分量，$\vec{V}^{I}$ 是外出分量，而 $\boldsymbol{S}$ 是任意 $p\times(m-p)$ 维常矩阵，它给出反射规律，$\tilde{\vec{g}}(t)$ 给出外界影响。

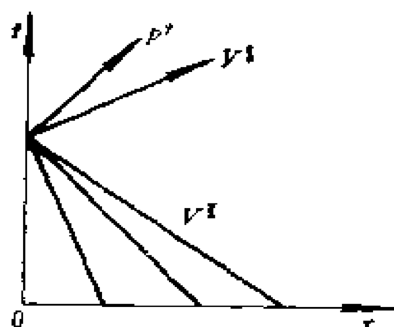


图2-18 双曲型方程的特征线（一个空间自变量）

沿特征线，特征关系可视为常微分方程，从常微分方程理论可得出初边值问题（2-5-1）～（2-5-6）的适定性：有唯一解并解连续依赖于给定的初边值，即有以下形式的“能量估计”

$$\|\vec{U}(x,\ t)\|\leqslant K(\|\vec{f}(x)\|+\|\vec{g}(t)\|)$$

其中 K 是一个不依赖于 $\vec{f}$ 和 $\vec{g}$ 的常数。

对非线性问题的分析，这个能量估计对应于式（2-5-3）有如下形式

$$\|\dot{\vec{U}}(x,\ t)\|\leqslant K(\|\dot{\vec{f}}(x)\|+\|\dot{\vec{g}}(t)\|)$$

特别当 $\vec{g}(t)$ 给定，$\dot{\vec{g}}(t)=0$，即由初边值的扰动而引起的解的扰动有如上的界。如 $\vec{U}$ 满足该形式的能量估计，则称边界条件是适当的。保证边界条件（2-5-6）适当的条件即为式（2-5-8）。

例 一维非定常欧拉方程也可写为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+\rho c^{2}\frac{\partial u}{\partial x}=0
\end{aligned} \qquad (2\text{-}5\text{-}10)$$

对应冻结系数方程，以上系数不变，但偏导数是对扰动量$\vec{U}=(\dot{\rho}, \dot{u}, \dot{p})'$的。现在看在$x=0$为亚声速进口时（$0<u<c$），边界条件为

$$\rho, \quad u \text{给定} \tag{2-5-11}$$

对应边界条件（2-5-6）的扰动边界条件是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{u} \\ \dot{p} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2-5-12}$$

这里

$$A=\begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho c^2 & u \end{pmatrix}$$

对应它的特征值

$$\lambda_1=u \quad \lambda_2=u+c \quad \lambda_3=u-c$$

的特征向量$\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$，$\vec{r}_3$组成

$$R=\begin{pmatrix} 1 & \rho/\sqrt{2}\,c & \rho/\sqrt{2}\,c \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & \rho c/\sqrt{2} & \rho c/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

对亚声速进口，$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，$\lambda_3<0$，对应式（2-5-7）有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \rho/\sqrt{2}\,c \\ 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \rho c/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho/\sqrt{2}\,c \\ -1/\sqrt{2} \\ \rho c\sqrt{2} \end{pmatrix}(v_3)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

得

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho/\sqrt{2}\,c \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} \rho/\sqrt{2}\,c \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}(v_3)$$

或对应式（2-5-9）有

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,\rho/c \\ 1 \end{pmatrix}(v_3)$$

因此对亚声速进口，边界条件（2-5-11）是适当的，并且如果 ρ 和 u 有小扰动，对应式（2-5-12）右边不为零，解的扰动也是有界的。

由此可见一维初边值问题的分析比较简单。对多维初边值问题的分析，情况大不一样，不能从常微分方程的理论直接得出结论。以下介绍这样问题的能量法。它的概念简单，可以用于各类方程，但是它仅给出充分条件，这往往过分严格。另外也将提及正则模态（normal mode）分析，它对双曲型方程给出充分及必要条件，它的理论复杂，使用时推导繁琐，有关研究都在发展之中。

第六节　对称双曲型方程组——能量法

考虑双曲型偏微分方程组

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+A\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}+B\frac{\partial \vec{U}}{\partial y}=0 \tag{2-6-1}$$

其中 A 和 B 是对称常矩阵。设求解区域为 Ω，边界为 $\partial\Omega$，定义

$$(\vec{U},\ \vec{V})=\iint_{\Omega}\vec{U}\cdot\vec{V}dxdy \tag{2-6-2}$$

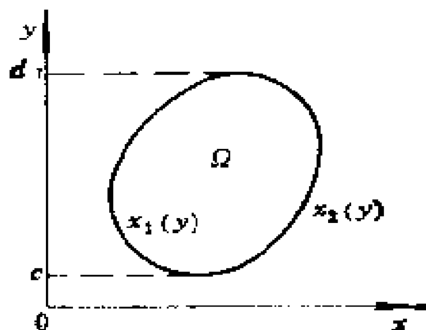


图2-19　求解区域

考虑$\|\vec{U}\|^2=(\vec{U},\ \vec{U})$的变化

$$\frac{d}{dt}(\vec{U},\ \vec{U})=2\left(\vec{U},\ \frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\right)=-2\left(\vec{U},\ \boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\right)-2\left(\vec{U},\ \boldsymbol{B}\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}\right)$$

因 $\boldsymbol{A}$ 对称，有

$$2\left(\vec{U},\ \boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\right)=2\left(\boldsymbol{A}\vec{U},\ \frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\right)=2\int_c^d\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\boldsymbol{A}\vec{U}\cdot\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}dxdy$$

见图 2-19，其中

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\boldsymbol{A}\vec{U}\cdot\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}dx=\boldsymbol{A}\vec{U}\cdot\vec{U}\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)}-\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\cdot\vec{U}dx$$

因 $\boldsymbol{A}$ 是常矩阵、所以

$$2\left(\vec{U},\ \boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\right)=\int_c^d\left(\boldsymbol{A}\vec{U}\cdot\vec{U}\Big|_{x_2(y)}-\boldsymbol{A}\vec{U}\cdot\vec{U}\Big|_{x_1(y)}\right)dy=\oint\boldsymbol{A}\vec{U}\cdot\vec{U}dy$$

同理

$$2\left(\vec{U},\ \boldsymbol{B}\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}\right)=-\oint\boldsymbol{B}\vec{U}\cdot\vec{U}dx$$

最后得

$$\frac{d}{dt}\|\vec{U}\|^2=-\oint\boldsymbol{A}\vec{U}\cdot\vec{U}dy-\boldsymbol{B}\vec{U}\cdot\vec{U}\cdot dx=-\oint\boldsymbol{A}_n\vec{U}\cdot\vec{U}ds$$

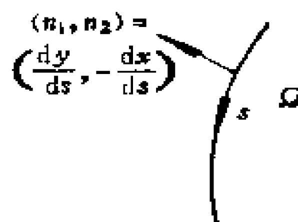


图2-20　求解区域的边界

其中

$$\boldsymbol{A}_n=n_1\boldsymbol{A}+n_2\boldsymbol{B}$$

见图 2-20。当

$$\oint\boldsymbol{A}_n\vec{U}\cdot\vec{U}ds\geqslant0 \qquad (2\text{-}6\text{-}3)$$

或对左边界 $x=0$，当

$$\int A\vec{U}\cdot\vec{U}dy\leqslant 0 \tag{2-6-4}$$

有 $\frac{d}{dt}\|\vec{U}\|\leqslant 0$，或

$$\|\vec{U}(x,\ y,\ t)\|\leqslant\|\vec{U}(x,\ y,\ 0)\|$$

即式（2-6-4）是边界条件适当的充分条件。

虽然空气动力学方程的有关矩阵是非对称的，但可对称化。在此设 R 是对称正定矩阵并且 $R\boldsymbol{A}$ 和 $R\boldsymbol{B}$ 对称，把 R 写为 $(\boldsymbol{T}^{-1})'(\boldsymbol{T}^{-1})$，这等价于

$$A=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T},\quad B=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}$$

对称，以 R 左乘方程（2-6-1）得对称双曲型方程组

$$R\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+R\boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}+R\boldsymbol{B}\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}=0 \tag{2-6-5}$$

即

$$\boldsymbol{T}^{-1}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+A\boldsymbol{T}^{-1}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+B\boldsymbol{T}^{-1}\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}=0$$

以 $\vec{W}=\boldsymbol{T}^{-1}\vec{U}$ 为变量，这就是形式为（2-6-1）的对称双曲型方程组。现在式（2-6-3）为

$$\oint A_n\vec{W}\cdot\vec{W}ds=\oint\boldsymbol{T}^{-1}A_n\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\vec{U}\boldsymbol{T}^{-1}\vec{U}ds\geqslant 0$$

即

$$\oint RA_n\vec{U}\cdot\vec{U}ds\geqslant 0 \tag{2-6-6}$$

式（2-6-6）在左边界 $x=0$ 处有以下形式

$$\int R\boldsymbol{A}\vec{U}\cdot\vec{U}dy\leqslant 0 \tag{2-6-7}$$

现在给出在左边界 $x=0$ 处满足式（2-6-4）和（2-6-7）的条件。当 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，它的右特征向量组成的矩阵 $\boldsymbol{R}$ 是正交阵，那么 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{R}^{-1}=\boldsymbol{R}'$。每点让对应正特征值的 $\vec{l}_i\vec{U}=0$，那对应一维问题的特征变量

$$\vec{l}_i\vec{U}=\vec{U}\cdot\vec{r}_i=0,\ \text{对应}\ \lambda_i>0 \tag{2-6-8}$$

就满足式（2-6-4）。事实上，令 $\vec{U}=\sum_{i=1}^{m} c_i\vec{r}_i$，设式（2-6-8）中 $i=1\cdots p$，那么

$$A\dot{U}\cdot\vec{U}=\sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i\vec{r}_i\cdot\vec{U}=\sum_{i=p+1}^{m}\lambda_i c_i^2\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i\leqslant 0$$

当 RA 是对称矩阵，知 A 的右特征向量是 $T^{-1}r_i$，让 $\vec{W}\cdot T^{-1}\vec{r}_i=T^{-1}\vec{U}\cdot T^{-1}\vec{r}_i=R\vec{U}\cdot\vec{r}_i$ 对应式（2-6-8）有

$$R\dot{U}\cdot\vec{r}_i=0\text{，对应 }\lambda_i>0 \tag{2-6-9}$$

式（2-6-8）和（2-6-9）分别是式（2-6-4）和（2-6-7）的充分条件，而式（2-6-4）和（2-6-7）又是边界条件适当的充分条件。

例 1　二维非定常等熵流动方程的对应冻结系数方程是

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \hat{\rho}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u & 0 & c\\ 0 & u & 0\\ c & o & u\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \hat{\rho}\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}v & 0 & 0\\ 0 & v & c\\ 0 & c & v\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \hat{\rho}\end{pmatrix}=0$$

其中 $\hat{\rho}=\frac{c}{\rho}\dot{\rho}$。$A$ 的特征值 λ 和对应右特征向量是

$$\lambda_1=u\qquad \lambda_2=u+c\qquad \lambda_3=u-c$$

$$\vec{r}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad \vec{r}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad \vec{r}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

在此给出

$$A\dot{U}\cdot\dot{U}=u(\dot{u}^2+\dot{v}^2+\hat{\rho}^2)+2c\hat{\rho}\dot{u} \tag{2-6-10}$$

当左边是亚声速进口边界，$0<u<c$，λ_1 和 $\lambda_2>0$，应给两个边界条件，可取

$$\dot{v}=0\text{，即 }v\text{ 给定（对应 }\lambda_1>0\text{）}$$

$$\dot{u}+\frac{c}{\rho}\dot{\rho}=0，\text{即 } u+\frac{2}{\gamma-1}c\text{ 给定}^{●}\text{（对应 }\lambda_2>0\text{）}$$

当左边是亚声速出口边界，$0<-u<c\cdots$，$\lambda_2>0$，应给一个边界条件，可取

$$u+\frac{2}{\gamma-1}c\text{ 给定（对应 }\lambda_2>0\text{）}$$

或者直接从式（2-6-10）取以下之一

$$\dot{u}=0，\text{即 } u \text{ 给定}$$

$$\dot{\rho}=0，\text{即 } \rho \text{ 给定或 } p \text{ 给定}$$

如果左边界是固壁，$u=0$，有 $\lambda_2>0$，应给一个边界条件，直接从式（2-6-10）可见

$$u=0 \quad \text{对应 } \dot{u}=0$$

是适当的边界条件。

例 2　二维非定常欧拉方程可写为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+(\gamma-1)T\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0
\end{aligned}\right\} \tag{2-6-11}$$

其中 $p=\rho RT$，它可简单地用左乘

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \dfrac{R}{(\gamma-1)T} & \\ & & & \dfrac{RT}{\rho^2} \end{pmatrix}$$

● $p=A\rho^{\gamma}$，A 为常数，$c^2=\frac{dp}{d\rho}\Rightarrow dc=\frac{\gamma-1}{2}\frac{c}{\rho}d\rho$

对称化，如

$$
\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} u & 0 & R & \dfrac{RT}{\rho} \\ 0 & u & 0 & 0 \\ (\gamma-1)T & 0 & u & 0 \\ \rho & 0 & 0 & u \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{RA}=\begin{pmatrix} u & 0 & R & \dfrac{RT}{\rho} \\ 0 & u & 0 & 0 \\ R & 0 & \dfrac{Ru}{(\gamma-1)T} & 0 \\ \dfrac{RT}{\rho} & 0 & 0 & \dfrac{RTu}{\rho^2} \end{pmatrix}
$$

$\boldsymbol{A}$的特征值和对应右特征向量是

$$
\lambda_1=u \quad \lambda_2=u \quad \lambda_3=u+c \quad \lambda_4=u-c
$$

$$
\vec{r}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma/\rho \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\vec{r}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ (\gamma-1)T/c \\ \rho/c \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -(\gamma-1)T/c \\ -\rho/c \end{pmatrix}
$$

在此给出

$$
\boldsymbol{RA}\vec{U}\cdot\vec{U}=u\left[\dot{u}^2+\dot{v}^2+\frac{RT}{\gamma-1}\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2+RT\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2\right]+\frac{2}{\rho}\dot{p}\dot{u} \qquad (2\text{-}6\text{-}12)
$$

当左边界为亚声速进口，$0<u<c$，应给出三个边界条件，可取

$$
\dot{v}=0\text{、即 } v \text{ 给定（对应 } \lambda_1>0\text{）}
$$

$\frac{\dot{T}}{T}-(\gamma-1)\frac{\dot{\rho}}{\rho}=0$ 即 $\log\left(\frac{T}{\rho^{\gamma-1}}\right)$ 给定，也就是熵 S 给定（对应 $\lambda_2>0$）

$\dot{u}+\frac{R}{c}\dot{T}+\frac{RT}{\rho c}\dot{\rho}=0$，即 $u+\frac{2}{\gamma-1}c$ ● 给定（对应 $\lambda_3>0$）

当左边界为亚声速出口，$0<-u<c$，应给一个边界条件，可取

$$u+\frac{2}{\gamma-1}c \text{ 给定（对应 } \lambda_3>0\text{）}$$

或者直接从式（2-6-12）取以下之一

u 给定

p 给定

对固壁，如上例，边界条件为 $u=0$。

第七节　不完全抛物型方程组——能量法

现在给出不完全抛物型方程组，也称为耦合双曲-抛物型方程组

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}+\boldsymbol{B}\frac{\partial\vec{U}}{\partial y}=\boldsymbol{D}^{xx}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2}$$

$$+\boldsymbol{D}^{xy}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x\partial y}+\boldsymbol{D}^{yy}\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial y^2}\qquad(2\text{-}7\text{-}1)$$

的定义：设矩阵按 $m=d+(m-d)$ 分块如下

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}^{xx}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_{11}^{xx} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}^{xy}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_{11}^{xy} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}^{yy}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{D}_{11}^{yy} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

● 用 λ_2 条件，$\dot{u}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{R}{C}\dot{T}=0$，又 $c^2=\gamma RT\Rightarrow dT=\frac{2c}{\gamma R}dc$

其中 D_{11}^{xx}，D_{11}^{xy}，D_{11}^{yy} 为 $d\times d$ 维矩阵，A_{22}，B_{22} 为 $(m-d)\times(m-d)$ 维矩阵。对应地分块 $\vec{U}=(\vec{U}^1,\ \vec{U}^{\text{I}})'$。如果方程

$$\frac{\partial\vec{U}^1}{\partial t}=D_{11}^{xx}\frac{\partial^2\vec{U}^1}{\partial x^2}+D_{11}^{xy}\frac{\partial^2\vec{U}^1}{\partial x\partial y}+D_{11}^{yy}\frac{\partial^2\vec{U}^1}{\partial y^2}\qquad(2\text{-}7\text{-}2)$$

为抛物型，而方程

$$\frac{\partial\vec{U}^{\text{I}}}{\partial t}=A_{22}\frac{\partial\vec{U}^{\text{I}}}{\partial x}+B_{22}\frac{\partial\vec{U}^{\text{I}}}{\partial y}=0\qquad(2\text{-}7\text{-}3)$$

为严格双曲型，那么方程（2-7-1）称为不完全抛物型。如果对任意实数 l_x 和 l_y，方程

$$\det(l_x^2D_{11}^{xx}+l_xl_yD_{11}^{xy}+l_y^2D_{11}^{yy}-\sigma I)=0\qquad(2\text{-}7\text{-}4)$$

的所有根 σ 有正的实部；则称方程（2-7-2）为抛物型；以下不妨设 $l_x^2+l_y^2=1$。

例　二维非定常纳维—斯托克斯方程可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{Re}\frac{1}{\rho}\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+(\mu+\lambda)\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$=\frac{1}{Re}\frac{1}{\rho}\left[\mu\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+(\mu+\lambda)\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+(\gamma-1)T\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\gamma k}{ReP_r}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}\right)\qquad(2\text{-}7\text{-}5)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

式中　$p=\rho RT$；

正常数 Re——雷诺数；

P_r——普朗特（Prandtl）数；

k——导热系数；

μ 和 λ ——粘性系数，满足 $3\lambda+2\mu=0$（第六节例 2 对应欧拉方程即右边为零）。

这里 $d=3$，故有

$$\boldsymbol{D}_{11}^{xx}=\frac{1}{Re\rho}\begin{pmatrix}2\mu+\lambda & 0 & 0\\ 0 & \mu & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\gamma k}{Pr}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_{11}^{xy}=\frac{1}{Re\rho}\begin{pmatrix}0 & \mu+\lambda & 0\\ \mu+\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_{11}^{yy}=\begin{pmatrix}\mu & 0 & 0\\ 0 & 2\mu+\lambda & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\gamma k}{Pr}\end{pmatrix}$$

式（2-7-4）即

$$\det\begin{pmatrix}l_x^2(2\mu+\lambda)+l_y^2\mu-\sigma & l_xl_y(\mu+\lambda) & 0\\ l_xl_y(\mu+\lambda) & l_x^2\mu+l_y^2(2\mu+\lambda)-\sigma & 0\\ 0 & 0 & (l_x^2+l_y^2)\dfrac{\gamma k}{Pr}-\sigma\end{pmatrix}=0$$

化简为

$$\left(\frac{\gamma k}{Pr}-\sigma\right)[\sigma^2-(3\mu+\lambda)\sigma+2\mu^2+\mu\lambda]=0$$

得

$$\sigma_1=\frac{\gamma k}{Pr}\quad \sigma_2=\mu\quad \sigma_3=2\mu+\lambda$$

都是正数。从而对应的式（2-7-2）是抛物型的。对应式（2-7-3），$m-d=1$，是单个（严格）双曲型方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}=0 \qquad (2\text{-}7\text{-}6)$$

因此非定常可压纳维—斯托克斯方程（2-7-5）是不完全抛物型方程。

现在讨论不完全抛物型方程的边界条件，它的形式为

$$P\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}+Q\vec{U}=\vec{g}(t),$$

$$P=\begin{pmatrix}P_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{21} & Q_{22}\end{pmatrix} \qquad (2\text{-}7\text{-}7)$$

其中 P_{11} 的秩$\leqslant d$。在左边界 $x=0$ 处，线性无关的个数应是 $d+\tilde{p}$，其中 $\tilde{p}$ 是 A_{22} 的正特征值个数，理由说明如下。

先看一维问题

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+A\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}=D\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2},\quad 0\leqslant x<\infty,\quad t>0 \qquad (2\text{-}7\text{-}8)$$

其中 A 和 D 对称并

$$D=\begin{pmatrix}D_{11} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\qquad D_{11}(d\times d)>0 \qquad (2\text{-}7\text{-}9)$$

即 D_{11} 正定如上节定义$(\vec{U},\ \vec{V})=\int_0^\infty\vec{U}\cdot\vec{V}dx$ 得

$$\frac{d}{dt}(\vec{U},\ \vec{U})=-2\left(\vec{U},\ A\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\right)+2\left(\vec{U},\ D\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2}\right)$$

而

$$\left(\vec{U},\ D\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2}\right)=\int_0^\infty D\vec{U}\cdot\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2}dx$$

$$=D\vec{U}\cdot\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty D\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}dx$$

$$\leqslant-D\vec{U}\cdot\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\Big|_{x=0}$$

在左边界 $x=0$，对应式（2-6-4）的一维条件 $A\vec{U}\cdot\vec{U}\leqslant 0$，在此是

$$A\vec{U}\cdot\vec{U}-2D\vec{U}\cdot\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\leqslant 0 \qquad (2\text{-}7\text{-}10)$$

可以写为

$$\begin{pmatrix} A & -D \\ -D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{U} \\ \frac{\partial\vec{U}}{\partial x} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \vec{U} \\ \frac{\partial\vec{U}}{\partial x} \end{pmatrix}=C\vec{W}\cdot\vec{W}\leqslant 0$$

对应以上矩阵C的每个正特征值，可以给出一个如式（2-6-8)的边界条件（实际并不这样给，在此说明边界条件个数)，而正特征值的个数正是$d+\tilde{p}$（证明略）。

在很多实际问题中，粘性系数（二阶导数项系数，用ε代表它的大小）是很小的。要求粘性流方程的边界条件不但适当，而且当$\varepsilon\to 0$，对无粘流方程也适用。这样在开边界上就不会出现人为的边界层。为此可以从无粘流方程的适当边界条件出发，把它修正为对应粘性流方程的边界条件，使其个数正确并满足式(2-7-10)。当需要的条件个数为m，可以如下实现：设式(2-7-8)中$A=R\Lambda R^{-1}$，这里$L=R^{-1}=R'$，以R'左乘方程再令$\vec{V}=R'\vec{U}$，得

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}=R'DR\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial x^2}$$

对应式（2-7-10)，现在要

$$\begin{aligned}\Lambda\vec{V}\cdot\vec{V}&-2R'DR\vec{V}\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\\ &=\Lambda\vec{V}\cdot\vec{V}-2R'DR\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\cdot\vec{V}\leqslant 0\end{aligned}$$

$$(2\text{-}7\text{-}11)$$

对应无粘流，对应$\lambda_i>0$，让特征变量$V_i=\vec{U}\cdot\vec{r}_i=0$，

$$(2\text{-}7\text{-}12)$$

这里$i=1\cdots p$；对于其余i，让

$$\left(R'DR\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\right)_i=\left(R'D\frac{\partial\vec{U}}{\partial x_i}\right)_i=0 \qquad (2\text{-}7\text{-}13)$$

且$i=p+1\cdots m$。这样式（2-7-11）成立，显然式（2-7-12）

保证它在左边的第一点积$\leqslant 0$；同时保证第二点积的前 p 项为零，式（2-7-13）保证后 $m-p$ 项为零。

对多维问题，在左边界 $x=0$，式（2-7-10）、（2-7-12）和（2-7-13）逐点成立保证边界条件适当。

如对例中的二维非定常纳维—斯托克斯方程左乘 R（见上节例 2），则有关矩阵都成为对称的。式（2-7-10）即为

$$
\begin{aligned}
&R\mathbf{A}\dot{U}\cdot\dot{U}-2R\mathbf{D}^{**}\dot{U}\cdot\frac{\partial\dot{U}}{\partial x}=u\Big[\dot{u}^2+\dot{v}^2\\
&\qquad+\frac{RT}{\gamma-1}\left(\frac{\dot{T}}{T}\right)^2+RT\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2+\frac{2}{\rho}\dot{p}\dot{u}\\
&\qquad-\frac{2}{\mathrm{Re}}\Big[(2\mu+\lambda)\dot{u}\frac{\partial\dot{u}}{\partial x}+\mu\dot{v}\frac{\partial\dot{v}}{\partial x}\\
&\qquad+\frac{\gamma kR}{Pr(\gamma-1)T}\dot{T}\frac{\partial\dot{T}}{\partial x}\Big]\leqslant 0
\end{aligned}
\qquad (2\text{-}7\text{-}14)
$$

在此式（2-7-1）中的 $d=3$，$\mathbf{A}_{22}=u$；因此在左边界 $x=0$ 处，对进口，$u>0$，需要 4 个边界条件；对出口，$u<0$，需要 3 个边界条件。以下列出各种情况需要的边界条件个数和可采用的具体形式：

超声速进口，$u>c>0$

无粘或有粘——4 个，全部变量给出

超声速出口，$-u>c>0$

无粘——0 个

有粘——3 个，$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial x}$和$\frac{\partial T}{\partial x}$给定

对应的$\frac{\partial\dot{u}}{\partial x}=0$，$\frac{\partial\dot{v}}{\partial x}=0$，$\frac{\partial\dot{T}}{\partial x}=0$，满足式（2-7-14）。

亚声速进口，$0<u<c$，

无粘——3 个，见上节例 2

有粘——4 个，$(2\mu+\lambda)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{k}{Pr}\sqrt{\frac{\gamma R}{T}}\frac{\partial T}{\partial x}$给定

这里用了式(2-7-13)，其中$\left(R'RD^{xx}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)_4=(2\mu+\lambda)\frac{\partial u}{\partial x}$

$-\frac{k}{Pr}\sqrt{\frac{\gamma R}{T}}\frac{\partial T}{\partial x}$，$2dc=\sqrt{\frac{\gamma R}{T}}dT$

亚声速出口，$0<-u<c$，

无粘——1个，见上节例2

有粘——3个，u、$\frac{\partial v}{\partial x}$和$\frac{\partial T}{\partial x}$给定

对应的$\dot{u}=0$，$\frac{\partial \dot{v}}{\partial x}=0$，$\frac{\partial \dot{T}}{\partial x}=0$，显然满足式(2-7-14)。

固壁，$u=0$

无粘——1个，$u=0$

有粘——3个，$u=0$，v和T给定

对应的$\dot{u}=0$，$\dot{v}=0$，$\dot{T}=0$，显然满足式（2-7-14)。

更仔细地分析式（2-7-14)也可以导出其它适当的边界条件。但是式（2-7-14）本身就过分严格。正则模态法给出的条件基本上是充分和必要的。下一节对它做简单的介绍。

第八节　双曲型方程组——正则模态法

考虑以下右半平面上的严格或对称双曲型方程的初边值问题

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}=A\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}+B\frac{\partial \vec{U}}{\partial y}+\vec{F} \qquad (2-8-1)$$

$$\vec{U}(x,\ y,\ 0)=\vec{f}(x,\ y) \quad x\geqslant 0,\ -\infty<y<\infty \qquad (2-8-2)$$

$$E\vec{U}(0,\ y,\ t)=\vec{g}(t,\ y) \quad t>0,\ -\infty<y<\infty \qquad (2-8-3)$$

这里设A和B为常矩阵，且A的特征值有l个（λ_1，…，λ_l）为负，有$m-l$个（λ_{l+1}，…λ_m）为正。注意本节空间偏导数项放在等号右边，这是为了与有关参考文献（如[12、13]）一致。现

在讨论初边值问题（2-8-1）～（2-8-3）的适定性，最后再把它做为冻结系数问题与有关非线性方程联系起来。

首先给出边界条件适定的必要条件，为此可考虑 $F=0$，$\vec{g}=0$ 的特殊情况

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}=A\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}+B\frac{\partial \vec{U}}{\partial y} \tag{2-8-4}$$

$$\vec{U}(x,\ y,\ 0)=\vec{f}(x,\ y) \tag{2-8-5}$$

$$E\vec{U}(0,\ y,\ t)=0 \tag{2-8-6}$$

和如下形式的解

$$\vec{U}=e^{i\omega y+st}\vec{\phi}(x)\quad \omega\text{为实数},\quad s=\eta+i\xi,\quad \eta=Res>0 \tag{2-8-7}$$

把它代入式（2-8-4）～（2-8-6），则归结为求常微分方程特征值问题。对于给定的 ω 和 s

$$s\vec{\phi}(x)=A\frac{d\vec{\phi}}{dx}+i\omega B\vec{\phi}(x) \tag{2-8-8}$$

$$E\vec{\phi}(x)=0 \tag{2-8-9}$$

$$\vec{\phi}\in L^2(0,\ \infty) \tag{2-8-10}$$

即 $\vec{\phi}$ 趋于 0 足够快使它平方可积。这里 s（$Res>0$）是特征值（对应非零特征函数 $\vec{\phi}(x)$）。对常微分方程试解

$$\vec{\phi}(x)=e^{\kappa x}\vec{q}\quad \kappa=\rho+i\sigma \tag{2-8-11}$$

得代数特征值问题

$$M(\omega,\ s)\vec{q}=\kappa\vec{q} \tag{2-8-12}$$

$$M(\omega,\ s)=A^{-1}(sI-i\omega B) \tag{2-8-13}$$

这里 κ 是特征值（对应非零特征向量解 $\vec{q}$）。

对 $Res>0$，$M(\omega,\ s)$ 有 l 个特征值 κ，$Re\kappa<0$ 有 $m-l$ 个特征值，$Re\kappa>0$，（对应 A的 l 个负和 $m-l$ 个正特征值），见参考文献[13]。记负实部的特征值为 $\kappa_1\cdots\kappa_l$，对应特征向量 $\vec{q}_1\cdots\vec{q}_l$；为叙述简单，这里假设它们是线性无关的。从式（2-8-11）和（2-8-10）可知，一般

$$\vec{\phi}(x)=\sum_{i=1}^{l} c_i e^{\kappa_i x}\vec{q}_i$$

那么

$$\vec{\phi}(0)=\sum_{i=1}^{l} c_i\vec{q}_i=(\vec{q}_1\cdots\vec{q}_l)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix}=\mathbf{Q}^{\mathrm{I}}\vec{C}$$

代入式（2-8-9）得

$$\mathbf{N}(\omega,\ s)\vec{C}=0 \tag{2-8-14}$$

$$\mathbf{N}(\omega,\ s)=EQ^{\mathrm{I}} \tag{2-8-15}$$

其中 $\mathbf{N}(\omega,\ s)$ 是一个 $l\times l$ 矩阵。

当 $\det\mathbf{N}(\omega,\ s)\neq 0$，$\vec{C}=0$，特征值问题（2-8-8）～（2-8-10）只有零解 $\vec{\phi}(x)$，从而 s（$Re\, s>0$）不是特征值。当 $\det\mathbf{N}(\omega,\ s)=0$，有 $\vec{C}\neq 0$，那么特征值问题（2-8-8）～（2-8-10）有非零解 $\vec{\phi}(x)$，从而 s（$Re\, s>0$）是特征值；并初边值问题（2-8-4）～（2-8-6）有指数解，或模态

$$\vec{U}=e^{\kappa x+i\omega y+st}\vec{q} \tag{2-8-16}$$

初边值问题（2-8-4）～（2-8-6）适定的一个必要条件是

$$\det\mathbf{N}(\omega,s)\neq 0\quad \text{对于所有实}\,\omega\,\text{和所有}\,s,Re\, s>0 \tag{2-8-17}$$

其实只需考虑满足 $\omega^2+|s|^2=1$ 的所有 ω 和 s，$Re\, s>0$，见文献〔13〕。

一般情况下，式（2-8-7）对应这样的变换：
对应对偶变量 ω，y 作傅里叶（Fourier）变换，对应对偶变量 s（$\mathrm{Re}\, s>0$），t 做拉普拉斯（Laplace）变换，那么 $\vec{\phi}(x)$ 即为 $\vec{U}$ 的变换 $\hat{\vec{U}}(x)$。式（2-8-15）中的 $\mathbf{Q}^{\mathrm{I}}$ 来自 $\mathbf{Q}$ 的分块，首先有

$$\mathbf{Q}^{-1}\boldsymbol{M}\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}^{\mathrm{I}} & \\ & \boldsymbol{M}^{\mathrm{II}}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{I}}$为 $l\times l$ 维矩阵，其特征值 κ 满足 $Re\,\kappa<0$；$\boldsymbol{M}^{\mathrm{II}}$ 为 $(m-l)\times(m-l)$ 维矩阵，其特征值 κ 满足 $Re\kappa>0$。对应 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{I}}$ 和

M^{I}，Q 分块为 Q^{I} 和 Q^{I}；$\vec{V}=Q^{-1}\vec{U}$分块为$\vec{V}^{\text{I}}$和 $\vec{V}^{\text{I}}$．其中$\vec{V}^{\text{I}}$是进入分量，$\vec{V}^{\text{I}}$是外出分量，见文献〔13〕。那么式(2-8-3)变换为 $E\vec{U}(0)=\vec{g}$，或

$$EQ\vec{V}(0)=EQ^{\text{I}}\vec{V}^{\text{I}}(0)+EQ^{\text{I}}\vec{V}^{\text{I}}(0)=\vec{g} \qquad (2\text{-}8\text{-}18)$$

写为

$$N(\omega,\ s)\vec{V}^{\text{I}}(0)=P(\omega,\ s)\vec{V}^{\text{I}}(0)+\vec{g} \qquad (2\text{-}8\text{-}19)$$

$$N(\omega,\ s)=EQ^{\text{I}} \qquad (2\text{-}8\text{-}20)$$

可见需要 $\det N(\omega,\ s)\neq 0$ 一致成立，当 $Re\,s\to 0$，使进入分量$\vec{V}^{\text{I}}(0)$可以从外出分量$\vec{V}^{\text{I}}(0)$和边界值$\vec{g}$一致求出。如果 $\det N(\omega,s)\to 0$，当 $Re\,s\to 0$，那么相对$\vec{V}^{\text{I}}(0)$和$\vec{g}$，$\vec{V}^{\text{I}}(0)$增大，对高频波傅里叶分量较大对应函数失去光滑性(见文献〔13〕)。

加强必要条件(2-8-17)，使 $Re\,s=0$ 时亦成立，则得到初边值问题(2-8-1)～(2-8-3)适定的充分(及必要)条件(见文献〔12〕和〔13〕)

$$\det N(\omega,\ s)\neq 0 \text{ 对于满足 } \omega^2+|s|^2=1 \text{ 的所有实}\omega \text{ 和所有 } s,\ Re\,s\geqslant 0 \qquad (2\text{-}8\text{-}21)$$

现在把正则模态分析应用于空气动力学方程。

例 1 对二维非定常等熵流动方程，已有其冻结系数方程(见第六节例 1)，实际分析时，直接把式(2-8-16)代入方程(2-8-4)得出

$$(sI-\kappa A-i\omega B)\vec{q}=0 \qquad (2\text{-}8\text{-}22)$$

从它可求得 $M(\omega,\ s)$ 的特征值 κ 和特征向量 $\vec{q}$。在此得出

$$\begin{pmatrix} s+\kappa u+i\omega v & 0 & \kappa c \\ 0 & s+\kappa u+i\omega v & i\omega c \\ \kappa c & i\omega c & s+\kappa u+i\omega v \end{pmatrix}\vec{q}=0$$

从以上行列式为 0，得

$$s+\kappa u+i\omega v=0\to\kappa=\kappa_1 \quad \vec{q}=\begin{pmatrix}-i\omega\\ \kappa_1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$(s+\kappa u+i\omega v)^2-c^2(\kappa^2-\omega^2)=0\rightarrow\kappa=\kappa_2$$

$$\vec{q}=\begin{pmatrix}-\kappa_2 c\\ -i\omega c\\ s+\kappa_2 u+i\omega v\end{pmatrix}$$

对 $\kappa=\kappa_3$ 类推。

当左边 $x=0$ 为亚声速出口边界时，A 有一个特征值$-(u-c)<0$。$Re\,s>0$，知 M 有一个特征值 κ，$Re\,\kappa<0$．记为 κ_2(对 $u<0$，$Res>0$)。用能量法得出应给的一个边界条件可以是 $\dot{u}+\frac{c}{\rho}\dot{\rho}=0$．现在讨论边界条件

$$\alpha\dot{u}+\frac{c}{\rho}\dot{\rho}=\dot{g},\qquad \alpha>\frac{u}{c}$$

(对应于 $\alpha u+\frac{2}{\gamma-1}c=g$)。这种情况下．

$$N(\omega,\ s)=(\alpha,\ 0,\ 1)\begin{pmatrix}-\kappa_2 c\\ -i\omega c\\ s+\kappa_2 u+i\omega v\end{pmatrix}$$

$$=s+i\omega v+(u-\alpha c)\kappa_2$$

对 Re $s>0$，以上的第一和第三项的实部都大于零，因此$N(\omega,s)\neq 0$，即满足冻结系数问题适定的必要条件式（2-8-17)。对 $Re\,s=0$，在低速流$\sqrt{u^2+v^2}/c\rightarrow 0$ 的情况下，可证明$N(\omega,s)\neq 0$，从而满足适定性的充分条件式（2-8-21)。

$Re\,s=0$ 情况在一般问题适定性的讨论中也是最困难的部分．这里给出以下结果．

例 2　二维不定常欧拉方程，即式（2-6-11)。对亚音速进口．我们用能量法已导出边界条件：u，S，$u+\frac{2c}{\gamma-1}$ 给定．现在用正则模态法可证明边界条件 v、u 或 p、S 给定，导致不适定的初边值问题，而边界条件 u、v、ρ 给定是适当的。

注意：$\omega=0$，$M(\omega,\ s)=sA^{-1}$，那么$Q=R$，其中 R 是使 A 对角化的矩阵，并 $Q^{I}=R^{I}$，$Q^{II}=R^{II}$。由定义，$\vec{C}$是对应

$\vec{U}$ 的。左乘$Q^{-1}=R^{-1}$可知$\vec{v}$对应$\vec{v}$。并$\vec{v}^{I}$对应v_{I}，$\vec{v}^{I}$对应$\vec{v}^{I}$。所以式（2-8-18）对应

$$ER^{I}\vec{v}^{I}(0)=-ER^{I}\vec{v}^{I}(0)+\delta$$

从 $\det N(0,s)=\det(ER^{I})\neq 0$ 知边界条件必能写为式(2-5-9)形式，在此

$$\vec{v}^{I}(0,\ y,\ t)=S\vec{v}^{I}(0,\ y,\ t)+\vec{g}(t)$$

其中 $\vec{v}^{I}$ 和 $\vec{v}^{I}$ 分别为对应的一维问题的进入和外出特征变量。对一维问题矩阵 S 可以是任意的，但对多维问题，S 不能是任意的。$\det N(\omega,\ s)\neq 0$ 是对其它模态（$\omega=0$，法向模态）增加了条件。

第九节　无反射边界条件

第五节开头提到，对于开边界，边界条件的提法应使求解域"好比没有边界"，在第七节中涉及到无人为的边界层问题。本节涉及无人为的边界反射问题，即所谓的无反射边界条件(nonreflecting, absorbing, 或 radiating boundary condition)。这里为了简单，采用平面波解引进这个概念，不深入讨论，否则将牵涉拟微分算子，超出本书的范围。

对一维问题，无反射边界条件很简单：式（2-5-9）中 $S=0$，即在 $x=0$ 处进入特征变量 $\vec{v}^{I}$ 给定；当讨论冻结系数方程时$\vec{v}^{I}=0$，这样计算误差$\vec{v}^{I}$不被反射回求解区域内。

对二维问题，考虑齐次方程（2-8-4），对 y 和 t 作傅里叶变换，得变换空间中的微分方程为

$$\frac{\partial\hat{U}}{\partial x}=M(\omega,\ i\xi)\hat{U} \qquad (2\text{-}9\text{-}1)$$

$$M(\omega,\ i\xi)=iA^{-1}(\xi I-\omega B) \qquad (2\text{-}9\text{-}2)$$

也可以直接把平面波解

$$\vec{U}=e^{i(\sigma x+\omega y+\xi t)}\vec{q} \qquad (2\text{-}9\text{-}3)$$

代入式（2-8-4）得 $i\xi\vec{q}=i\sigma\boldsymbol{A}\vec{q}+i\omega\boldsymbol{B}\vec{q}$，它可以写为

$$\boldsymbol{M}(\omega,\ i\xi)\vec{q}=i\sigma\vec{q}$$

或者写为

$$(\xi\boldsymbol{I}-\sigma\boldsymbol{A}-\omega\boldsymbol{B})\vec{q}=0$$

从后者可知对非零解有

$$\det(\xi\boldsymbol{I}-\sigma\boldsymbol{A}-\omega\boldsymbol{B})=0$$

可见（σ，ω，ξ）是方程（2-8-4）特征面的法向量。

在此讨论 $\omega=0$ 的情况，即法向入射波，这只对应无反射边界条件的第一近似。当 $\omega=0$，$\boldsymbol{M}(0,\ i\xi)=i\xi\boldsymbol{A}^{-1}$，那么它可以对角化如下

$$\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}=i\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}} & 0\\ 0 & \boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 为对角化 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵；$\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$ 为 $l\times l$ 维的对角阵，对角元 $\sigma<0$，当 $\xi>0$（对应 $\boldsymbol{A}$ 的 l 个负特征值）；L^{II}为（$m-l$）×（$m-l$）维的对角阵，对角元 $\sigma>0$，当 $\xi>0$（对应 A 的 $m-l$ 个正特征值）。令 $\hat{v}=\boldsymbol{R}^{-1}\hat{U}$，对应 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{I}}$ 和 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{II}}$ 分块 $\hat{v}$ 为 $\hat{v}^{\mathrm{I}}$ 和 $\hat{v}^{\mathrm{II}}$。在左边界 $x=0$，$\vec{\hat{v}}^{\mathrm{I}}$ 为进入分量，因为对 $\xi>0$，$\sigma<0$，特征面法向量（σ，ω，ξ）向外，那么特征面向内，同理 $\hat{v}^{\mathrm{II}}$ 为外出分量。无反射边界条件是进入分量为 0，即

$$\vec{\hat{v}}^{\mathrm{I}}(0)=0 \tag{2-9-4}$$

按定义 $\vec{\hat{U}}$ 对应 U，可知 $\vec{\hat{v}}$ 对应 $\vec{v}$，并 $\vec{\hat{v}}^{\mathrm{I}}$ 对应 $\vec{v}^{\mathrm{I}}$，所以式(2-9-4)对应

$$\vec{v}^{\mathrm{I}}(0,\ y,\ t)=0$$

当讨论冻结系数方程时，上式为

$$\vec{v}^{\mathrm{I}}(0,\ y,\ t)=0 \tag{2-9-5}$$

对常系数线性偏微分方程对应有

$$\vec{v}^{\mathrm{I}}(0,\ y,\ t)=\text{常数} \tag{2-9-6}$$

即对应的一维问题的进入特征变量给定。从式（2-6-8）可见无反射边界条件的第一近似也是适当的边界条件。并且，从第六节

的例1和例2的讨论可知对等熵或非等熵流动，无反射边界条件的第一近似在左边界即 $u+2c/(\gamma-1)$ 给定。

对双曲型方程组，更高近似是很难讨论的。以下用简单的单个方程为例来进一步讨论无反射边界条件。考虑波动方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{2-9-7}$$

直接代入

$$w=e^{i(\sigma x+\omega y+\xi t)}$$

得

$$\xi^2=\sigma^2+\omega^2\Rightarrow\sigma=\pm\sqrt{\xi^2-\omega^2} \tag{2-9-8}$$

在 $x=0$ 处，对于外出波，当 ω 较小和 $\xi>0$ 时式（2-9-8）取正号，写为

$$\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial x}=i\sigma=i\sqrt{\xi^2-\omega^2}=i\xi\cdot\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\xi^2}} \tag{2-9-9}$$

上式中第一个等式的意义是：对函数 $f(x)$ 的傅里叶变换

$$F[f]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\sigma x}dx$$

有

$$F[f']=i\sigma F[f]$$

偶变量的多项式对应于函数空间的微分算子；偶变量的非多项式对应于函数空间的所谓拟微分算子。式（2-9-9）的最后表达式对应于某拟微分算子，为了得出可用的公式，下面考虑它的近似。

在 $x=0$ 的无反射边界的第一近似是 $\omega=0$，如上仅法向入射波无反射，这时 $\frac{\partial}{\partial x}=i\xi=\frac{\partial}{\partial t}$，即

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial t}\right)w=0 \tag{2-9-10}$$

对 $\xi=1$，式（2-9-8）可以写为 $1=\cos^2\theta+\sin^2\theta$，即 $\sigma=\cos\theta$，$\omega=\sin\theta$。对固定 ω 有

$$w=ae^{i(\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y+t)}+be^{i(-\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y+t)}$$

代入式（2-9-10）得

$$a(\cos\theta-1)+b(-\cos\theta-1)=0$$

或

$$\frac{b}{a}=\frac{\cos\theta-1}{\cos\theta+1}$$

它表示反射波波幅与外出波波幅之比。对 $\theta=0$（法向入射），$\frac{b}{a}=0$；对 $\theta=\frac{\pi}{4}$，$\frac{b}{a}=-0.17$；对 $\theta=\frac{\pi}{2}$（切向入射），$\frac{b}{a}=-1$。

在此注意，常用的开边界条件

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

导致

$$a\cos\theta+b(-\cos\theta)=0 \text{ 或 } \frac{b}{a}=1$$

所以是完全反射的。

现在考虑式（2-9-9）的第二近似。用泰勒（Taylor）展开或帕德（Pade）逼近都有 $\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\xi^2}}\approx 1-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\xi^2}$，代入式（2-9-9）乘 $i\xi$ 得

$$i\xi\frac{\partial}{\partial x}=-\xi^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\xi^2}\right)=-\xi^2+\frac{1}{2}\omega^2$$

所以无反射边界条件的第二近似是

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^2}\right)w=0 \qquad (2\text{-}9\text{-}11)$$

如上可得出

$$\frac{b}{a}=-\left(\frac{\cos\theta-1}{\cos\theta+1}\right)^2$$

这时对 $\theta=\frac{\pi}{4}$，$\left|\frac{b}{a}\right|$ 降为约 0.03。

类似可得出更高的近似。可以证明用帕德逼近得出的条件导

致适定的初边值问题，而用泰勒展开得出的第三和它以上的近似导致不适定的初边值问题，见文献〔14〕。

附录　单个一阶非线性偏微分方程

对一阶非线性偏微分方程

$$F(x,\ y,\ \varphi,\ p,\ q)=0 \tag{A-1}$$

其中

$$p=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\qquad q=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

简单地列出以下三个要点。

（1）偏微分方程给出解 $\varphi=\varphi(x,\ y)$ 可能的切平面的法向量 $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ -1\right)=(p,\ q,\ -1)$ 的条件。每点可能的切平面包络一个锥面，称为蒙日（Monge）锥。求解偏微分方程相当于找曲面使每点切蒙日锥。

（2）在一点 $P(x,\ y,\ \varphi)$，考虑切平面族

$$F(x,\ y,\ \varphi,\ p(\alpha),\ q(\alpha))=0$$

其中 α 是参数。我们找这族平面包络的蒙日锥的母线方程。沿母线 $p(x(s),\ y(s))-\varphi(s)=0$，其中 s 为沿母线的参数。从

$$\begin{aligned}&p\frac{dx}{ds}+q\frac{dy}{ds}-\frac{d\varphi}{ds}=0\\&\frac{\partial p}{\partial\alpha}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial q}{\partial\alpha}\frac{dy}{ds}=0\end{aligned} \tag{A-2}$$

得母线方程，对固定 α，从

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial\alpha}=0$$

得

$$\frac{dx}{ds}=\frac{\partial F}{\partial p}\qquad\frac{dy}{ds}=\frac{\partial F}{\partial q} \tag{A-3}$$

式（A-3），（A-2）和（A-1）即蒙日锥母线的方程。

（3）为求解方程（A-1），还有$\frac{dp}{ds}$和$\frac{dq}{ds}$的方程。这样定出的$x(s)$，$y(s)$，$\varphi(s)$，$p(s)$，$q(s)$称为"特征带"。在此不讨论方程（A-1）的求解和"特征带"族求解的等价性；仅指出"特征线"，即位于解面上的蒙日锥的母线，生成解面。

参考文献

1 Courant R and Hilbert D. Method of Mathematical Physics V. Ⅱ. Interscience Publishers, 1962.

2 Courant R and Friedrichs K O. Supersonic Flow and shock Waves. Interscience Publishers, 1948.

3 Jeffrey A. Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves. London, Pitman, 1976

4 Jeffrey A. and Taniuti T. Nonlinear Waves Propagation with Application to Physics and Magneto-hydrodynamics. New York, Academic Press, 1964.

5 John F. Partial Differential Equations. Springerverlag. New York Inc, 1978

6 李德元，徐国荣，水鸣寿等.二维非定常流体力学数值方法.北京，科学出版社，1987

7 Harten A, Lax P D. and Van Leer B. On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws SIAM Rev 1983, 25, 35～61.

8 Lax P D. Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical theory of Shock Waves. SIAM Reg Conf Series Lecture in Appl Math. 1972. 11

9 Harten A. On the Symmetric Form of Systems of Conservation Laws With Entropy. J. Comput. Phys 1983, 49, 151～164

10 Oliger J and Sundström A. Theoretical and Practical Aspects of Some Initial Boundary Value Problems in Fluid Dynamics. SIAM J. Appl. Math 1978, 35, 419～446

11 Gustafsson B and Sunström A. Incompletely Parabolic Problems in Fluid Dynamics. SIAM J. Appl. Math 1978, 35, 343～357

12 Kreiss H O. Initial Boundary Value Problems for Hyperbolic Systems, Comm. Pure. Appl. Math 1970, 23, 277～298

13 Higdon R L. Initial-Boundary Value Problems for Linear Hyperbolic Systems. SIAM Review 1986, 28: 177～217

14 Engquist B and Majda A. Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of Waves. Math Comp. 1977, 31, 629～651

15 黄兰洁.计算流体选讲（一）.力学与实践，1990，12(3)：62～70

16 黄兰洁.计算流体选讲（二）.力学与实践，1990,12(4)：63～75

第三章　差分逼近基础

在本章中将以模型方程为例，简要地叙述差分方法中的一些基本概念和稳定性分析方法，且对双曲型方程组初边值问题的差分近似稳定性问题进行讨论（这里略去了数学证明的描述）。应当指出，虽然所引出的定理和分析方法是采用差分方法求解流体力学问题的基础，但只对线性问题有严格证明，对于非线性问题只是简单地“借用”（尽管近年来数值计算方法的理论研究有较大发展），所以，在求解很多实际问题时，由于其基本方程是复杂的非线性方程组，故必须通过数值实验来验证数值解的稳定性及其正确性。

第一节　模型方程的差分逼近

考虑热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3-1-1}$$

定解域：　　$0\leqslant x\leqslant 1,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$

一、导数的差分表达式

首先在求解域内，以差分网格或差分节点代替连续区域（参见图 3-1）。设求解区域内某一点（t_0，x_0）在网格节点上，且网格坐标为（n，j），则以 u_j^n 表示 $t=n\Delta t$，$x=j\Delta x$ 处 u（t_0，x_0）在差分格式中的近似解，其中 Δt 和 Δx 分别为 t 和 x 方向的网格步长。

根据导数的定义，若 u（t，x）在（t_0，x_0）点连续，则有

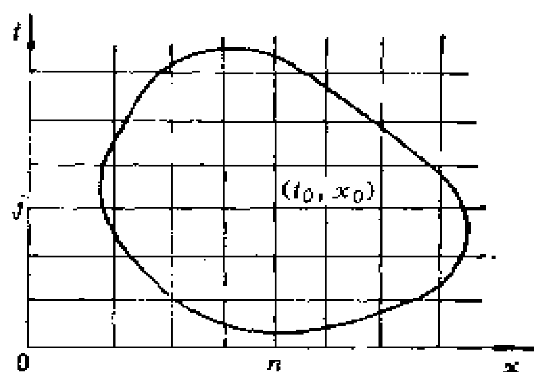


图3-1 差分网格

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(t_0, x_0+\Delta x)-u(t_0, x_0)}{\Delta x}$$

若 Δx 为有界的小量，则根据中值定理，若 $u(t, x)$ 在区间 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+\Delta x$ 内连续，则在此区间内存在一个点 ξ，使得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\xi}=\frac{u(t_0, x_0+\Delta x)-u(t_0, x_0)}{\Delta x}$$

这就是偏导数差分表达式的依据。

将 $u(t_0, x+\Delta x)$ 在 (t_0, x_0) 点按泰勒级数展开，则有

$$u(t_0, x_0+\Delta x)=u(t_0, x_0)+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0\Delta x+\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_0\frac{\Delta x^2}{2!}+\cdots$$

或写为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n=\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0\frac{\Delta x}{2!}+\cdots \qquad (3-1-2)$$

上式右端中的第一项为偏导数 $\partial u/\partial x$ 在 (n, j) 点上的差分表达式，其他项为截断误差。截断误差就是导数与其差分表达式之间的差，截断误差的阶数是截断误差中最低阶导数项内增量 Δx 的幂次数。

定义 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都是定义域 S 内的实函数或复函数，若存在一个与 x 无关的常数 k，使得对于 S 中的所有 x，以下不等式都成立

$$|f(x)|\leqslant k|\varphi(x)|$$

则称 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 为同量级，可表示为

$$f(x)=O[\varphi(x)]$$

由此，式（3-1-2）可写为以下形式

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n=\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}+O(\Delta x)$$

或称差分表达式以一阶精度逼近偏导数。

为了方便，引入以下差分算子的定义

向前差分： $\delta_x^+ u_j^n=u_{j+1}^n-u_j^n$

向后差分： $\delta_x^- u_j^n=u_j^n-u_{j-1}^n$

中心差分： $\delta_x^0 u_j^n=\frac{1}{2}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)$

$$\delta_x^0=\frac{1}{2}(\delta_x^++\delta_x^-)$$

$$\delta_x^2 u_j^n=u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n$$

$$\delta_x u_j^n=u_{j+\frac{1}{2}}^n-u_{j-\frac{1}{2}}^n$$

从以上可知，导数的差分表达式不是唯一的，如将 $u(t_0, x_0-\Delta x)$ 在 (t_0, x_0) 点按泰勒级数展开，可得 $(\partial u/\partial x)$ 的另一个表达式。若限制只用 2～3 个网格点，则常见的一阶导数的差分表达式为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j=\frac{1}{\Delta x}(u_{j+1}-u_j)+O(\Delta x) \quad \text{向前偏心差分}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j=\frac{1}{\Delta x}(u_j-u_{j-1})+O(\Delta x) \quad \text{向后偏心差分}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j=\frac{1}{2\Delta x}(u_{j+1}-u_{j-1})+O(\Delta x^2) \quad \text{中心差分}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j=\frac{1}{2\Delta x}(-3u_j+4u_{j+1}-u_{j+2})+O(\Delta x^2)$$

三点向前偏心差分

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j=\frac{1}{2\Delta x}(3u_j-4u_{j-1}+u_{j-2})+O(\Delta x^2)$$

三点向后偏心差分

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j=\frac{1}{2\Delta x}\left[\frac{\delta_x^0 u_j}{1+\delta_x^2/6}\right]+O(\Delta x^4)\quad \text{紧致差分}$$

二阶偏导数的三点差分表达式为

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j=\frac{1}{\Delta x^2}(u_j-2u_{j+1}+u_{j+2})+O(\Delta x)\quad \text{向前偏心差分}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j=\frac{1}{\Delta x^2}(u_j-2u_{j-1}+u_{j-2})+O(\Delta x)\quad \text{向后偏心差分}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{\Delta x^2}(u_{j+1}-2u_j+u_{j-1})+O(\Delta x^2)\quad \text{中心差分}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{1}{\Delta x^2}\frac{\delta_x^2 u_j}{(1+\delta_x^2/12)}+O(\Delta x^4)\quad \text{紧致差分}$$

二、差 分 方 程[1]

对于热传导方程（3-1-1），若以向前差分逼近时间导数项，以中心差分逼近空间二阶导数项，则差分方程有以下形式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\frac{a}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)\tag{3-1-3}$$

将式（3-1-3）中的函数值在（n，j）点展开，则有

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}-\frac{a}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)$$
$$+\left[-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{n,j}\frac{\Delta t}{2}+a\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{n,j}\frac{\Delta x^2}{12}+\cdots\right]$$

偏微分方程与差分方程之间的差别就是差分方程的截断误差，而截断误差的阶数等于各导数截断误差阶数的和。从上式可以看出，方括号内的项为差分方程（3-1-3）的截断误差，其阶数为$O(\Delta t)+O(\Delta x^2)$或表示为$O(\Delta t,\Delta x^2)$，即差分方程（3-1-3）在时间方向以一阶精度空间方向以二阶精度逼近微分方程（3-1-1）。

如果在差分方程中只含单个未知函数，则称为显式差分格式，

如式（3-1-3），这里 $t=n\cdot\Delta t$ 层的函数 u^n 为已知，如果在差分方程中含多个未知函数，则称为隐式差分格式，如对于微分方程（3-1-1）的如下差分方程

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=a\frac{u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}$$

第二节　几个定义和拉克斯(Lax)等价定理

采用某种差分方程去逼近一微分方程，实际上就是把在某连续空间区域内成立的微分方程离散化。数值方法的目的之一是寻找恰当的离散方式，并根据原问题的初边值条件合理地给出离散化近似方程的初边值条件，使所求得的离散解以一定精度逼近真实的物理解。本节将讨论差分方程的近似解与微分方程的准确解之间的关系。

定义 $u(t,x)$ 和 $u=u_h(n\Delta t,\ j\Delta x)$（这里 u_h 表示差分方程的近似解）为函数空间的元素。定义 u 的范数 $\|u\|$ 满足 $\|u\|\geqslant 0$，且仅当 $u=0$ 时等号成立；$\|au\|=|a|\cdot\|u\|$，其中 a 是常数；$\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$。

最常用的范数有平方积分范数

$$\|u(x)\|=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x)|^2dx\right]^{1/2} \tag{3-2-1}$$

和极大值范数

$$\|u(x)\|=\max_x|u(x)| \tag{3-2-2}$$

两种，它们都满足上述范数的定义。

两个函数 u、v 之间的差距，由它们差的范数表征，即 $\delta=\|u-v\|$。

若以 L 表示微分方程算子，L_h 表示差分方程算子，则微分方程可写为

$$Lu=0$$

差分方程可写为

$$L_h u_h = 0$$

定义：当差分方程中的步长 $\Delta t \to 0$，$\Delta x \to 0$ 时，差分方程的截断误差也趋近于零，则称差分方程与原微分方程是相容的。或对于算子 L 作用的所有光滑函数 v，如果当 $\Delta t \to 0$，$\Delta x \to 0$ 时，$\|L_h v - Lv\| \to 0$，则称 L_h 与 L 是相容的。

应当指出，当差分方程的截断误差为 $O(\Delta t/\Delta x)$ 型时，只有当 $\Delta t \to 0$，$\Delta x \to 0$ 时，存在有 $\Delta t/\Delta x \to 0$，差分方程是相容的，否则不相容。

定义：当差分方程中 $\Delta t \to 0$，$\Delta x \to 0$ 时，如果有 $\delta = \|u_h - u\| \to 0$，则称差分方程的近似解收敛于微分方程的准确解。

定义：如果当 $\Delta t \to 0$，$\Delta x \to 0$ 时，存在有常数 c_1 和 c_2，使得

$$\|u_h\| \leqslant c_1 e^{c_2(t-t_0)} \|u_h(t_0, \ x)\| \qquad (3\text{-}2\text{-}3)$$

则差分格式 L_h 称为是稳定的。这里 c_1、c_2 与 Δt 和 Δx 无关，且 c_2 不能超过微分方程精确解的增长速率，或更简单地叙述为：在差分方程的求解过程中，如果初始时刻误差的增长有界，则称差分方程是稳定的。

拉克斯定理：如果微分方程的初值问题是适定的，对应的差分方程是相容的，则差分方程解的收敛性和稳定性是等价的，或者说稳定性是收敛性的充分和必要条件。

应当指出，等价定理只对于线性方程的初值问题有严格的证明，只有在附加的假设下才能推广到混合型初边值问题。

定义：微分方程的精确解与差分方程的精确解之间的差别称为离散误差。可表示为

$$D \cdot E = \|\bar{u}_h - u\|$$

这里 $\bar{u}_h$ 表示差分方程的精确解，u 表示微分方程的精确解。

在数值运算中，舍入有限个数字而产生的误差称为舍入误差，舍入误差的大小与求解区域内所选用的网格点数成正比。增加网格点数截断误差减小，但舍入误差增加。

定义：差分方程准确逼近的微分方程，（即截断误差为零）称为该差分方程的修正方程。例如，对于一阶波动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

有差分方程

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+c\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}=0 \qquad (3\text{-}2\text{-}4)$$

将 u_j^{n+1}、u_{j-1}^n 在（n，j）点按泰勒级数展开，并代入上式，则有

$$u_t+cu_x=-\frac{\Delta t}{2}u_{tt}+\frac{c\Delta x}{2}u_{xx}-\frac{\Delta t^2}{6}u_{ttt}$$
$$-\frac{c\Delta x^2}{6}u_{xxx}+\cdots \qquad (3\text{-}2\text{-}5)$$

为了消除上式中对 t 的导数的高阶项，将上式对 t 求导，再减去上式对 x 的导数乘 c，则可得

$$u_{tt}=c^2u_{xx}+\Delta t\left(\frac{-u_{ttt}}{2}+\frac{c}{2}u_{ttx}+O(\Delta t)\right)$$
$$+\Delta x\left(\frac{c}{2}u_{txx}-\frac{c^2}{2}u_{xxx}+O(\Delta x)\right)$$

类似方法可得

$$u_{ttt}=-c^3u_{xxx}+O(\Delta t,\ \Delta x)$$
$$u_{ttx}=c^2u_{xxx}+O(\Delta t,\ \Delta x)$$
$$u_{txx}=-cu_{xxx}+O(\Delta t,\ \Delta x)$$

以上各式中的下标表示偏导数对应的自变量。将 u_{tt}，u_{ttt} 和 u_{ttx}的表达式代入式（3-2-5），则得

$$u_t+cu_x=\frac{c\Delta x}{2}(1-\nu)u_{xx}-\frac{c\Delta x^2}{6}(2\nu^2-3\nu+1)u_{xxx}$$
$$+O[\Delta x^3,\ \Delta x^2\Delta t,\ \Delta x(\Delta t)^2,\ \Delta t^3] \qquad (3\text{-}2\text{-}6)$$

这里 $\nu=\Delta t/\Delta x$。式（3-2-6）就是差分方程（3-2-4）的修正方程。修正方程的精确解与原微分方程精确解之差是离散误差引出的。修正方程与原微分方程之差，就是差分方程对应于原微分方程的截断误差。截断误差中的偶次导数项是耗散误差项，截断误差中的奇次导数项是色散误差项。在截断误差中，如果最低阶导

数为偶次导数，则称该差分方程以耗散误差占主导，如果最低阶导数为奇次，则称色散误差占主导。在截断误差中的偶次导数项又称为差分粘性项，或称为隐式人工粘性，而将直接加入到差分格式中的人工粘性称为显式人工粘性。

定义 如果微分方程中所有导数项的系数是常数，或系数为自变量的函数，但该系数的导数在方程中不出现，则称微分方程是弱守恒型的；若微分方程中所有导数项的系数仅是常数，则称为强守恒型的。例如，一阶方程的守恒型有以下形式[2]

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{d}\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial x_{(\alpha)}}=0$$

或称为散度形式方程。

考虑一维单个守恒型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0 \tag{3-2-7}$$

定解域：$-\infty<x<+\infty,\quad t>0$

初始条件： $u(0,x)=\varphi(x)$ (3-2-8)

设空间步长和时间步长分别取为 h 和 τ，记 $x_j=jh$，$t^n=n\cdot\tau$，u_j^n 表示差分近似解在 (t^n, x_j) 处的值。

定义 对一维单个守恒型方程（3-2-7），差分格式

$$u_j^{n+1}=G(u_{j-l}^n,\ u_{j-l+1}^n,\ \cdots,\ u_{j+l}^n) \tag{3-2-9}$$

称为守恒型差分格式，如果其中

$$G(u_{j-l}^n,\ u_{j-l+1}^n,\ \cdots,\ u_{j+l}^n)$$
$$=u_j^n-\frac{\tau}{h}\left(g_{j+\frac{1}{2}}^n-g_{j-\frac{1}{2}}^n\right)$$

同时存在函数 g，使得

$$g_{j+\frac{1}{2}}^n=g(u_{j-l+1}^n,\ u_{j-l+2}^n,\ \cdots u_{j+l}^n)$$

为了使式（3-2-9）与（3-2-7）是相容的，则 g 必须满足

$$g(w,w,\cdots,w)=f(w)$$

以上定义可有以下的描述：如果差分方程对于微分方程是相

容的，且在求解域内对于任意网格点数和任意网格尺度都精确地满足离散型的散度形式，则称差分方程为守恒型的。

拉克斯、温德诺夫（Wendroff）[3]证明了下面关于守恒型差分方程的定理。

定理 设守恒型差分方程（3-2-9）和微分方程（3-2-7）是相容的，如果当 h、τ 趋于零时，式（3-2-9）满足初始条件 $u_j^0=\varphi(jh)$ 的解一致有界，且几乎处处收敛到函数 $u(t,x)$，则 $u(t,x)$ 是式（3-2-7）、（3-2-8）的弱解。

然而弱解是不唯一的，对于一维双曲型方程的问题只有满足熵条件的物理解才是唯一的，因此为了要保证守恒型差分格式的解收敛于唯一物理解，就必须还要对格式附加条件。事实上，关于差分方程的解是否收敛于物理解的问题，在计算流体力学的理论工作中还远没有解决，特别对于多维问题的方程组（参见第二章）。这里只是简单地把问题提出，使能考虑到这一问题。

第三节 差分格式的构造[1]

构造差分格式的方法很多，特别是近几年来，为提高计算方法对激波的分辨率，发展了新的差分格式的构造方法．这将在后几章中介绍。这里只简要描述一般的构造方法，且通过简单例子加以说明。

一、系数待定方法

考虑构造 $(\partial u/\partial x)_j^n$ 的差分表达式，要求其截断误差为 $O(\varDelta x^2)$，且只应用三个网格点（$n,j-1$），（$n,j-2$）和（n,j）。为此将 u_{j-1}^n 和 u_{j-2}^n 在（n,j）点按泰勒级数展开

$$u_{j-2}^n=u_j^n+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n(-2\varDelta x)+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n\frac{(2\varDelta x)^2}{2!}+\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n\frac{(-2\varDelta x)^3}{3!}+\cdots \tag{3-3-1}$$

$$u_{j-1}^n = u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n (-\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n \frac{\Delta x^2}{2!}$$
$$+ \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_j^n \frac{(-\Delta x)^3}{3!} + \cdots \qquad (3\text{-}3\text{-}2)$$

取 a 乘式（3-3-1）加 b 乘式(3-3-2)所得的关系式中$(\partial u/\partial x)_j^n$项的系数为 1，即 $-2a-b=1$；另外，为了使所得的差分表达式致少是二阶精度，即截断误差为 $O(\Delta x^2)$，则要求该关系式中$(\partial^2 u/\partial x^2)_j^n$ 项的系数为零，则有 $2a+b/2=0$，由此可推出 $a=1$，$b=-2$。最后可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{u_{j-2}^n - 4u_{j-1}^n + 3u_j^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

对于非均匀网格，考虑构造 $(\partial u/\partial y)_j^n$ 的差分表达式，要求截断误差为 $O(\Delta y^2)$，且应用三个网格点，(n, j)，$(n, j-1)$ 和 $(n, j+1)$，而 $\Delta y_+ = y_{j+1} - y_j$，$\Delta y_- = y_j - y_{j-1}$，且 $\Delta y_+ \neq \Delta y_-$。用与上面相同的方法可得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{u_{j+1}^n + (\alpha^2 - 1)u_j^n - \alpha^2 u_{j-1}^n}{\alpha(\alpha+1)\Delta y_-} + O(\Delta y_+^2, \Delta y_-^2)$$

这里 $\alpha = \Delta y_+ / \Delta y_-$，要求 $\Delta y_- \neq 0$。

二、多项式方法

考虑构造逼近拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \qquad (3\text{-}3\text{-}3)$$

的差分方程，首先构造 $(\partial^2 T/\partial y^2)$ 的差分表达式，要求只用三个网格点。为此在给定的 y 值处，将 T 按 x 的二次多项式写出为

$$T = a + bx + cx^2$$

再利用所选定的网格点确定多项式的系数。例如，所选用的网格点为 (i, j)，$(i-1, j)$ 和 $(i+1, \delta)$。为了简单，设 (i, j) 点为 $x=0$ 处，则有

$$T(i, j) = a,\quad T(i+1, j) = a + b\Delta x + c\Delta x^2$$
$$T(i-1, j) = a - b\Delta x + c\Delta x^2$$

由此求出多项式的系数a、b和c，代入多项式，最后可得

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j}=2c=\frac{T_{i+1,j}-2T_{i,j}+T_{i-1,j}}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2)$$

同样，可求得$(\partial^2T/\partial y^2)$的差分表达式，代入式（3-3-3）则得以二阶精度逼近微分方程的差分方程。

三、积 分 方 法

考虑热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3-3-4}$$

对该方程进行积分，首先要求选定积分限，积分限的不同选择将与差分方程的稳定性有关，例如选定t的积分限为$t_0\sim t_0+\Delta t$，x为$x_0-\Delta x/2\sim x_0+\Delta x/2$，则有

$$\int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}}[u(t_0+\Delta t,x)-u(t_0,x)]dx$$
$$=\alpha\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\left(t,x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}\left(t,x_0-\frac{\Delta x}{2}\right)\right]dt$$

应用积分中值定理，且左边取x_0为中值，右边取$t_0+\Delta t$为中值（若选取t_0为中值，则得显式差分格式），则可得

$$[u(t_0+\Delta t,x_0)-u(t_0,x_0)]\Delta x$$
$$=\alpha\left[\frac{\partial u}{\partial x}\left(t_0+\Delta t,x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}\left(t_0+\Delta t,x_0-\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\Delta t \tag{3-3-5}$$

因

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\frac{\partial u}{\partial x}(t_0+\Delta t,x)dx$$
$$=u(t_0+\Delta t,x_0+\Delta x)-u(t_0+\Delta t,x_0) \tag{3-3-6}$$

而由积分中值定理，当选 $x_0+\Delta x/2$ 为中值时，则有

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\frac{\partial u}{\partial x}(t_0+\Delta t,\ x)dx\approx\frac{\partial u}{\partial x}\left(t_0+\Delta t,\ x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\Delta x$$

由以上两式可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(t_0+\Delta t,\ x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x\approx u(t_0+\Delta t,\ x+\Delta x)-u(t_0+\Delta t,\ x_0)$$

或写为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(t_0+\Delta t,\ x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x\approx[u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}]$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(t_0+\Delta t,\ x_0-\frac{\Delta x}{2}\right)\approx u_j^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}$$

将以上两式代入式（3-3-5），则最后可得逼近微分方程（3-3-4）的差分方程为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\frac{\alpha}{\Delta x^2}(u_{j+1}^{n+1}-2u_j^{n+1}+u_{j-1}^{n+1})\tag{3-3-7}$$

这里 n 表示 t_0 时间层的量，$n+1$ 表示 $t_0+\Delta t$ 时间层的量，可以看出，式（3-3-7）为全隐式差分方程。

采用积分方法构造差分方程，则截断误差不能直接给出，需由差分方程的修正方程给出。

四、有限体积法

众所周知，描述流体运动的基本微分方程是根据某一微团体积内流体运动的质量、动量和能量守恒律而推导得出的。体积法是采用同样的方法，将定义在某一连续区域内的微分方程，离散为描述有限个体积内流体运动的守恒律。

考虑某一容积中的热传导问题，当热传导系数为常数时，温度 T 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0\tag{3-3-8}$$

将定解域划分为有限个相等体积，内部网格离散点取为体积的几何中心，边界点取在半点 B 上（参见图 3-2）。

考虑以（i，j）为几何中心点的体积 A。式（3-3-8）所描述的物理规律是体积 A 内的热流量的变化为零。热流量与温度分布的关系可由傅里叶关系式给出

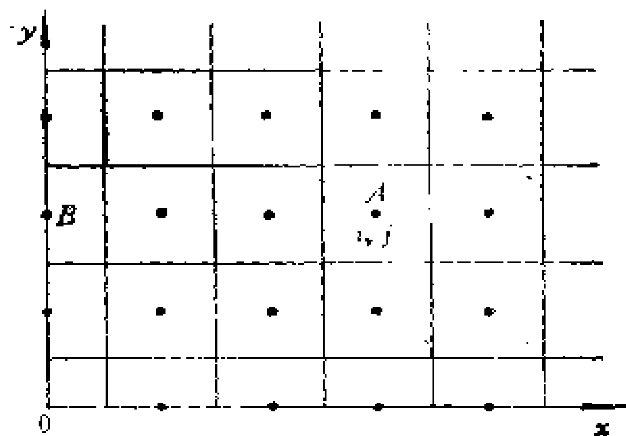


图3-2　网格分布

$$g = -k\nabla \cdot T$$

对上式取散度微分算子，且考虑到上述物理规律，则有

$$-\nabla \cdot g = \nabla \cdot (k\nabla \cdot T) = 0$$

应用散度定理可得

$$\iiint\limits_R \nabla \cdot (k\nabla \cdot T) dR = \iint\limits_S (k\nabla \cdot T) \cdot \vec{n} dS = 0$$

这里，$\vec{n}$ 为曲面 S 的外法向，对体积 A 的外表面进行积分，则有

$$-k\Delta y\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-1/2,\ j} + k\Delta y\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+1/2,\ j}$$

$$-k\Delta x\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,\ j-1/2} + k\Delta x\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,\ j+1/2} = 0$$

采用中心差分逼近上式中的导数项，则可得

$$k\Delta y\frac{T_{i-1,j}-T_{i,j}}{\Delta x} + k\Delta y\frac{T_{i+1,j}-T_{i,j}}{\Delta x} + k\Delta x\frac{T_{i,j-1}-T_{i,j}}{\Delta y}$$

$$+ k\Delta x\frac{T_{i,j+1}-T_{i,j}}{\Delta y} = 0 \qquad (3-3-9)$$

将上式两端除以 $\Delta x\Delta y$，则最后可得逼近微分方程（3-3-8）的差分方程为

$$\frac{1}{\Delta x^2}[T_{i-1,j}-2T_{i,j}+T_{i+1,j}]+\frac{1}{\Delta y^2}[T_{i,j-1}-2T_{i,j}+T_{i,j+1}]=0$$

现假设（i，j）点位于边界上，且对应的体积为B，因方程(3-3-8)的边界条件可写为以下形式

$$h(T_\infty-T_{i,j})=-k\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i,j} \tag{3-3-10}$$

式（3-3-10）中的h和k为常数，其差分形式可有

$$h(T_\infty-T_{i,j})=\frac{k}{\Delta x}(T_{i,j}-T_{i+1,j}) \tag{3-3-11}$$

从另一方面，对于体积B其x方向的外边界为$\Delta x/2$，按物理守恒关系，与式（3-3-9）类似，可有

$$h(T_\infty-T_{i,j})+\frac{k}{\Delta x}(T_{i-1,j}-T_{i,j})+\frac{k\Delta x}{2\Delta y^2}\cdot[T_{i,j+1}-2T_{i,j}+T_{i,j-1}]=0 \tag{3-3-12}$$

比较式（3-3-11）和式（3-3-12）可以看出泰勒级数方法与有限体积法之间的差别。因采用有限体积方法构造的差分方程总是满足离散化的散度定理，故差分方程总是守恒的。

以上四种方法在不同的问题中都有其自身的优越性。对于简单的线性方程，采用这四种方法对内点将得到相同的差分方程。

第四节　稳定性分析方法

本节中将给出一种差分方程的稳定性分析方法。称为傅里叶分析方法，或称为冯·诺伊曼（Von Neumann）方法。该方法较直观，且应用较广。

一、单个模型方程

（一）以热传导方程为例，简述傅里叶稳定性分析方法

考虑热传导方程（3-3-4），选取以下形式的差分方程：

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}=\alpha\cdot\frac{u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \tag{3-4-1}$$

设N为差分方程的数值解，D为差分方程的精确解，e为计算过程中所产生的舍入误差，则不难看出：$N=D+e$。因N满足式（3-4-1）差分方程，故D和e也满足该方程。

傅里叶分析方法是首先将误差$e(t,x)$按傅里叶级数展开，也就是将误差e写为各线性扰动波的迭加

$$e(t,x)=\sum_m b_m(t)\cdot e^{ik_m x}=\sum_m b_m(t)\cdot e^{ik_m j\Delta x} \quad (3\text{-}4\text{-}2)$$

其中i为虚数单位。

正如前面所述，如果在差分方程的求解过程中，误差的增长是有界的，则差分方程是稳定的。对于线性问题可以证明，如果傅里叶级数中的每一项都是不增长的，则其总和也是不增长的。故对于误差的增长特性，可研究其级数的单项特性。将单项误差写为以下形式

$$\varepsilon_m(t,x)=e^{at}e^{ik_m x}=e^{an\Delta t}e^{ik_m j\Delta x} \quad (3\text{-}4\text{-}3)$$

其中k_m为实数，a为复数。将式（3-4-3）代入式（3-4-1），经整理可得

$$e^{a\Delta t}=1-4\nu\sin^2\frac{\beta}{2} \quad (3\text{-}4\text{-}4)$$

其中$\nu=a\Delta t/\Delta x^2$，$\beta=k_m\Delta x$。从式（3-4-3）可得

$$(\varepsilon_m)_j^{n+1}=e^{a\Delta t}\cdot e^{an\Delta t}\cdot e^{ik_m j\Delta x}=e^{a\Delta t}(\varepsilon_m)_j^n$$

或对于差分方程（3-4-1），两个时间层的误差之比有

$$\varepsilon_j^{n+1}/\varepsilon_j^n=e^{a\Delta t}=1-4\nu\sin^2\frac{\beta}{2}$$

称此比值为放大因子，以G表示。不难看出，当$|G|\leqslant 1$时，对应的差分格式总是稳定的。对于差分方程（3-4-1）有

$$|G|=\left|1-4\nu\sin^2\frac{\beta}{2}\right|\leqslant 1$$

这可能有两种情况，即

（1）如果$(1-4\nu\sin^2\beta/2)>0$，则要求$4\nu\sin^2\beta/2>0$，这种情况总是满足的，因$\nu>0$。

（2）如果 $\left(1-4\nu\sin^2\dfrac{\beta}{2}\right)<0$，则要求 $4\nu\sin^2\beta/2-1\leqslant 1$，这时只有

$$\nu\leqslant\frac{1}{2} \tag{3-4-5}$$

时才能使 $|G|\leqslant 1$。这里的式（3-4-5）为差分方程（3-4-1）的稳定必要条件。

对于差分方程，如果稳定条件要求 ν 限制在一定条件下取值，则称为条件稳定；如果差分方程对于 ν 的任意值都是稳定的，则称为无条件稳定。

应当指出，稳定性不能单单根据某一固定的 $k\Delta x$ 值或在某一小范围的 $k\Delta x$ 值而定，必须考虑 $0\leqslant k\Delta x\leqslant\pi$ 范围内的情况。

（二）二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \tag{3-4-6}$$

采用与式（3-4-1）中相同的差分格式，则逼近二维热传导方程的差分方程有以下形式

$$u_{j,k}^{n+1}=u_{j,k}^n+\nu_x(u_{j+1,k}^n-2u_{j,k}^n+u_{j-1,k}^n)$$
$$+\nu_y(u_{j,k+1}^n-2u_{j,k}^n+u_{j,k-1}^n)$$

这里　　$\nu_x=a\Delta t/\Delta x^2$，$\nu_y=a\Delta t/\Delta y^2$

根据傅里叶稳定性分析方法可得

$$G=1-4\nu_x\sin^2\frac{\beta}{2}-4\nu_y\sin^2\frac{\beta}{2}$$

稳定条件要求 $|G|\leqslant 1$，由此推出稳定条件为

$$a\Delta t[1/\Delta x^2+1/\Delta y^2]\leqslant\frac{1}{2} \tag{3-4-7}$$

比较式（3-4-6）和（3-4-7）可以看出，二维问题稳定条件对时间步长的限制比一维问题更严。

（三）一阶波动方程

采用拉克斯格式，则逼近一阶波动方程（1-4-1）的差分方程有以下形式

$$u_j^{n+1}=\frac{1}{2}[u_{j+1}^n+u_{j-1}^n-\gamma(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)] \qquad (3\text{-}4\text{-}8)$$

这里 $\gamma=c\Delta t/\Delta x$，根据傅里叶稳定性分析方法可得

$$G=\cos\beta-i\gamma\sin\beta \qquad (3\text{-}4\text{-}9)$$

由 $|G|\leqslant 1$ 推出稳定条件为

$$|\gamma|\leqslant 1 \qquad (3\text{-}4\text{-}10)$$

从式（3-4-10）可以看出，若 $c>0$，则有

$$\Delta t/\Delta x\leqslant 1/c \qquad (3\text{-}4\text{-}11)$$

设所考虑的网格点为 $(t_0,\ x_0)$，通过该点的特征线是斜率为 $dx/dt=c$ 的直线（参见图 3-3），由此可知式（3-4-11）表示了微分方程的解在 $(t_0,\ x_0)$ 点的依赖域包含在该点差分方程解的依赖域之中。

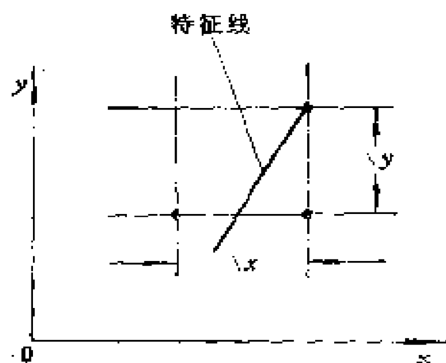


图3-3　微分影响域与差分影响域

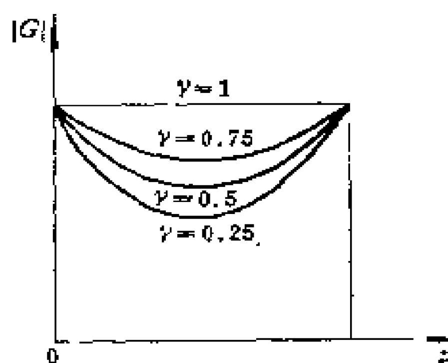


图3-4　放大因子随相角 ϕ 的变化

从上面的讨论可以看出，对于给定的数值计算方法，G 依赖于网格尺寸和波数（或频率）。现利用 G 在复平面上的变化情况，讨论误差的增长特性。因 $G=|G|e^{i\phi}$，这里 ϕ 为相角，从式（3-4-9）可得

$$G=[\cos^2\beta+\gamma^2\sin^2\beta]^{1/2}e^{i\,\mathrm{tg}^{-1}(-\gamma\,\mathrm{tg}\beta)}$$

$$\mathrm{tg}\phi=-\gamma\,\mathrm{tg}\beta$$

在图 3-4 中给出了对于差分方程（3-4-8）的放大因子 $|G|$ 随相角 ϕ 的变化。

可以看出，当 $\gamma=1$ 时，对于所有频率的误差分量，G 都不减弱，这时 G 在复平面上为单位圆。当 $\gamma<1$ 时，对于高频误差分量和低频误差分量，G 只有缓慢的减小，而对于中等频率的误差分量，G 有明显的减小。

一般来说，以 $|G|\leqslant 1$ 作为稳定性的必要条件是要求过严了。当精确解 $u(t,x)$ 随时间 t 而增长时，此条件就要求太苛刻，以至难以达到。事实上，根据前面的定义，稳定性仅要求误差的增长是有界的，也可表示为某一固定时刻 t 时，$e(t,x)$ 的每一个傅里叶级数分量的振幅有界。如果真解是随时间而增大的，则级数分量的振幅可以大于1，但当 $\Delta t\to 0$，$\Delta x\to 0$，且 $n\to\infty$ 时，

$$M=\frac{b_m(t)}{b_m(t_0)}=G^{\frac{(t-t_0)}{\Delta t}}$$

不改变，即 M 与 $t=t_0$ 到 $t=t$ 之间所取的时间步长数 n 无关。若命

$$G=1+\varepsilon(k\Delta x,\ \gamma)$$

则根据二项式定理有

$$G^n=(1+\varepsilon)^n=1+n\varepsilon+\frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2+\cdots$$

如果保留到 ε 的一阶项，并要求 G^n 与 Δt 无关，则 ε 必须具有 $n\varepsilon=\text{const}$ 的条件，或 $\varepsilon=k\cdot\Delta t$，且 k 为常数。所以差分格式稳定的必要条件应写为

$$|G|\leqslant 1+k\cdot\Delta t \qquad (3\text{-}4\text{-}12)$$

这就是著名的冯·诺伊曼稳定性的必要条件。利用傅里叶级数来分析稳定性的方法有时也称为冯·诺伊曼稳定性分析方法。

（四）边界条件与稳定性分析

为了考虑边界条件对稳定性的影响，这里以周期边界条件为例说明其基本思想。以下几节将讨论双曲型方程的差分方程边界条件提法的稳定性问题。

采用傅里叶矩阵分析方法，仍以一阶波动方程（3-4-1）为例。若选用三点显式差分格式，则逼近热传导方程的差分方程有以下形式

$$u_j^{n+1}=a_0u_{j-1}^n+a_1u_j^n+a_2u_{j+1}^n,\quad j=1,2\cdots m$$

取周期边界条件，则有

$$u_0^n=u_m^n\quad,\qquad u_1^n=u_{m+1}^n$$

将差分方程写为矩阵形式

$$\vec{U}^{n+1}=[\boldsymbol{X}]\vec{U}^n \tag{3-4-13}$$

这里 $\vec{U}$ 为 m 维向量

$$\vec{U}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

对于周期性的边界条件，矩阵$[\boldsymbol{X}]$可写为以下形式

$$[\boldsymbol{X}]=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & \cdots & a_0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2\cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ \cdots & & & & a_2 \\ a_2 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 \end{pmatrix}$$

矩阵$[\boldsymbol{X}]$的特征值为

$$\lambda_j=a_1+(a_0+a_2)\cos\frac{2\pi}{m}(j-1)$$

$$+i(a_0-a_2)\sin\frac{2\pi}{m}(j-1)$$

$$j=1,\cdots,m$$

因差分解的误差也满足差分方程（3-4-13），故矩阵$[\boldsymbol{X}]$也就是两个时间层的误差向量之比，称为放大矩阵，以$[\boldsymbol{G}]$表示。差分方程的稳定条件要求矩阵$[\boldsymbol{G}]$的特征值为

$$|\lambda_j|\leqslant 1,\quad j=1,2,\cdots,m$$

对所选定逼近于热传导方程的显式格式可写为

$$u_j^{n+1} = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{j-1}^n + \left(1 - 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) u_j^n + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{j+1}^n$$

$$j = 1, 2, \cdots, m$$

即 $a_0 = a_2 = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$，$a_1 = \left(1 - 2\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right)$，故由 $|\lambda_j| \leqslant 1$ 可推出差分方程的稳定条件为

$$\alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

可以看出，对于热传导方程采用显式中心差分格式逼近，周期边界条件并不影响稳定性的限制条件。

二、一维方程组

现将稳定性的冯·诺伊曼必要条件推广到多变量的情况。考虑以下一维方程组的模型方程

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = 0 \tag{3-4-14}$$

其中 $\vec{U}$ 为 m 维向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $m \times m$ 维矩阵。与前面的讨论类似，可以得到

$$\vec{B}_k^{n+1} = [\boldsymbol{G}] \vec{B}_k^n$$

其中 $\vec{B}_k$ 是误差向量 E 作傅里叶级数展开时，波数为 k 分量的振幅，$[\boldsymbol{G}]$ 是 $m \times m$ 维的矩阵，称为差分方程的放大矩阵。相应的冯·诺伊曼必要条件是 $[\boldsymbol{G}]$ 的所有特征值满足以下不等式

$$|\lambda_j| \leqslant 1 + k \cdot \Delta t$$

$$j = 1, 2, \cdots, m$$

其中 k 为常数。

对于变系数的线性方程，通常把变系数取为当地值，然后按照常系数线性方程来确定差分方程的稳定性必要条件。对于非线性方程，一般用 n 时刻的已知值代入方程，冻结方程中的系数，然后再按线性方程稳定性分析方法，给出稳定性的必要条件。但非线性问题往往会出现非线性不稳定性问题，这种不稳定性是冯·诺伊曼条件判断不出来的。所以，在很多实际问题中，除必须

进行稳定性分析外．还需进行数值实验及分析，以验证差分方程数值解的稳定性及其解的准确性。

第五节　双曲型方程初边值问题差分近似稳定性分析的基本方法

由于数值求解的实际需要，50年代有关偏微分方程初值问题稳定性分析的理论及判别方法有了迅速发展。到60年代，里希特迈尔和莫顿出版了专著，这标志着这一领域的研究已经发展成熟。但实际问题的求解总是在有限空间范围内进行，必须考虑边界条件的确定方法并估计它们对于数值求解的影响，这方面的研究工作从60年代开始，1968年克莱士（Kreiss）得到了二层显式差分近似初边值问题稳定性的充分条件[5]，1972年古斯特福森（Gustafsson）、克莱士、沈德士托（Sundström）得到了多层隐式差分近似初边值问题稳定性的充分必要条件[6]，一般称之为GKS理论。80年代这方面的研究，推广和应用仍在继续进行，GKS理论的重要意义和应用价值业已得到广泛承认和肯定。这里仅介绍稳定性分析的基本方法，对于理论结果只作简要介绍，其严格论述和证明请参看文献[5.6]。

本节从一个简单例子的讨论开始，介绍数值边界条件的相容性概念，说明稳定性分析的基本思想和基本方法。

一、单向波方程初边值问题

考虑下列适定问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\quad 0\leqslant x<\infty,\quad t>0 \tag{3-5-1}$$

$$u(x,\ 0)=f(x)\quad 0\leqslant x<\infty \tag{3-5-2}$$

其特征线为 $x+t=\text{const}$，沿特征线解 $u(x,t)$ 保持常数值，式（3-5-1）、（3-5-2）的解是

$$u(x,\ t)=f(x+t) \tag{3-5-3}$$

这样$u(0, t)=f(t)$，因此定解问题在左边界$x=0$不需要指定边界条件。

现在采用蛙跳（Leap-Frog）格式求以上问题的数值解．设网格步长为Δx、Δt，设$v_j(t)=v(x_j, t)$表示差分解，其中$x_j=j\Delta x$，$t=n\Delta t$，差分近似和初始条件写为

$$v_j(t+\Delta t)=v_j(t-\Delta t)+\frac{\Delta t}{\Delta x}(v_{j+1}(t)-v_{j-1}(t)) \quad (3\text{-}5\text{-}4)$$

$$v_j(0)=f(x_j) \quad (3\text{-}5\text{-}5)$$

$$v_j(\Delta t)=f(x_j)+\Delta t f'(x_j) \quad (3\text{-}5\text{-}6)$$

上列时间空间中心差分格式的纯初值问题当$\Delta t/\Delta x<1$时是稳定的。由于差分计算需要，在左边界点$x=0$应补充边界条件，这种补充条件称为数值边界条件，它应与微分方程定解问题相容，不能随意指定。例如对式（3-5-1)、(3-5-2）取初始条件为

$$u(x, 0)=f(x)\equiv 1$$

此时准确解为$u(x, t)\equiv 1$，差分计算用式（3-5-4）当$j=1、2、3\cdots$，初始条件取为

$$v_j(0)=1 \qquad j=1、2、3、\cdots$$

$$v_j(\Delta t)=1 \qquad j=1、2、3、\cdots$$

如边界条件取为

$$v_0(t)=0$$

当$\Delta t/\Delta x=1$时差分解为

$$v_j^n=v_j(t)=\begin{cases} 1 & \text{当} x_j\geqslant t \\ 1-(-1)^j & \text{当} x_j<t \end{cases}$$

这说明当Δx、$\Delta t\to 0$时，$v_j(t)$并不收敛于$u(x, t)$，差分解振荡情况如图3-5所示。

当取$\Delta t/\Delta x<1$时这种振荡情况同样存在，这里问题在于数值边界条件取法不合理。因此补充的数值边界条件必须与微分方程定解问题相容，这是初边值问题数值求解的一条原则。

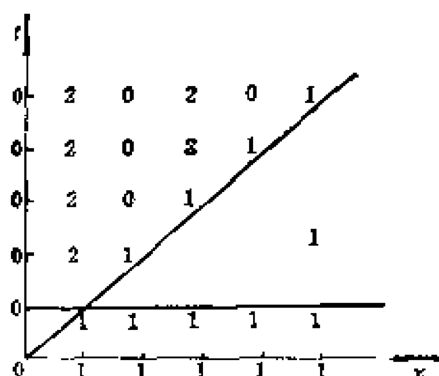


图3-5　差分解振荡情况

二、数值边界格式的相容性[7]

考虑单向波方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\quad x\geqslant 0,\quad t>0 \tag{3-5-7}$$

其中常数 $a>0$，特征线为 $x+at=\text{const}$，所以 $x=0$ 为流进边界，数值边界条件指定为

$$B(v_0^n)=0 \tag{3-5-8}$$

其中 B 为边界差分算子，$v_0^n=v_0(t)=v(x_0,\ t),x_0=0$，$t=n\Delta t$。以微分方程定解问题真解 $u(x,\ t)$ 代入式（3-5-8），得到数值边界格式的截断误差为

$$\tau(u_0^n)\equiv B(u_0^n) \tag{3-5-9}$$

取 $\lambda=\Delta t/\Delta x=\text{const}$，利用微分方程(3-5-7)，按泰勒级数展开式估计出

$$\tau(u_0^n)=0(\Delta x^{p+1})\quad 当\Delta x\to 0 \tag{3-5-10}$$

则称此数值边界格式具有 p 阶精度，如 $p\geqslant 0$ 就说此数值边界条件式（3-5-8）与微分方程定解问题相容。以下列出 6 种相容的数值边界格式。

（1） $B(v_0^n)\equiv v_0^{n+1}-v_0^n-\lambda a(v_1^n-v_0^n)=0$

（2） $B(v_0^n)\equiv v_0^{n+1}-v_1^n=0$

（3） $B(v_0^n)\equiv v_0^n-v_1^n=0$

（4） $B(v_0^n)\equiv v_0^n-2v_1^n+v_2^n=0$

(5) $B(v_0^n)\equiv(1+\lambda a)v_0^{n+1}+(1-\lambda a)v_1^{n+1}-(1-\lambda a)v_0^n$
$-(1+\lambda a)v_1^n=0$

(6) $B(v_0^n)\equiv v_0^n+v_2^n-v_1^{n+1}-v_1^{n-1}=0$

以上(2)、(3)为零阶精度，(1)、(4)、(6)为一阶精度，(5)为二阶精度。现在看看使差分解振荡的数值边界条件

$$B(v_0^n)\equiv v_0^n=0$$

其截断误差为

$$\tau(u_0^n)\equiv u_0^n=O(\Delta x^0)\quad 当\Delta x\to 0$$

因此 $p=-1$，即此数值边界条件与微分方程定解问题不相容。

三、正态模式分析 (Normal Mode Analysis)[7]

设二层齐次线性差分近似写为

$$\vec{U}^{n+1}=C\vec{U}^n \tag{3-5-11}$$

命解

$$\vec{U}^n=z^n\vec{\phi} \tag{3-5-12}$$

其中 z 为复数，ϕ 是与 U 维数相同的向量，把式(3-5-12)代入式(3-5-11)得到预解式方程

$$C\vec{\phi}=z\vec{\phi} \tag{3-5-13}$$

式(3-5-13)即为差分算子 C 之特征值问题，z 是特征值，$\vec{\phi}$ 是特征向量，式(3-5-12)称为特征解，寻找特征解叫作正态模式分析，这就是稳定性分析的基本方法。这种方法可应用于分析齐次线性边界差分格式，也可应用于多层齐次线性差分格式的分析。

现在考虑问题(3-5-4)、(3-5-5)、(3-5-6)，取以下三种数值边界条件：

$$v_0^{n+1}=v_0^n+\lambda(v_1^n-v_0^n) \tag{3-5-14}$$

$$v_0^n=2v_1^n-v_2^n \tag{3-5-15}$$

$$v_0^n=v_1^{n+1}+v_1^{n-1}-v_2^n \tag{3-5-16}$$

应用正态模式分析讨论上述问题可以直接得到稳定性必要条件。

四、戈杜诺夫一雅宾克稳定性必要条件[8,17]

定理一 差分近似式（3-5-4）～（3-5-6）与边界格式（3-5-14）或（3-5-15）或（3-5-16）不稳定，如果存在以下形式的特征解：

$$v_j(t) \equiv v_j^n = z^n \phi_j \quad j = 0, 1, 2 \cdots \qquad (3\text{-}5\text{-}17)$$

其中$|z|>1$，$\|\phi\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\phi_j|^2 \Delta x < \infty$。

证明 由 $t = n\Delta t$，对任一指定的 t 值，当 $\Delta t \to 0$ 时有 $n \to \infty$，当$|z|>1$时有 $z^n \to \infty$，因此特征解 $v(t)$ 的范数无界。

由此定理可知，为了考查稳定性，必须寻找差分近似的特征值和特征解。

五、预解式方程和特征方程[8]

考虑差分近似式（3-5-4）～（3-5-6）与边界格式(3-5-14)～（3-5-16）之一结合时是否有$|z|>1$的特征解。把式（3-5-17）代入内点差分格式（3-5-4）得到预解式方程

$$(z^2 - 1)\phi_j = \lambda z(\phi_{j+1} - \phi_{j-1}) \qquad (3\text{-}5\text{-}18)$$

这是关于 ϕ 的二阶线性常差分方程，其普遍解为

$$\phi_j = \sigma_1 \kappa_1^j + \sigma_2 \kappa_2^j \qquad (3\text{-}5\text{-}19)$$

其中 σ_1、σ_2 为常系数，κ_1、κ_2 为下列特征方程

$$(z^2 - 1)\kappa = \lambda z(\kappa^2 - 1) \qquad (3\text{-}5\text{-}20)$$

之二根。关于特征根κ_1、κ_2 的性质有下列定理。

定理二 当$|z|>1$时，方程（3-5-20）没有$|\kappa|=1$之根，二根中必有一个 κ_1 满足$|\kappa_1|<1$，另一个 κ_2 满足$|\kappa_2|>1$，当$|z|\to\infty$时还有 $\kappa_1 \to 0$ 、$\kappa_2 \to \infty$。

证明 假设有一根 κ 满足$|\kappa|=1$，可写为 $\kappa = e^{i\theta}$，θ 为实数，代入式（3-5-20）有

$$z^2 - 1 = \lambda z(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = 2i\lambda z \sin\theta$$

$$z = i\lambda\sin\theta \pm \sqrt{1-\lambda^2\sin^2\theta}$$

已设$\lambda = \Delta t/\Delta x < 1$，于是有$|z| = 1$，这与定理假定$|z| > 1$矛盾。所以方程（3-5-20）没有$|\kappa| = 1$之根，式（3-5-20）可改写为

$$\kappa^2 - \kappa\frac{z^2-1}{\lambda z} - 1 = 0$$

由$\kappa_1\kappa_2 = -1$，故必有一根κ_1满足$|\kappa_1| < 1$，另一根κ_2满足$|\kappa_2| > 1$。当z在$|z| > 1$范围内变化时，二根κ_1、κ_2分别保持其模小于1或大于1之性质，以κ_1代入式（3-5-20）可写为

$$\frac{1}{z}\kappa_1^2 - \frac{1}{\lambda}\kappa_1 + \frac{1}{\lambda z^2}\kappa_1 - \frac{1}{z} = 0$$

由于$|\kappa_1| < 1$，当$|z| \to \infty$时有$\kappa_1 \to 0$。以κ_2代入式(3-5-20）并写为

$$\frac{1}{z}\kappa_2 - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda z^2} - \frac{1}{z\kappa_2} = 0$$

由于$|\kappa_2| > 1$，当$|z| \to \infty$时有$\kappa_2 \to \infty$。

再回到寻找特征解的问题，因为要求$\|\phi\| < \infty$，所以普遍解（3-5-19）中应去掉$\sigma_2\kappa_2^j$项，于是预解式方程（3-5-18）的普遍解写为

$$\phi_j = \sigma_1\kappa_1^j \qquad (3\text{-}5\text{-}21)$$

内点差分格式（3-5-4）的特征解写为

$$v_j^n = z^n\sigma_1\kappa_1^j \qquad (3\text{-}5\text{-}22)$$

其中$|z| > 1$，$|\kappa_1| < 1$。现在考查数值边界条件式（3-5-14）～（3-5-16）是否容许这种特征解，以式（3-5-22）代入式（3-5-14）～（3-5-16）有

$$E(z)\sigma_1 = 0 \qquad (3\text{-}5\text{-}23)$$

对于三种边界条件，$E(z)$分别为

$$E(z) = z - 1 - \lambda(\kappa_1 - 1)$$

$$E(z) = (1-\kappa_1)^2$$

$$E(z) = z - (z^2+1)\kappa_1 + z\kappa_1^2$$

可以证明，当$|z|>1$、$|\kappa_1|<1$时都有$E(z)\neq 0$，因此$\sigma_1=0$。这就是说，当内点格式（3-5-4）与边界格式（3-5-14）～（3-5-16）结合时没有$|z|>1$的特征解，从而满足戈杜诺夫－雅宾克的稳定性必要条件，但这样的差分近似是否真正稳定呢？答案是不一定。如取差分近似式（3-5-4）～（3-5-6）及（3-5-15）为例，命$\lambda=\Delta t/\Delta x=1$，取初值

$$v_j^0=\begin{cases}1 & \text{当 } j=1\\ 0 & \text{当 } j>1\end{cases}$$

$$v_j^1=0 \qquad j=1,\ 2,\ 3\cdots$$

这时差分解为

$$v_j(t)=v_j^n=\begin{cases}0 & \text{当 } j\geqslant n\\ (-1)^n(n-j) & \text{当 } j<n\end{cases}\quad n\geqslant 2$$

这里$t=n\Delta t$，当$\Delta t\to 0$时有$n\to\infty$，于是有

$$\|v(t)\|^2=\sum_{j=0}^{\infty}|v_j(t)|^2\Delta x=\Delta x\sum_{j=0}^{n-1}(n-j)^2=0(n^2)$$

这说明差分近似式（3-5-4）～（3-5-6）及（3-5-15）并不稳定。这里差分解在$x<t$区域内沿t方向不断增长而且振荡，其分布情况如图3-6所示。

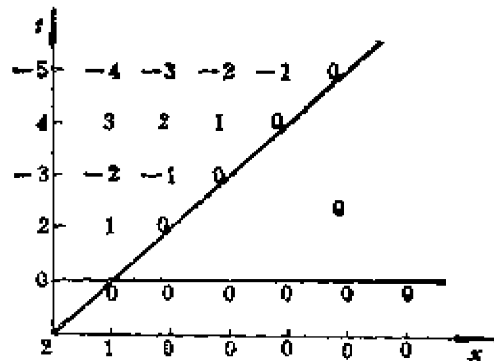


图3-6　差分解分布情况

第六节　二层显式差分近似的稳定性[5]

一、问题的提法

考虑一阶线性常系数双曲型方程组的适定问题

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}=\mathbf{A}\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \qquad x\geqslant 0,\quad t>0 \qquad (3\text{-}6\text{-}1)$$

$$\vec{U}(x,\ 0)=\vec{f}(x) \quad x\geqslant 0 \qquad (3\text{-}6\text{-}2)$$

$$\vec{U}^{\mathrm{I}}(0,\ t)=\mathbf{S}\vec{U}^{\mathrm{II}}(0,\ t) \qquad t\geqslant 0 \qquad (3\text{-}6\text{-}3)$$

其中$\vec{U}(x,\ t)=(u_1(x,t),\ u_2(x,t),\ \cdots,\ u_m(x,\ t))^T$，$\mathbf{A}$为$m$阶常数矩阵并有以下假定。

假定1　矩阵$\mathbf{A}$非奇异且有形式

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}^{\mathrm{I}} & 0\\ 0 & \mathbf{A}^{\mathrm{II}}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{A}^{\mathrm{I}}=\begin{pmatrix}a_1 & & & 0\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_l\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{II}}=\begin{pmatrix}a_{l+1} & & & 0\\ & a_{l+2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_m\end{pmatrix}$$

其中　$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_l<0<a_{l+1}\leqslant a_{l+2}\leqslant\cdots\leqslant a_m$。相应地向量函数$\vec{U}$分解为二部分，其中

$$\vec{U}^{\mathrm{I}}=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_l)^T$$

$$\vec{U}^{\mathrm{II}}=(u_{l+1},\ u_{l+2},\ \cdots,\ u_m)^T$$

在左边界$x=0$，$\vec{U}^{\mathrm{I}}$称为流入向量，$\vec{U}^{\mathrm{II}}$称为流出向量。式(3-6-3)为边界条件，其中$\mathbf{S}$为$l\times(m-l)$阶常数矩阵，式(3-6-3)实际为l个方程。

对式(3-6-1)～(3-6-3)采用差分方法求解，在$x\geqslant 0$，$t\geqslant 0$区域内建立差分网格，时间步长为$\Delta t>0$，空间步长为$\Delta x>0$，命$\lambda=\Delta t/\Delta x=\text{const}$，引入记号$x_\nu=\nu\Delta x$，$\vec{V}_\nu(t)=\vec{V}(x_\nu,\ t)$表示差分解。二层显式差分近似为

$$\vec{V}_\nu(t+\Delta t)=\sum_{j=-r}^{p} A_j\vec{V}_{\nu+j}(t),\qquad \nu=1,2,\cdots \tag{3-6-4}$$

$$\vec{V}_\nu(0)=\vec{f}_\nu\quad \nu=1,\ 2,\ \cdots \tag{3-6-5}$$

$$\vec{V}_\mu(t)=\sum_{j=1}^{d} C_{j\mu}\vec{V}_j(t)$$

$$\mu=0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ -r+1 \tag{3-6-6}$$

其中 A_j、$C_{j\mu}$ 皆为 m 阶常数矩阵，d 为正整数，关于 p、r 有以下假定。

假定 2　p、r 为整数而且 $p\geqslant 1$、$r\geqslant 0$，矩阵 A_p、A_{-r} 非奇异。

差分边界条件（3-6-6）有 mr 个方程，其中 l 个为式(3-6-3)的 l 个定解条件，另外 $mr-l$ 个为补充的数值边界条件。差分格式（3-6-4）应与微分方程（3-6-1）相容，即 A_j 应满足，

$$\sum_{j=-r}^{p} A_j=I \tag{3-6-7}$$

$$\sum_{j=-r}^{p} jA_j=\lambda A \tag{3-6-8}$$

I 是单位矩阵。当考虑纯初值问题时，差分格式（3-6-4）的放大矩阵为[4]

$$G(\theta)=\sum_{j=-r}^{p} A_j e^{ij\theta} \tag{3-6-9}$$

关于放大矩阵有以下假定。

假定 3　存在一个常数 δ 及一个正整数 s_1，$\delta>0$。当 $0\leqslant|\theta|\leqslant\pi$ 时，$G(\theta)$ 之特征值 $\mu(\theta)$ 满足

$$|\mu(\theta)|\leqslant 1-\delta|\theta|^{2s_1} \tag{3-6-10}$$

即格式（3-6-4）为 $2s_1$ 阶耗散格式。

假定 4　对任意实数 θ，放大矩阵 $G(\theta)$ 之模不大于 1，即

$$|G(\theta)|\leqslant 1 \qquad (3\text{-}6\text{-}11)$$

这就是说，差分格式（3-6-4）的纯初值问题稳定，以此为基础讨论初边值问题的稳定性。实际上，一个差分格式的纯初值问题稳定是其初边值问题稳定的必要条件。

二、戈杜诺夫—雅宾克稳定性必要条件

规定所有网格函数组成一个复线性空间 H，网格函数 $\vec{w}=(w_{-r+1}, w_{-r+2}, \cdots, w_0, w_1, w_2\cdots)$，$w_\nu$ 满足边界格式（3-6-6），而且

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |w_\nu|^2 \Delta x<\infty$$

引入内积与范数定义

$$(u, v)_{\Delta x}=\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu^* v_\nu \Delta x$$

$$\|u\|_{\Delta x}^2=(u, u)_{\Delta x}$$

这样 H 成为一个希尔伯特（Hilbert）空间。按初值问题方式定义稳定性如下。

定义 差分格式（3-6-4）是稳定的，如果存在一个与 Δt 无关的常数 K，使得

$$\|v(t)\|_{\Delta x}\leqslant K\|v(0)\|_{\Delta x} \qquad (3\text{-}6\text{-}12)$$

对所有 $t=n\Delta t$ 和任意初值 $v(0)$ 皆成立，这里 $v(0)\in H$。

现在差分格式（3-6-4）可以写为 H 空间中的算子形式

$$v(t+\Delta t)=Qv(t), \quad v(t), \quad v(t+\Delta t)\in H \qquad (3\text{-}6\text{-}13)$$

定理一 差分近似稳定的一个必要条件是算子 Q 没有模大于1的特征值。

证明 如 Q 有一个特征值 z_0，$|z_0|>1$，即在 H 中有非零之 g 使得

$$Qg=z_0 g, \quad g\in H \qquad (3\text{-}6\text{-}14)$$

则 $z_0^{t/\Delta t}g$ 为式（3-6-13）的一个解，其初值 $g\in H$。设 $t=n\Delta t$，$z_0^{t/\Delta t}g=z_0^n g$，对于指定的 t 值，当 $\Delta t\to 0$ 时有 $n\to\infty$，又 $|z_0|>1$，所以解随时间步数指数增长，因而式（3-6-12）不成立。

按照正态模式分析方法，对方程（3-6-13）命解

$$\vec{V}_\nu(t)=z^n\vec{\phi}_\nu \tag{3-6-15}$$

ϕ_ν 也是 m 维向量而且 $\phi\in H$，以式（3-6-15）代入式（3-6-4）、（3-6-6）有预解式方程

$$\sum_{j=-r}^{p} A_j\phi_{\nu+j}=z\phi_\nu,\quad \nu=1,\ 2,\ \cdots \tag{3-6-16}$$

$$\phi_\mu=\sum_{j=1}^{d} c_{j\mu}\phi_j,\quad \mu=0,\ -1,\ -2,\ \cdots,\ -r+1 \tag{3-6-17}$$

式（3-6-16）是关于网格函数 ϕ 的线性常差分方程，其相应的特征方程是

$$\det\left|\sum_{j=-r}^{p} A_j\kappa^j-zI\right|=0 \tag{3-6-18}$$

指定 z 值后由式（3-6-18）求 κ 称为广义特征值问题。克莱士（Kriss）[5]证明了，在 $|z|\geqslant 1$、$z=1$ 时，式（3-6-18）没有 $|\kappa|=1$ 之根，它有 mr 个特征值 κ_1 满足 $|\kappa_1|<1$，又有 mp 个特征值 κ_2 满足 $|\kappa_2|>1$。常差分方程（3-6-16）的 mr 个线性独立解由模小于 1 的 mr 个特征值构成，记为 ψ_j，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ mr$。这里允许有 κ_1 重根情况。式（3-6-16）的普遍解写为

$$\vec{\phi}_\nu=\sum_{j=1}^{mr}\vec{p}_j\sigma_j\psi_j \tag{3-6-19}$$

其中 p_j 为 m 维常向量，σ_j 为待定参数。式（3-6-19）代入边界条件（3-6-17）得到含 σ_j 之线性齐次方程组，记为

$$E(z)\vec{\sigma}=0,\quad \vec{\sigma}=(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_{mr})^T \tag{3-6-20}$$

其中 $E(z)$ 为 mr 阶矩阵，$\vec{\sigma}$ 为 mr 维向量。这样稳定性必要条件

可表述为明确的代数形式

$$\det E(z)\neq 0 \quad 当|z|>1 \qquad (3\text{-}6\text{-}21)$$

三、克莱士稳定性充分条件

1968年克莱士的文章[5]在初边值问题研究领域是一个重要的里程碑，其主要贡献是得到了稳定性的充分条件，这里只介绍他的理论结果。

定理二 在上述问题提法中假定1～4成立时，如果以下行列式条件成立

$$\det E(z)\neq 0 \quad 当|z|\geqslant 1 \qquad (3\text{-}6\text{-}22)$$

则差分近似式（3-6-4）、（3-6-5）、（3-6-6）稳定。

条件（3-6-22）表明，差分算子Q没有$|z|\geqslant 1$的特征值。它与稳定性必要条件（3-6-21）的差别是增加了

$$\det E(z)\neq 0 \quad 当|z|=1 \qquad (3\text{-}6\text{-}23)$$

的限制。

四、应 用 例

考虑定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial u}{\partial x},\quad a>0,\quad t>0,\quad x\geqslant 0 \qquad (3\text{-}6\text{-}24)$$

$$u(x,\ 0)=f(x),\quad x\geqslant 0 \qquad (3\text{-}6\text{-}25)$$

采用拉克斯—温得诺夫格式（LW格式）

$$v_i^{n+1}=(1-r^2)v_i^n+\frac{1}{2}(r+r^2)v_{i+1}^n+\frac{1}{2}(r^2-r)v_{i-1}^n \qquad (3\text{-}6\text{-}26)$$

这里$r=a\Delta t/\Delta x$，并设$0<r<1$。差分解

$$v_i^n=v(x_i,\ t_n)=v(i\Delta x,\ n\Delta t)$$

为了差分计算，在$x=0$必须补充数值边界条件。考虑5种给法为

（1）$v_0^n=v_1^n$ (3-6-27)

（2）$v_0^n = 2v_1^n - v_2^n$ （3-6-28）

（3）$v_0^{n+1} = v_0^n + r(v_1^n - v_0^n)$ （3-6-29）

（4）$v_0^{n+1}(1+r) + v_1^{n+1}(1-r)$

$= v_0^n(1-r) + v_1^n(1+r)$ （3-6-30）

（5）$v_0^{n+1} = v_1^n$ （3-6-31）

当 $0 < r < 1$ 时，本节问题提法中假定 1～4 皆成立，式（3-6-26）的预解式方程为

$$z\phi_i = \phi_i + \frac{r}{2}(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) + \frac{r^2}{2}(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) \quad (3\text{-}6\text{-}32)$$

相应地特征方程为

$$z\kappa = \kappa + \frac{r}{2}(\kappa^2 - 1) + \frac{r^2}{2}(\kappa - 1)^2 \quad (3\text{-}6\text{-}33)$$

在 $|z| \geqslant 1$、$z \neq 1$ 范围内式（3-6-33）有二根 κ_1、κ_2 且 $|\kappa_1| < 1$、$|\kappa_2| > 1$，又 $\kappa_1\kappa_2 = (r-1)/(r+1)$，所以当 $|z| \geqslant 1$、$z \neq 1$ 时有 $|\kappa_1| < (1-r)/(1+r)$。当 $z = 1$ 时特征方程之二根为 $\kappa_1 = (r-1)/(r+1)$、$\kappa_2 = 1$，因此当 $|z| \geqslant 1$ 时有 $|\kappa_1| \leqslant (1-r)/(1+r) < 1$。

以特征解 $v_i^n = z^n \sigma_1 \kappa_1^i$ 代入各边界条件有

$$E(z)\sigma_1 = 0 \quad (3\text{-}6\text{-}34)$$

$E(z)$ 分别为

（1）$E(z) = \kappa_1 - 1$

（2）$E(z) = (\kappa - 1)^2$

（3）$E(z) = z - 1 - r(\kappa_1 - 1)$

（4）$E(z) = z(1+r) + z\kappa_1(1-r)$

$-(1-r) - \kappa_1(1+r)$

（5）$E(z) = z - \kappa$

利用条件 $|\kappa_1| < 1$，可以证明当 $|z| \geqslant 1$ 时上列 5 种 $E(z) \neq 0$ 均成立，因而 LW 格式结合这 5 种边界条件之任一种皆是稳定的。

参考文献

1 Anderson D A, Tannehill J C, Pletcher R H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Hemisphere Publishing Corporation, 1984

2 Lax P. D and Wendroff B. Systems of Conservation Laws. Comm. Pure Appl. Math. 1960, 13: 217

3 Lax P. D and Richtmyer R. D. Survey of the stability of linear finite difference equations. Comm. Pure Appl. Math., vol. 9, 267

4 Richtmyer R D, Morton K W. Difference Methods for Initial-Value Problems. Second Edition. Interscience Publishers, 1967

5 Kreiss H O. Math Comp. 1968, 22, 703～714

6 Gustafsson B, Kreiss H O, Sundström A. Math. Comp., 1972, 26. 649～686

7 Warming R F, Beam R M. Lecture Notes on the stability and Accuracy of Difference Approximations for Initial-Boundary Value Problems. 1987

8 Kreiss H O. AGARD-Ls-64, 1973

9 Gustafsson B. Numerical Boundary Conditions, Lectures in Applied Mathematics. 1985, 22: 279～308

10 Goldberg M, Tadmor, E, Math. Comp. 1978, 32: 1097～1107

11 Trefethen L N. SIAM Review, 1982, 24: 113～136

12 Goldberg M, Tadmor E. Math. Comp. 1981, 36: 603～626

13 Goldberg M, Tadmor E. Math. Comp. 1985, 44: 361～377

14 Abarbanel S S, Murman E M. J. Comput. Phys. 1982, 48: 160～167

15 Michelson, D. Math. Comp. 1983, 40, 1～46

16 Thuné M. SIAM J. Sci. STAT. Comput. 1986, 7, 959～977

17 Годунов С К и Рябенький В С. Спектральные признаки устойчивости краевых задач для несамосопряженных разностных уравнений УМН X, VIII 1963 (3), 3～14

第四章　气动方程的差分逼近

第一节　模型方程的差分逼近

流体力学中的基本方程都是很复杂的非线性偏微分方程组。在讨论计算方法和提出新的差分格式时通常通过一些模型方程来进行分析。在本节中将通过模型方程介绍一些相应的差分逼近方法。这些模型方程包括单波方程、扩散方程、伯格斯（Burgers）方程、拉普拉斯方程等。这些方程都比较简单，在很多情况下可以求出精确解，因而可很容易地考查格式的逼近精度。此外，这些模型方程在一定程度上反映了气动方程的部分特性。例如，单波方程部分地反映了气动方程中波的传播特性，扩散方程可用以模拟附面层方程，而伯格斯方程是研究$N-S$方程差分逼近的一个很好的模型方程。

在本节中将主要介绍逼近模型方程的几个经典方法及一些格式的特点，关于逼近于气动方程的一些方法将在后几节中讨论。由于戈杜诺夫（Годунов）方法有其独特的特点，因而将在单独一节中讨论。近十年来激波捕捉技术有了很大进展，关于提高数值解分辨率的一些方法将在第五、六章中讨论。有关差分方程的求解及求解效率的改进将在第七章中讨论。

一、单波方程的差分逼近

设有单波方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad c=\text{常数}>0 \tag{4-1-1}$$

现考虑纯初值问题，设有初值

$$u(x,\ 0)=F(x)\quad(-\infty<x<+\infty) \tag{4-1-2}$$

则其准确解为

$$u(x, t)=F(x-ct) \tag{4-1-3}$$

为便于以后的讨论，现做如下定义

$$\left.\begin{aligned}&\delta_t u^{n+1}=u^{n+1}-u^n\\&\delta_x^+ u_j=u_{j+1}-u_j,\quad \delta_x^0=\frac{1}{2}(\delta_x^+ +\delta_x^-)\\&\delta_x^- u_j=u_j-u_{j-1},\quad \delta_x^2=\delta_x^+\delta_x^-=\delta_x^-\delta_x^+\end{aligned}\right\} \tag{4-1-4}$$

$$\delta_x^b u_j=\frac{1}{2}(3\delta_x^- u_j-\delta_x^- u_{j-1})$$

$$\delta_x^f u_j=\frac{1}{2}(3\delta_x^+ u_j-\delta_x^+ u_{j+1})$$

$$\delta_x^c u_j=\frac{\delta_x^0}{1+\frac{1}{6}\delta_x^2}u_j \tag{4-1-5}$$

最后一式通常称为紧致差分逼近，其展开的具体表达式为

$$\frac{1}{6}\delta_x^c u_{j-1}+\frac{2}{3}\delta_x^c u_j+\frac{1}{6}\delta_x^c u_{j-1}=\delta_x^0 u_j$$

当已知 u_j 的分布，为求得 $\delta_x^c u_j$ 是需要进行三对角矩阵求逆的。关于紧致差分逼近以后还将专门进行讨论。

当取定一个差分格式后，在相应点上进行泰勒级数展开后并对截断误差部分进行重新整理可得如下之修正方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial v}{\partial x}=\sum_{n=1}^{\infty}C_{2n}\frac{\partial^{2n}u}{\partial x^{2n}}+C_{2n+1}\frac{\partial^{2n+1}u}{\partial x^{2n+1}} \tag{4-1-6}$$

这里 C_{2n} 是偶次导数项的系数，C_{2n+1} 是奇次导数项之系数。在进行数值求解时人们以差分方程的解做为微分方程的近似解。差分方程的解实际上是对应的修正方程的准确解。在前一章曾提过，方程（4-1-6）之右端即为截断误差。在以后的讨论中有时以T.E.来代表截断误差。沃明和海特（Warming 和Hyett）[1]曾指出，差分方程稳定的必要条件是

$$(-1)^l C_{2l}>0 \tag{4-1-7}$$

这里C_{2l}是最低非零偶次导数的系数。在第六章将会看到，如何控制差分方程的耗散误差（偶次导数项）和色散误差（奇次导数项）对改善数值解的行为是很重要的。

在利用冯·诺伊曼（Von Neumann）方法进行稳定性分析时曾注意到，差分方程的放大因子由两部分组成，其一为模，另一为对应的相位角。分析差分格式放大因子之模及相位角与精确解的对应量的关系，对了解格式的品质是很有好处的。

人们针对单波方程构造了很多差分格式，这里不一一列举，仅对部分常用的有代表性的格式做进一步讨论。

（一）拉克斯（Lax）格式

$$u_i^{n+1}=\frac{u_{i+1}^n+u_{i-1}^n}{2}-\gamma\delta_x^0 u_i^n \tag{4-1-8}$$

$$T.E.=\frac{c\Delta x}{2}\left(\frac{1}{\gamma}-\gamma\right)u_{xx}+\frac{c(\Delta x)^2}{3}(1-\gamma^2)u_{xxx}+\cdots \tag{4-1-9}$$

$$G=\cos(\beta)-i\gamma\sin(\beta) \tag{4-1-10}$$

式中

$$\gamma=c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

通常称其为库朗（Courant）数，并以CFL表示之（Courant，Friedrichs和Lewy三人名字的字头）。该格式只有一阶逼近精度，稳定条件是：

$$\left|c\frac{\Delta t}{\Delta x}\right|\leqslant 1 \tag{4-1-11}$$

由于该格式精度太低，实践中很少被采用。

（二）两点迎风格式

$$u_i^{n+1}=u_i^n-\gamma\delta_x^- u_i^n \tag{4-1-12}$$

$$T.E.=\frac{c\Delta x}{2}(1-\gamma)u_{xx}-\frac{c(\Delta x)^2}{6}(2\gamma^2-3\gamma+1)u_{xxx}+\cdots \tag{4-1-13}$$

$$G = 1 + \nu[\cos(\beta) - 1] - i\nu\sin(\beta) \qquad (4\text{-}1\text{-}14)$$

式（4-1-12）仅适于系数 $c \geqslant 0$ 的情况，对一般情况

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \nu\delta_x^0 u_j^n + \frac{|\nu|}{2}\delta_x^2 u_j^n \qquad (4\text{-}1\text{-}15)$$

这一格式的稳定条件仍是CFL≤1。

可将放大因子G写成如下形式：

$$G = |G|e^{i\varphi}$$

则

$$|G| = \{[1 - \nu + \nu\cos(\beta)]^2 + [\nu\sin(\beta)]^2\}^{1/2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left[\frac{\mathrm{Im}(G)}{\mathrm{Re}(G)}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{-\nu\sin(\beta)}{1 - \nu + \nu\cos(\beta)}\right]$$

现来看一下对应波动方程的准确基本解、准确基本解的放大因子及其相位角，与差分方程的对应量进行比较。对应于方程(4-1-1)的基本解为

$$u = e^{ik_m(x-ct)}$$

准确的放大因子为

$$G_e = \frac{u(t+\Delta t)}{u(t)} = \frac{e^{ik_m(x-c(t+\Delta t))}}{e^{ik_m(x-ct)}} = e^{i\varphi_e}$$

$$\varphi_e = -k_m c\Delta t = -\beta\nu$$

因而准确解放大因子的模为1，推进一个时间步长差分方程对微分方程的相对相位差为

$$\frac{\varphi}{\varphi_e} = \frac{\tan^{-1}\{[-\nu\sin(\beta)]/[1 - \nu + \nu\cos(\beta)]\}}{-\beta\nu}$$

在图 4-1 和图 4-2 中分别给出了两点迎风格式放大因子的模及相对相位差随β角的变化情况。从图 4-2 中可以看到，当$\nu = 0.5$时格式对高频（$\beta \approx \pi$）误差项有着较快的衰减作用。从图 4-2 中可以看到，当$0.5 < \nu < 1$时格式有着超前相位差（$\varphi/\varphi_e > 1$），当$0 < \nu < 0.5$时有着迟后相位差（$\varphi/\varphi_e < 1$）。

迎风格式的构造考虑到了波的传播特性，但由于精度低（一阶精度）和较强的耗散效应会使激波抹平，特别在逼近N-S方

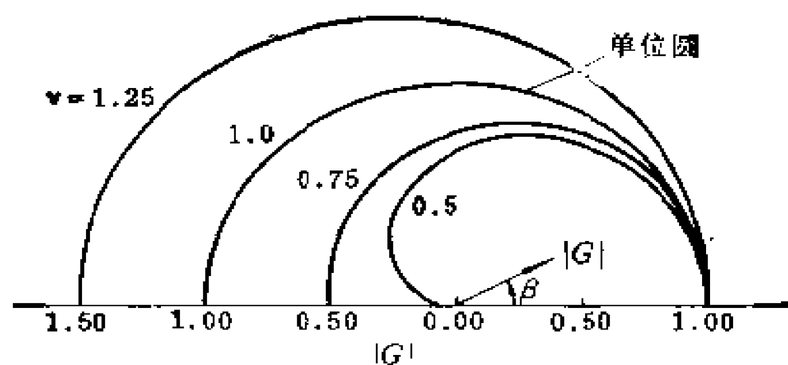


图4-1　两点迎风格式放大因子模的变化

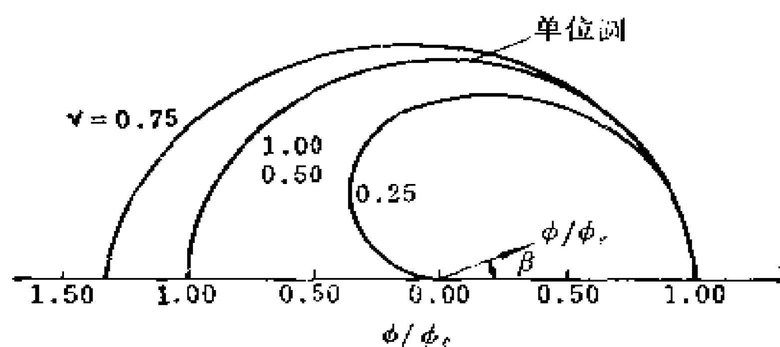


图4-2　两点迎风格式相对相位差变化情况

程的对流项时，由于差分化所引入的粘性会掩盖真实粘性的效应，因而在实践中很少被直接采用。在以后的第五、六章中会看到，它是建立高分辨率格式的一个基础格式。

（三）L-W格式（Lax-Wandroff格式）

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\nu\delta_x^0u_j^n+\frac{1}{2}(\nu)^2\delta_x^2u_j^n \tag{4-1-16}$$

$$T.E.=-c\frac{(\Delta x)^2}{6}(1-\nu^2)u_{xxx}-\frac{c(\Delta x)^3}{8}\nu(1-\nu^2)u_{xxxx}+\cdots$$

$$G=1-\nu^2(1-\cos\beta)-i\nu\sin\beta \tag{4-1-17}$$

$$\frac{\phi}{\phi_e}=\frac{\tan^{-1}\{-\nu\sin(\beta)/[1-\nu^2(1-\cos(\beta))]\}}{-\beta\nu}$$

该格式的稳定条件仍为 CFL≤1。不难验证，下面之两步L-W格式与单步格式（4-1-16）是等价的。

$$u^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(u^n_{j+1}+u^n_j)-\frac{\nu}{2}(u^n_{j+1}-u^n_j)$$

$$u^{n+1}_j=u^n_j-\nu\left(u^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}-u^{n+\frac{1}{2}}_{j-\frac{1}{2}}\right) \qquad (4\text{-}1\text{-}18)$$

在图 4-3 和图 4-4 中给出了L-W格式放大因子的模和相对相位差变化情况。从图中可看到，当$\sqrt{0.5}<\nu<1$时除高频波外迟后相位差占主导地位。

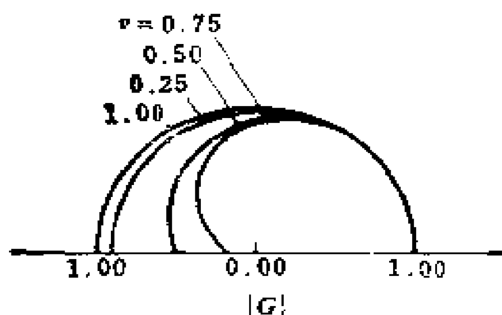


图 4-3　L-W格式放大因子模的变化

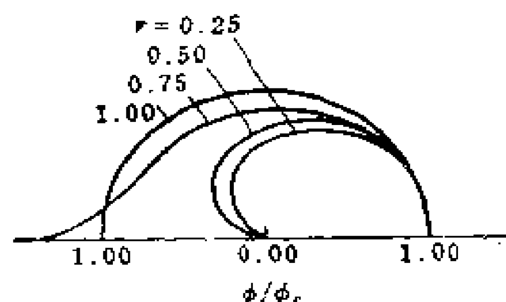


图 4-4　L-W格式相对相位差的变化

L-W格式是色散型的具二阶逼近精度的格式。在单步L-W格式中有含c^2的项出现，在对应于双曲型偏微分方程组的格式中将会遇到矩阵相乘的运算。相对来说，两步L-W格式更为简单。

（四）麦科马克（MacCormack）格式

$$u^{\overline{n+1}}_j=u^n_j-\nu\delta^+_x u^n_j$$

$$u^{n+1}_j=\frac{1}{2}(u^n_j+u^{\overline{n+1}}_j)-\frac{1}{2}\nu\delta^-_x u^{\overline{n+1}}_j \qquad (4\text{-}1\text{-}19)$$

对单波方程这一格式与L-W格式等价，这点只要将过渡层$u^{\overline{n+1}}$消

掉即可得到验证。因而对该格式的一切分析与L-W格式相同，这里不再重复。应当指出，这一格式比L-W格式更为简单，因为这里没有在半点上各量的计算。

（五）欧拉隐式时间后差格式

$$\delta_t u_j^{n+1} + \gamma \delta_x^0 u_j^{n+1} = 0 \qquad (4\text{-}1\text{-}20)$$

$$T.E = \Delta t \frac{c^2}{2} u_{xx} - \left[\frac{1}{6} c(\Delta x)^2 + \frac{1}{3} c^3(\Delta t)^2 \right] u_{xxx} + \cdots$$

$$G = \frac{1}{1 + i\gamma\sin(\beta)} \qquad (4\text{-}1\text{-}21)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi_e} = \frac{\tan^{-1}[-\gamma\sin(\beta)]}{-\beta\gamma}$$

该格式是无条件稳定的，即对任意步长比都是稳定的。在图4-5和图4-6中给出了这一格式放大因子的模和相对相位差的变化情况。从图中可以看出，这一格式对高频项有着大的迟后相位差。由于该格式对时间步长没有限制，因而常用来求解定常问题。在利用此格式时在每个时间层上需求解一联立代数方程组．有关求解方法将在第七章介绍。

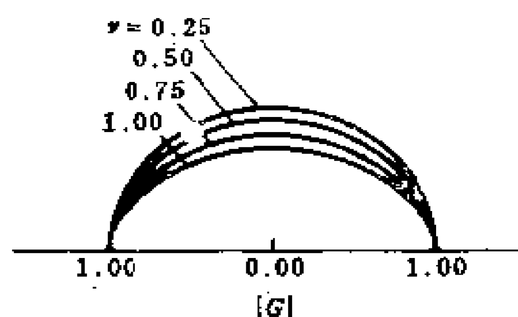


图4-5　欧拉时间后差格式放大因子模的变化

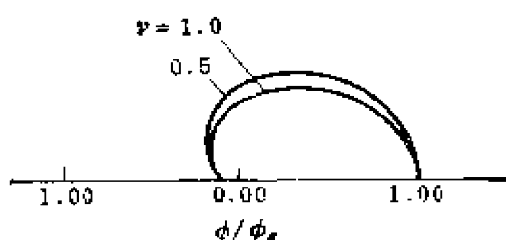


图4-6　欧拉时间后差格式相对相位差的变化

（六）时间中心隐式法（矩形公式）

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\gamma}{2}\delta_x^0 u_j^n - \frac{\gamma}{2}\delta_x^0 u_j^{n+1} \qquad (4\text{-}1\text{-}22)$$

$$T.E. = -\left[\frac{c^3 \Delta t^2}{12} + \frac{c\Delta x^2}{6} \right] u_{xxx} + \cdots$$

$$G=\frac{1-i\frac{\gamma}{2}\sin(\beta)}{1+i\frac{\gamma}{2}\sin(\beta)} \tag{4-1-23}$$

在图 4-7、4-8 中给出了有关该格式之放大因子的模和相对相位差变化情况。这格式是色散型的，即在$T.E$中只包括奇次导数项及 $|G|=1$，在实际计算中通常需加人工粘性项以平滑数值解中激波附近的非物理振荡。有关这一问题以后还将讨论。

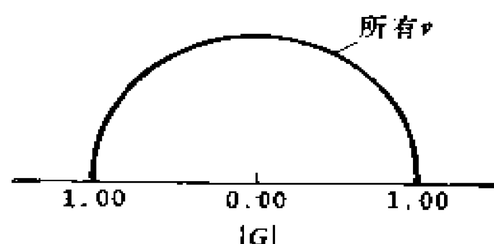


图4-7　矩形公式放大因子模的变化

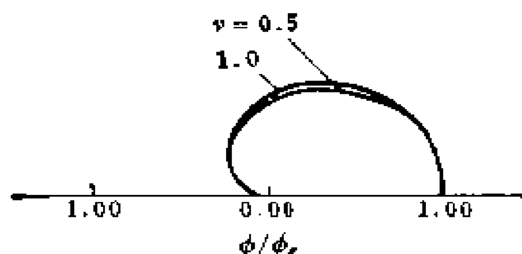


图4-8　矩形公式相对相位差变化

（七）错点半隐式格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\gamma}{2}\delta_x^- u_j^{n+1}-\frac{\gamma}{2}\delta_x^+ u_j^n \tag{4-1-24}$$

$$T.E.=O(\Delta t^2,\ \Delta x^2)$$

$$G=\frac{1+\frac{\gamma}{2}[1-\cos(\beta)]-i\frac{\gamma}{2}\sin(\beta)}{1+\frac{\gamma}{2}[1-\cos(\beta)]+i\frac{\gamma}{2}\sin(\beta)}$$

可以说这是一个最简单且具有二阶逼近精度的格式。它形为隐式实为显式，可按 j 之增长方向将解显式地求解出来。在文献[2]中曾对这一方法进行了讨论。可构造与式（4-1-24）类似的格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\gamma}{2}\delta_x^- u_j^n-\frac{\gamma}{2}\delta_x^+ u_j^{n+1} \tag{4-1-25}$$

对式（4-1-24）当 $c\frac{\Delta t}{\Delta x}=-2$．对式(4-1-25)当 $c\frac{\Delta t}{\Delta x}=+2$ 时将无法求出u_i^{n+1}，因此时其系数为零。这一问题可通过以后介绍的系数分裂法来解决。

这也是一个色散型的格式，数值解在激波附近同样出现非物理的振荡现象。

二、扩散方程的差分逼近

设有热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4-1-26}$$

这是一抛物型方程，可用以参照构造逼近于附面层方程的差分格式。这里只介绍两种差分逼近方法。

（一）显式格式

$$u_i^{n+1}=u_i^n+r\delta_x^2 u_i^n \tag{4-1-27}$$

$$T.E=\left[-\frac{\sigma^2\Delta t}{2}+\frac{\sigma(\Delta x)^2}{12}\right]u_{xxxx}+\cdots$$

$$G=1+2r[\cos(\beta)-1] \tag{4-1-28}$$

稳定条件 $\qquad r=\sigma\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\leqslant\frac{1}{2}$

这一显式格式极为简单。由于稳定性的限制要求$\Delta t\sim\Delta x^2$，这给实际应用，特别是求解定常问题带来很大困难。因为过小的时间步长大大增加了求解定常问题的计算工作量，因而实践中多采用隐式格式。

（二）隐式格式

$$u_i^{n+1}=u_i^n+r[\theta\delta_x^2 u_i^{n+1}+(1-\theta)\delta_x^2 u_i^n] \tag{4-1-29}$$

$$T.E.=\left[\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\sigma^2\Delta t+\frac{\sigma\Delta x^2}{12}\right]u_{xxxx}+\cdots$$

$$G=\frac{1+2r(\theta-1)[1-\cos(\beta)]}{1+2r\theta[1-\cos(\beta)]} \tag{4-1-30}$$

$\frac{1}{2}\leqslant\theta\leqslant 1 \qquad$ 无条件稳定

$$0 \leqslant \theta < \frac{1}{2} \quad 条件稳定 \; 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2-4\theta}$$

当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时即为克朗克-尼科尔森（Crank-Nicolson）格式.

当取不同的参数值 θ 时可将不同精度的逼近形式如

$$\theta = \frac{1}{2} \qquad\qquad T.E. = O[\Delta t^2, \ \Delta x^2]$$

$$\theta = \frac{1}{2} - \frac{\Delta x^2}{12\sigma\Delta t} \qquad T.E. = O[\Delta t^2, \ \Delta x^4]$$

隐式法需求解联立代数方程组，可用第七章介绍的追赶法进行求解。

三、伯格斯方程的差分逼近

所讨论的模型方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4-1-31}$$

其中 $f = f(u)$。这是N-S方程的一个较好的模型，空间一阶导数项可用以模拟N-S方程中的无粘项，二阶导数项可用以模拟N-S方程中的粘性项。对特殊选定的初始和边界条件及特别选定的函数 f 可得到微分方程的准确解，这对考查方法的精度是很有好处的。例如当

$$f = \frac{u^2}{2}, \quad u(0, \ t) = u_0, \quad u(L, \ t) = 0 \tag{4-1-32}$$

时其定常问题的准确解为

$$u = u_0 \bar{u} \left\{ \frac{1 - \exp\left[\bar{u}\mathrm{Re}_L\left(\frac{x}{L} - 1\right)\right]}{1 + \exp\left[\bar{u}\mathrm{Re}_L\left(\frac{x}{L} - 1\right)\right]} \right\} \tag{4-1-33}$$

其中

$$\mathrm{Re}_L = \frac{u_0 L}{\mu}, \qquad \frac{\bar{u} - 1}{\bar{u} + 1} = \exp(-\bar{u}\mathrm{Re}_L)$$

针对模型方程（4- -31）比较早期有布拉依洛夫斯卡娅（Браиловская）格式[3]和阿伦-程（Allen-Cheng）格式[4]。后者是前者的改进，克服了粘性项对稳定性的限制，但只可用来求解定常问题。目前这两种方法不再多用，这里不做介绍，现只介绍显式的麦科马克格式。逼近于方程（4-1-31）的具有二阶精度的麦科马克格式为

$$u_i^{\overline{n+1}} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^+ f_i^n + r\delta_x^2 u_i^n$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_i^n + u_i^{\overline{n+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^- f_i^{\overline{n+1}} - r\delta_x^2 u_i^{\overline{n+1}}\right] \quad (4\text{-}1\text{-}34)$$

$$T.E. = O[\Delta t^2,\ \Delta x^2]$$

塔内希尔（Tannehill）在文献[6]中给出了一个有关稳定性的经验公式

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta x^2}{|A|\Delta x + 2\mu} \quad (4\text{-}1\text{-}35)$$

这里 $A = f_u$。

这里没有介绍相应的L-W格式，因为两步L-W格式需计算半网格点上的量，这将给粘性项的计算带来困难。相对来说，麦科马克格式比较简单，但为了消除稳定性对时间步长的限制，求解N-S方程时主要采用隐式法。

四、拉普拉斯方程的差分逼近

模型方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4\text{-}1\text{-}36)$$

这里只给出两个逼近方法。

（一）五点公式

$$\frac{\delta_x^2 u_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_y^2 u_{i,j}}{\Delta y^2} = 0 \quad (4\text{-}1\text{-}37)$$

$$T.E. = O[\Delta x^2,\ \Delta y^2]$$

$$\delta_y^2 u_{i,j} = u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}$$

(二）九点公式

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left[\frac{1-\theta}{2}\delta_x^2 u_{i,j+1}+\theta\delta_x^2 u_{i,j}+\frac{1-\theta}{2}\delta_x^2 u_{i,j-1}\right]$$
$$+\frac{1}{\Delta y^2}\left[\frac{1-\theta}{2}\delta_y^2 u_{i+1,j}+\theta\delta_y^2 u_{i,j}+\frac{1-\theta}{2}\delta_y^2 u_{i-1,j}\right]=0$$

(4-1-38)

$$T.E.=O(\Delta x^2,\ \Delta y^2),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1$$

对椭圆型方程的差分逼近最后将得到一代数方程组，有关其求解方法将在第七章中讨论。

五、网格与网格比

单波方程的精确解式（4-1-3）表明初始时刻的扰动将以有限速度传播。单波方程的各种显式格式的稳定性都对CFL数有一定限制，这与物理上信息是以有限速度传播是一致的。这表明在 $t=0$ 时刻之扰动在 t 时刻的影响域是有限的，反之 t 时刻某点在 $t=0$ 时的依赖域也是有限的。

从单波方程的一些逼近式中可以看出，当CFL数取特定值时将会得到特别简单的表达式。例如对拉克斯格式，两点迎风格式、L-W格式以及麦科马克格式等，当取

$$|c|\frac{\Delta t}{\Delta x}=1$$

时有关系

$$u_i^{n+1}=u_{i-1}^n \qquad (c>0，对迎风格式)$$
$$u_i^{n+1}=u_{i+1}^n \qquad (c<0，对迎风格式)$$

对错点格式

$$u_{i-1}^{n+1}=u_{i+1}^n \qquad -c\frac{\Delta t}{\Delta x}=2,\quad c<0$$

$$u_{i+1}^{n+1}=u_{i-1}^n \qquad c\frac{\Delta t}{\Delta x}=2,\quad c>0$$

不难看出，在这种特殊情况下，差分解即为微分方程的准确解.如果单波方程的差分逼近式当取特定步长此时有关系式

$$u_j^{n+1}=u_{j\pm k}^n, \quad k \text{——整数} \tag{4-1-39}$$

称这一格式具有平移特性[7]。在应用中方程中的系数 c 是变的，因而不可能在整个空间使平移条件得到满足，对多维问题更是如此。无疑对这类格式，如果步长比的选择使平移条件尽可能的满足将是有益的。在第七章中还将提到这一问题。

现在来讨论关于逼近于扩散方程的差分格式与步长之间的关系。众所周知，对热传导方程如果某时刻有一扰动，则该扰动将立即传满整个空间。这表明这类问题扰动是以无限速度传播的，因而某点的影响域和依赖域都是整个物理空间。对显式格式稳定性要求 $\Delta t\approx\Delta x^2$，这里时间增量 Δt 与空间步长 Δx 已不是简单的成正比关系，这与物理上扰动传播速度是一致的。对一般隐式格式，t 时刻在 $t=0$ 时的依赖域是整个计算空间，因而隐式格式多是稳定的。

第二节　一维气动方程及雅可比(Jacobian)系数矩阵的分裂

本书所针对的实际问题主要是超声速和高超声速粘性绕流流场的数值模拟，重点是正确模拟具有激波、激波-边界层相互干扰以及分离流动等复杂粘性流场。为了解决这类问题，关键在于是否能正确模拟间断面，如激波和切向间断等。因这种复杂流场结构事先是不知道的，所以需要采用激波捕捉技术，为此要求所选用的计算方法对流场间断面具有较强的分辨能力。

为了正确模拟复杂的粘性流动需求解N-S方程或简化N-S方程。在本书中是通过差分方法来逼近N-S方程和简化N-S方程的。N-S方程由两个部分组成，一是反映对流特性的无粘项部分，另一为反映耗散特性的粘性项部分。方程中的粘性项部分的差分逼近不会遇到很大困难，通常对该项采用中心差分。方程中粘性项的存在使解趋于光滑。为了使差分方法对流场间断面具有较强的分辨能力关键在于在N-S方程中对流项差分逼近方法的

选择，在本章及以后的两章中将着重讨论N－S方程中对流项的差分逼近方法。这里所讨论的方法也可用于对无粘流动的数值模拟。

一、一维气动方程

对完全气体的一维可压N－S方程无量纲化后可写成如下向量形式

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}=\overrightarrow{VIS} \tag{4-2-1}$$

这里

$$\vec{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ E\end{bmatrix},\qquad \vec{f}=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ u(E+p)\end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{VIS}=\begin{bmatrix}VIS_1\\ VIS_2\\ VIS_3\end{bmatrix}$$

$$p=\frac{1}{\gamma M_\infty^2}\rho T \tag{4-2-2}$$

$$E=\rho\left(C_v T+\frac{u^2}{2}\right)$$

$$VIS_1=0$$

$$VIS_2=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4-2-3}$$

$$VIS_3=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x}u\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{C_p}{P_r\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial T}{\partial x}$$

式中

$$C_v=\frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_\infty^2},\quad C_p=\gamma C_v \tag{4-2-4}$$

方程中 ρ、u、T 和 p 分别为密度、速度、温度和压力，它们是分别通过来流参数 ρ_∞，u_∞、T_∞ 和 $\rho_\infty u_\infty^2$ 进行无量纲化的。式中 M_∞ 为来流马赫数；Re 为雷诺数；P_r 为普朗德（Prandtl）数，μ 为粘性系数。在计算中对 μ 通常采用萨泽兰特（Sutherland）公式

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \frac{T^{3/2}(1+T_r/T_\infty)}{T+T_r/T_\infty} \tag{4-2-5}$$

式中 T_r 为参考温度并取 $T_r = 110.4°K$。

对 N-S 方程的差分逼近包括对方程中之无粘部分的差分逼近和粘性项的差分逼近。对粘性项的差分逼近相对比较容易，以后还将讨论。N-S 方程逼近方法的好坏很大程度上取决于对无粘项的差分逼近，因而在以后的讨论中将主要针对如下之欧拉方程

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = 0 \tag{4-2-6}$$

即粘性项为零的式（4-2-1）。

二、雅可比系数矩阵

1952年库朗（Courant）等人依据流体力学方程特征走向构造了差分逼近式[11]。后来在 1979 年摩尔特（Moretti）[12]利用非守恒型欧拉方程构造了“入格式”。他们的主要想法是，双曲型方程反映了信息传播的依赖域问题，逼近于双曲型方程的差分格式应当反映特征理论的本质。1980 年查克拉瓦特（Chakravarthy）[13]利用矩阵代数概念使格式具有更确定的形式。他们的格式比以前那些不考虑特征本质的格式有更高的精确度。

斯蒂格尔（Steger）和沃明[14]提出流通向量分裂法。这是一种求解守恒型双曲型方程组的方法。此方法将方程中代表质量、动量和能量的流通向量按流通向量的雅可比系数矩阵的特征值进行分裂，然后按分裂后的流通向量构造差分格式。

根据定义，方程组（4-2-6）的流通向量 f 的雅可比矩阵为

$$A=\frac{D(f)}{D(U)}$$

$$=\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2}u^2, & (3-\gamma)u, & \gamma-1 \\ \frac{\gamma-2}{2}u^3-\frac{uc^2}{\gamma-1}, & \frac{c^2}{\gamma-1}+\frac{3-\gamma}{2}u^2, & \gamma u \end{pmatrix}$$

(4-2-7)

其中 γ 为比热比， c 为无量纲化后的声速，

$$c^2=\frac{T}{M_\infty^2} \tag{4-2-8}$$

雅可比系数矩阵经相似变换后可通过对角矩阵来表示

$$A=S^{-1}\Lambda S \tag{4-2-9}$$

其中矩阵S为由矩阵A之左特征行向量所组成的矩阵，Λ 为 由 矩阵A的特征值所构成的对角矩阵

$$\Lambda=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_1=u,\ \lambda_2=u-c,\ \lambda_3=u+c \tag{4-2-10}$$

相似变换矩阵S的具体形式为

$$S=\begin{pmatrix} \frac{u^2}{2}-\frac{c^2}{\gamma-1}, & -u, & 1 \\ -u-\frac{\gamma-1}{c}\frac{u^2}{2}, & 1+\frac{\gamma-1}{c}u, & -\frac{\gamma-1}{c} \\ -u+\frac{\gamma-1}{c}\frac{u^2}{2}, & 1-\frac{\gamma-1}{c}u, & \frac{\gamma-1}{c} \end{pmatrix}$$

(4-2-11)

$$S^{-1}=\begin{pmatrix} -\dfrac{\gamma-1}{c^2}, & -\dfrac{1}{2c}, & \dfrac{1}{2c} \\ -\dfrac{\gamma-1}{c^2}u, & -\dfrac{u-c}{2c}, & \dfrac{u+c}{2c} \\ -\dfrac{\gamma-1}{c^2}\dfrac{u^2}{2}, & -\dfrac{1}{2c}\left[\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{c^2}{\gamma-1}-uc\right], & \dfrac{1}{2c}\left[\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{c^2}{\gamma-1}+uc\right] \end{pmatrix} \tag{4-2-12}$$

不难验证，矩阵S^{-1}的每一列为矩阵A的右特征向量。

现指出关于流通向量$\vec{f}$的一个很重要的特性。不难验证，当状态方程有如下形式时

$$p=\rho g(e) \tag{4-2-13}$$

则流通向量$\vec{f}$为$\vec{U}$的一次齐次函数，即

$$\vec{f}(\alpha\vec{U})=\alpha\vec{f}(\vec{U}) \tag{4-2-14}$$

该式对任意参数α都成立。如果对式（4-2-14）之两侧都取对参数α的导数，再令$\alpha=1$，则可得

$$\vec{f}=A\vec{U} \tag{4-2-15}$$

关于这一等式也可根据向量$\vec{f}$、$\vec{U}$和雅可比矩阵A的具体表达形式来直接验证。如果对式（4-2-15）之两侧均取对x或对t的导数，且利用

$$\vec{f}_x=A\vec{U}_x,\quad \vec{f}_t=A\vec{U}_t$$

则可得

$$A_x\vec{U}=A_t\vec{U}=O$$

这里A_x和A_t为矩阵，其元素是由对矩阵A的元素按x或t求导而得。这里A_t和A_x为非零矩阵。

$$\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}=A\frac{\partial\vec{U}}{\partial x},\quad \frac{\partial\vec{f}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(A\vec{U}),\quad \frac{\partial}{\partial x}(A\vec{U})=A\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}=A\frac{\partial \vec{U}}{\partial t},\quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(A\vec{U}),\quad \frac{\partial}{\partial t}(A\vec{U})=A\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}$$

从形式上看雅可比系数矩阵 A 如同常数，可提到微分号外面来。对单个的标量方程只有当系数是常数的情况下才有可能将系数提到微分号的外边来。

上面指出，流通向量$\vec{f}$是向量 $\vec{U}$ 的一次齐次函数。如果状态方程取形式（4-2-13）式，对二维和三维问题在每个坐标方向上的流通向量都是$\vec{U}$ 的一次齐次函数。这一特性在气动方程的差分逼近中经常用到。

三、雅可比系数矩阵分裂

斯蒂格尔和沃明在文献[14]中对系数矩阵的分裂技术做过详细的讨论。本书作者在文献[15]中采用雅可比系数矩阵分裂技术构造了紧致格式。在这里将给出几种系数矩阵的分裂方法。

这里所说的系数矩阵分裂是指将雅可比系数矩阵分裂成两个和数个矩阵和的形式，即

$$A=A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots \tag{4-2-16}$$

如果矩阵$A^{(l)}$可以直接线性地通过矩阵A来表示

$$A^{(l)}=\sigma_l A \tag{4-2-17}$$

则称式（4-2-16）为线性分裂。式（4-2-17)中之σ_l为标量参数。如果矩阵$A^{(l)}$不能通过原矩阵A线性地表示出来，则称式（4-2-16）为非线性分裂或称结构分裂。可以认为过去人们利用加权的办法构造隐式格式时利用的是线性分裂。线性分裂没有很好地利用矩阵A的结构特性。实践表明利用矩阵A的特征值λ_k来分裂矩阵A是很有益的。通常是将矩阵之特征值λ_k分裂成两项和的形式

$$\lambda_k=\lambda_k^+ +\lambda_k^-,\quad \lambda_k^+\geqslant 0,\quad \lambda_k^-\leqslant 0 \tag{4-2-18}$$

利用分裂后的量$\lambda_k^\pm$可构造相应的对角矩阵

$$\Lambda^{\pm}=\begin{bmatrix} \lambda_1^{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\pm} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{\pm} \end{bmatrix}$$

利用对角矩阵$\Lambda^{\pm}$可以定义出相应的矩阵$A^{\pm}$和分裂后的流动向量$\vec{f}^{\pm}$

$$A^{\pm}=S^{-1}\Lambda^{\pm}S,\quad \vec{f}^{\pm}=A^{\pm}\vec{U} \tag{4-2-19}$$

根据$\lambda_k^{\pm}$和$\Lambda^{\pm}$的定义有如下关系

$$A=A^{+}+A^{-},\quad \vec{f}=\vec{f}^{+}+\vec{f}^{-} \tag{4-2-20}$$

式（4-2-18）指出将特征值λ_k分裂成两项和的形式，但并没有指出具体的分裂方法。下面列出几种具体的分裂形式。

（1）
$$A^{(1)}=\sigma A,\quad A^{(2)}=(1-\sigma)A \tag{4-2-21}$$

（2）
$$\lambda_k^{\pm}=\frac{\lambda_k\pm|\lambda_k|}{2} \tag{4-2-22}$$

（3）
$$u^{\pm}=\frac{u\pm|u|}{2}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_{1,2}^{+}=u^{+},\quad \lambda_3^{-}=u^{+}+c \\ &\lambda_{1,3}^{-}=u^{-},\quad \lambda_2^{-}=u^{-}-c \end{aligned} \tag{4-2-23}$$

（4）
$$\lambda_k^{+}=\lambda^{+}\geqslant\max\{0,\ \lambda_k\} \tag{4-2-24}$$
$$\lambda_k^{-}=\lambda_k-\lambda^{+}$$

（5）
$$\lambda_k^{-}=\lambda^{-}\leqslant\min\{0,\ \lambda_k\} \tag{4-2-25}$$

（6）
$$\lambda_k^{+}=u^{+},\quad \lambda_k^{-}=u^{-}$$
$$\lambda_1^{c}=0,\quad \lambda_2^{c}=-c,\quad \lambda_3^{c}=c \tag{4-2-26}$$
$$\lambda_k=\lambda_k^{+}+\lambda_k^{-}+\lambda_k^{c}$$

上面列出的第（1）种分裂方法最为简单，过去人们构造隐式格式时利用了这种分裂方法：含σA项取在$n+1$时间层上，含$(1-\sigma)A$项取在n时间层上。这种方法非常简单，但未能很好地利用矩阵A的特性。

分裂形式（2）是按照物理上的信息传播方向进行分裂的。定义M_x为局部马赫数，$M_x=\frac{u}{c}$，对超声速流，即$M_x\geqslant 1$，

则如下关系式成立：

$$\vec{f}^{+}=\vec{f},\ \vec{f}^{-}=0 \qquad 当 M_x \geqslant 1$$

$$\vec{f}^{+}=0,\ \vec{f}^{-}=\vec{f} \qquad 当 M_x \leqslant -1$$

严格说来 $\vec{f}^{+}$ 或 $\vec{f}^{-}$ 并不完全与原物理问题对应，只是合成量 $\vec{f}=\vec{f}^{+}+\vec{f}^{-}$ 与原物理问题是一致的。因为在 $u=0$ 点和音速点上人为地引入了奇异性。在这类点上将有导数间断产生，而这种导数间断在 $\vec{f}$ 中是没有的。

四、流通向量的分裂

这里仅介绍两种流通向量的分裂方法，一种是斯蒂格尔-沃明分裂方法，另一种是范利尔（Van Leer）分裂方法。

（一）斯蒂格尔-沃明流通量分裂法

构造了具体的特征值分裂量后可构造相应的矩阵 $A^{\pm}$ 以及分裂后的流通向量 $\vec{f}^{\pm}$。斯蒂格尔-沃明利用关系 $\vec{f}^{\pm}=S^{-1}\Lambda^{\pm}S\vec{U}$ 给出了 $\vec{f}^{\pm}$ 的表达式

$$\tilde{\vec{f}}_t=\frac{\rho}{2\gamma}\begin{vmatrix} 2(\gamma-1)\tilde{\lambda}_1+\tilde{\lambda}_2+\tilde{\lambda}_3 \\ 2(\gamma-1)\tilde{\lambda}_1 u+\tilde{\lambda}_2(u-c)+\tilde{\lambda}_3(u+c) \\ (\gamma-1)\tilde{\lambda}_1 u^2+\frac{\tilde{\lambda}_2}{2}(u-c)^2+\frac{\tilde{\lambda}_3}{2}(u+c)^2-w \end{vmatrix} \tag{4-2-27}$$

式中

$$w=\frac{(3-\gamma)(\tilde{\lambda}_2+\tilde{\lambda}_3)c^2}{2(\gamma-1)}$$

在式（4-2-27）中如果取 $\tilde{\lambda}_k$ 等于矩阵 A 的特征值 λ_k，则得到的为原流通向量 $\vec{f}$，如果取 $\tilde{\lambda}_k=\lambda_k^{\pm}$ 则可得到分裂后的流通向量 $\vec{f}^{\pm}$。对二维和三维情况的分裂流通向量的表达式请参看附录一。

前面介绍了一些雅可比系数矩阵和流通向量的分裂方法。希望利用分裂技术构造更为合理的差分格式，以提高数值解的精度，改善格式的稳定性和提高求解效率。然而一些分裂方法也带来了新的问题。例如，利用第（2）、（3）和（6）种分裂方法使

得在驻点 $u=0$ 处的流通向量由于 $|u|$ 的出现而不再是连续可微的了。又如利用第（2）种分裂由于 $|u\pm c|$ 的出现使得在声速线上 $\vec{f}^{\pm}$ 也不是连续可微的了。这种不连续可微性，导致在声速线附近数值解的振荡[14,16,17]。

为了克服不连续可微性所引起的数值解中的振荡，可引入小的参量进行修正，这样分裂后的特征值为

$$\lambda_k^{\pm}=\frac{\lambda_k\pm(\lambda_k^2+\varepsilon^2)^{1/2}}{2} \tag{4-2-28}$$

这一修正可减小数值解中的非物理振荡。

可以看到，如果采用本书作者提出的第（4）和（5）种分裂方法则可得到连续可微的分裂流通向量 $\vec{f}^{\pm}$。

（二）范利尔流通向量的分裂方法

按范利尔方法[18]所得到的分裂后的流通向量将是连续可微的。设局部马赫数 $M_x=u/c$，则范利尔分裂流通向量为

$$\text{对} M_x\geqslant 1 \quad \vec{f}^{+}=\vec{f},\ \vec{f}^{-}=0$$

$$\text{对} M_x\leqslant -1 \quad \vec{f}^{+}=0,\ \vec{f}^{-}=\vec{f} \tag{4-2-29}$$

对 $|M_x|\leqslant 1$

$$\vec{f}^{\pm}=\begin{vmatrix} f_1^{\pm} \\ f_1^{\pm}[(\gamma-1)u\pm 2c]/\gamma \\ f_1^{\pm}\{[(\gamma-1)u\pm 2c]^2/[2(\gamma^2-1)]\} \end{vmatrix} \tag{4-2-30}$$

式中

$$f_1^{\pm}=\pm\rho c\left[\frac{M_x\pm 1}{2}\right]^2$$

图 4-9，图4-10 给出了 $f_1^{\pm}/\rho c$ 随局部马赫数 M_x 的变化曲线，从图中可以看出，利用斯蒂格尔-沃明分裂方法在穿过 $M_x=0$ 时有梯度间断产生，而利用范利尔方法所得到的 $\vec{f}^{\pm}$ 是连续可微的。

叶(Yee)在文献〔26〕中介绍了推广了的斯蒂格尔-沃明分裂法和范利尔分裂方法。在推广了的分裂法中考虑了真实气体效应。

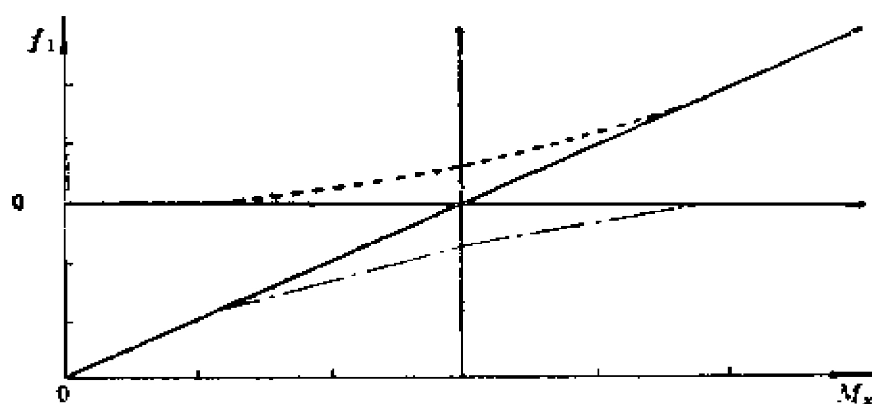


图4-9　斯蒂格尔-沃明分裂法中质量流随M_x的变化

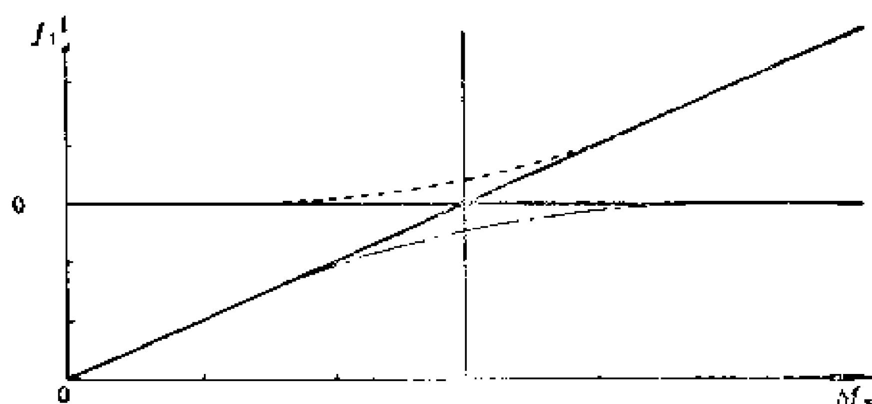


图4-10　范利尔分裂法中质量流随M_x的变化

五、分裂技术的应用

大体说来，利用系数矩阵和流通向量分裂技术有如下几个方面的益处

（1）扩大了差分格式的构造范围；

（2）提高了计算效率；

（3）改善了对应于差分方程之代数方程的系数矩阵的性质。

关于第一点可构造不同的分裂方法和不同的差分化形式，这将给构造精度更好的格式创造条件，例如在下节中的沃明和比姆迎风格式（4-3-4），以及在第六章中的色散误差可控的迎风紧致

格式等都利用了分裂技术。

关于第二点在以后的章节中还会提到，例如，在第七章中采用上面提到的第（3）种分裂方法使隐式格式的求解消除了大量的矩阵运算。又如，如果利用第（4）种分裂方法，则可减少分裂流通向量$\vec{f}^{\pm}$的计算量，因此时

$$\Lambda^+ = \lambda^+ I,\quad A^+ = \lambda^+ I$$

$$\Lambda^- = \Lambda - \lambda^+ I,\quad A^- = A - \lambda^+ I$$

$$\vec{f}^+ = \lambda^+ \vec{U},\quad \vec{f}^- = \vec{f} - \lambda^+ \vec{U}$$

在以后的章节中都是在对空间导数进行差分化时利用了系数矩阵的分裂技术，也可在 t 方向的差分化中采用这种技术。例如对一维欧拉方程通常可构造如下之隐式方法

$$\vec{U}_j^{n+1} = \vec{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\theta\delta_x^0(A\vec{U})^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(1-\theta)\delta_x^0(A\vec{U})^n \tag{4-2-31}$$

该格式当 $\theta \geqslant \frac{1}{2}$ 是绝对稳定的，在 $\theta \neq \frac{1}{2}$ 时在时间方向只有一阶逼近精度。在对这一方程求解时需要进行三对角块矩阵求逆。如果利用分裂技术

$$A = \theta\lambda I + [A - \theta\lambda I]$$

$$\lambda \geqslant |u| + c$$

所构造的隐式格式为

$$\vec{U}_j^{n+1} = \vec{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^0[\theta\lambda\vec{U}^{n+1}] - \frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^0[\vec{f} - \theta\lambda\vec{U}]^n \tag{4-2-32}$$

该格式可以是绝对稳定的（如 $\theta = 1$），在时间方向的逼近精度为一阶，但该方程的求解只需对三对角线矩阵求逆，从而可以节省很多计算工作量。这种方法对求解定常问题将会是有益的。

关于上面提到的第三项益处可在第七章看到。因为利用分裂技术通常可使隐式方法对应的矩阵主对角元素占优势，这样可减少误差的积累。

第三节　一维欧拉方程部分显示格式举例

在第一节介绍的很多格式可很容易用来逼近一维欧拉方程，这里仅对部分格式做简单介绍。

一、不利用分裂技术的格式

（一）L-W 格式

两步格式极易构造，这里仅给出单步格式

$$\vec{U}_j^{n+1}=\vec{U}_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^0\vec{f}_j^n+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\delta_x^+\left[\boldsymbol{A}_{j-\frac{1}{2}}\delta_x^-\vec{f}_j^n\right] \tag{4-3-1}$$

式中

$$\delta_x^+\left[\boldsymbol{A}_{j-\frac{1}{2}}\delta_x^-\vec{f}_j\right]=\boldsymbol{A}_{j+\frac{1}{2}}\delta_x^-\vec{f}_j-\boldsymbol{A}_{j-\frac{1}{2}}\delta_x^-\vec{f}_j$$

$$\boldsymbol{A}_{j+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{A}\left(\vec{U}_{j+\frac{1}{2}}\right)$$

相对来说两步L-W格式更为简单，因不需求雅可比矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和不需进行矩阵运算。L-W格式和一般高阶精度的差分格式(指高于一阶逼近精度）都有一个共同特点，即激波捕捉能力差，在激波附近的数值解中出现非物理的振荡。此外从式（4-3-1)中还可以看到，对求解定常问题，即 $\vec{U}^{n+1}=\vec{U}^n$ 时，定常差分式中出现 $\Delta t/\Delta x$，因而定常解将依赖于步长比。

应当指出，人们利用L-W格式计算了大量的无粘流问题，然而很少有人用这种方法来逼近N-S方程。这首先因为格式为显式，因而时间步长受到了很大限制。其次，半网格点上物理量的计算给粘性项的逼近带来很大麻烦，对多维问题这一困难更为突出。

这里列举了L-W格式特点和不足之处，在第五章将会看到，L-W格式是构造对称形TVD格式的一个基础方法。

（二）麦科马克格式

$$\overline{U}_j^{n+1}=\vec{U}_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^- \vec{f}_j^n \qquad (4-3-2\,a)$$

$$\vec{U}_j^{n+1}=\frac{1}{2}(\vec{U}_j^n+\overline{U}_j^{n+1})-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^+\overline{f}_j^{n+1} \qquad (4-3-2\,b)$$

这一格式比L-W格式更为简单，在格式中只需对整网格点上的量进行计算。可以说这是一个最简单的具有二阶精度的差分格式。该格式被广泛用来求解欧拉方程，并解决了大量宇航飞行器气动设计中提出的气动问题。

麦科马克格式的不足之处是在激波附近数值解中有振荡现象产生，因而在实际计算中需引入人工耗散项。为了得到定常解，一般需要大量迭代时间，如数千步。其定常解同样依赖于步长比。此外还发现，在不该增熵的地方，例如，绕流前驻点附近，发现数值解有增熵的现象。

显式麦科马克格式也曾被用来求解N-S方程。为了克服显式格式由于稳定性对时间步长的限制，麦科马克曾先后发展了两种隐式格式[19,20]。这两种方法都是利用原显式两步法发展起来的，但这两种方法都不十分成功。

二、利用系数分裂技术的显式格式

这里将只介绍沃明和比姆发展的迎风格式[21]。这是对两步麦科马克格式的修正格式。在麦科马克格式中并未考虑到信息的传播特性，沃明和比姆根据信息的传播方向进行了修正。首先设流通向量$\vec{f}$的雅可比矩阵所有的特征值皆为正，则修正后的格式为

$$\overline{U}_j^{n+1}=\vec{U}_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^- \vec{f}_j^n \qquad (4-3-3\,a)$$

$$\vec{U}_j^{n+1}=\frac{1}{2}(\vec{U}^n+\overline{U}^{n+1})_j-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(\delta_x^-)^2\vec{f}_j^n$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^-\overline{f}_j^{n+1} \qquad (4-3-3\,b)$$

这里两步都取单边迎风差分，格式具有二阶逼近精度。这里所说

单边差分指差分格式中所利用的网点分布在 j 点的同一侧。

当雅可比矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为负时可构造类似的具有二阶精度的显式迎风格式。此时在式（4-3-3）中的 δ_x^- 以 δ_x^+ 代之，$(\delta_x^-)^2$ 以 $-(\delta_x^+)^2$ 代之。在一般情况下格式为

$$\bar{\vec{U}}_j^{n+1}=\vec{U}_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\delta_x^-(\vec{f}_j^+)+\delta_x^+(\vec{f}_j^-)\right] \qquad (4\text{-}3\text{-}4\,\mathrm{a})$$

$$\begin{aligned}\vec{U}_j^{n+1}=&\frac{1}{2}(\vec{U}_j^n+\bar{\vec{U}}_j^{n+1})-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\\&\cdot\left[(\delta_x^-)^2(\vec{f}_j^+)^n+\delta_x^-(\bar{\vec{f}}_j^+)^{n+1}\right]\\&+\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(\delta_x^+)^2(\vec{f}_j^-)^n-\delta_x^+(\bar{\vec{f}}_j^-)^{n+1}\right]\end{aligned} \qquad (4\text{-}3\text{-}4\,\mathrm{b})$$

根据稳定分析可知，稳定性的充要条件是：

$$|\lambda|\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 2 \qquad (4\text{-}3\text{-}5)$$

这一显式格式具有二阶逼近精度，比L-W等格式对时间步长的限制放大了一倍。这一格式与中心型L-W格式及麦科马克格式相比，数值解在激波附近的振荡现象有所缓和。对常系数情况不难验证，当取 $\left|\lambda\frac{\Delta t}{\Delta x}\right|=1,2$ 时差分方程满足平移条件。

詹姆生（Jameson）等人参照常微分方程中的龙盖-库塔（Runge-Kutta）方法构造了多步格式[22~24]，读者如感兴趣请参阅相应文献。

第四节　戈杜诺夫格式

在第一节中曾介绍了部分逼近于单波方程的差分格式。这些格式多从数学上考虑如何采用不同形式的差分来逼近偏微分方程的导数项。在 1959 年戈杜诺夫提出了一个著名的差分格式[8]。在这一格式中较好地考虑了物理流动特性，利用所谓“黎曼间断解”问题（或称“衰变”问题）的精确解来计算网格边上的物理量。该

格式只有一阶逼近精度，但优于一般一阶精度的格式。下面首先介绍一下关于保单调格式和单调差分格式的概念，然后介绍方法的构造及其物理含义。

一、保单调差分格式与单调差分格式

在前面曾提到，采用二阶精度的差分格式（如麦科马克格式等）在激波附近将产生非物理的振荡（参看图4-11）。从方程（4-1-1）初值问题的精确解（4-1-3）中可以看出，如果初始函数 $F(x)$ 是 x 的单调函数，则 $t>0$ 时的解 $u(t,x)$ 也是 x 的单调函数。于是自然想到，对于差分格式如果初值是单调的非增函数（或非减），希望差分方程的解也能保持非增（或非减）。

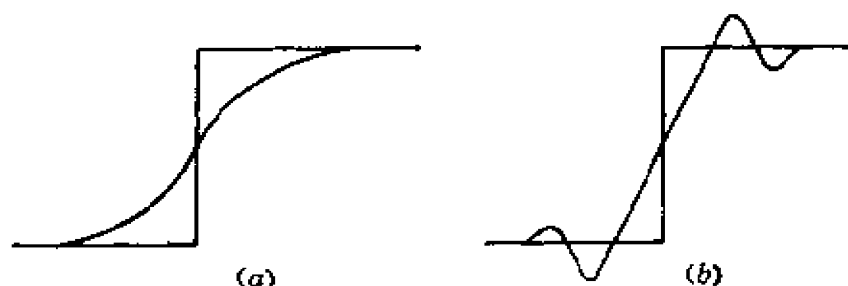


图4-11 激波附近的数值解

（a）一阶精度格式，（b）二阶精度格式。

定义 设有差分格式

$$u_j^{n+1}=G(u_{j-l}^n,\cdots,u_j^n,\cdots,u_{j+l}^n) \qquad (4-4-1)$$

如果 u_j^n 是单调函数而 u_j^{n+1} 也是单调函数，则称该格式为**保单调的**。

如果满足关系式

$$\frac{\partial G}{\partial u_{j+k}^n}\geqslant 0\,,\ k=-l,\cdots,l \qquad (4-4-2)$$

则称该格式为**单调差分格式**。

这里在定义保单调差分格式时只谈到了在 $n+1$ 时间层上的量与 n 时间层上量之间的关系，而未直接涉及到格式本身的结构.

在定义单调差分格式时涉及到了格式的结构，要求式（4-4-2）得到满足。

戈杜诺夫证明了如下之定理。

定理 差分格式

$$u_j^{n+1}=\sum a_k u_{j+k}^n \tag{4-4-3}$$

单调差分格式的充要条件是所有 $a_k\geqslant 0$。戈杜诺夫在这里讨论的是线性差分格式。对线性情况单调差分格式和保单调差分格式是一致的，即保单调格式也是单调格式。戈杜诺夫还证明了，常系数单调差分格式的截断误差是一阶的。

G．金宁（G.Jenning）[9]将单调差分格式的概念推广到非线性差分格式上，他给出了式（4-4-2）的定义。在一般情况下单调差分格式一定是保单调的，但保单调差分格式不一定是单调格式。在第五章中可以看到具有二阶逼近精度的保单调格式。哈顿（Harten），海曼（Hyman）和拉克斯（Lax）[10]证明了非线性单调差分格式的截断误差只能是一阶的。

二、戈杜诺夫格式

单调的差分格式（$c>0$）

$$u_j^{n+1}=\gamma u_{j-1}^n+(1-\gamma)u_j^n \tag{4-4-4}$$

是戈杜诺夫格式的基础格式，这里要求 $\gamma=c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$。现将这一格式加以推广，考虑方程组

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial v}{\partial x}&=0\\ \frac{\partial v}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}&=0\end{aligned} \tag{4-4-5}$$

其中 $a>0$，$b>0$。将方程组（4-4-5)写成向量形式

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+A\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}=0 \tag{4-4-6}$$

$$\vec{U}=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0, & a \\ b, & 0 \end{bmatrix}$$

可将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为对角形式

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^{-1}=\boldsymbol{\Lambda} \qquad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} \sqrt{ab}, & 0 \\ 0, & -\sqrt{ab} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} \sqrt{b}, & \sqrt{a} \\ -\sqrt{b}, & \sqrt{a} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{b}}, & -\frac{1}{2\sqrt{b}} \\ \frac{1}{2\sqrt{a}}, & \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{bmatrix}$$

其中

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{ab}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。将方程（4-4-6）写为特征型

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\boldsymbol{\Lambda}\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}=0 \tag{4-4-7}$$

$$\vec{V}=\boldsymbol{S}\vec{U}$$

$$V_1=\sqrt{b}\,u+\sqrt{a}\,v,\quad V_2=-\sqrt{b}\,u+\sqrt{a}\,v$$

式（4-4-7）中每一个方程的精确解都将保持单调性，分别对它们构造相应于式（4-4-7）的单调格式

$$\left.\begin{aligned}(V_1)_j^{n+1}&=\gamma(V_1)_{j-1}^n+(1-\gamma)(V_1)_j^n\\(V_2)_j^{n+1}&=\gamma(V_2)_{j+1}^n+(1-\gamma)(V_2)_j^n\end{aligned}\right\} \tag{4-4-8}$$

这里 $\gamma=\sqrt{ab}\,\frac{\Delta t}{\Delta x}$。将 V_1 和 V_2 的具体表达式代入式（4-4-8）则得

$$\begin{aligned}u_j^{n+1}&=u_j^n-a\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^0 v_j^n+\sqrt{ab}\frac{\Delta t}{2\Delta x}\delta_x^2 u_j^n\\v_j^{n+1}&=u_j^n-b\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^0 u_j^n+\sqrt{ab}\frac{\Delta t}{2\Delta x}\delta_x^2 v_j^n\end{aligned} \tag{4-4-9}$$

上面给出了对应于方程组（4-4-6）的单调差分格式。现在来

讨论一下它的物理含意。如果以 p 和 u 分别表示压力和速度，$v=\frac{1}{\rho}$（ρ 为密度），则一维拉格朗日（Lagrangian）坐标系下的方程可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-b\frac{\partial p(v)}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+b\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{4-4-10}$$

引入一线化关系（等价于卡门-钱（Karman-Tsien）近似）

$$p(v)=-\frac{a}{b}(v-v_0)+p_0 \tag{4-4-11}$$

则可得到方程（4-4-6），从而可得对应的单调差分格式(4-4-9)。如果从所得到的格式中消去 v，则可得到对应于原变量 u 和 p 的差分方程

$$u_j^{n+1}=u_j^n+b\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(P_{j+\frac{1}{2}}-P_{j-\frac{1}{2}}\right)$$
$$v_j^{n+1}=v_j^n-b\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(U_{j+\frac{1}{2}}-U_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{4-4-12}$$

其中

$$P_{j+\frac{1}{2}}=\frac{p_{j+1}+p_j}{2}-\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{u_{j+1}-u_j}{2}$$
$$U_{j+\frac{1}{2}}=\frac{u_{j+1}+u_j}{2}-\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{p_{j+1}-p_j}{2} \tag{4-4-13}$$

可将解（4-4-12）看成是利用拉格朗日方程求解衰变问题。设在 $t=t_0$ 时在 $j+\frac{1}{2}$ 点上有间断存在（参看图4-12）。在 $t>t_0$ 时运动规律由声波方程（4-4-6）所描述。声波将离开 $j+\frac{1}{2}$ 点

向左右双方以速度$\sqrt{ab}$向外传播。沿着波的方向存在有压力间断，它可能是压缩波，也可能是膨胀波。现来讨论一下波前波后量之间的关系。沿间断线取积分可得跳跃条件

ρ_1, u_1, v_1

ρ_0, u_0, v_0

$j \quad j+\frac{1}{2} \quad j+1 \quad x$

图4-12 衰变问题初始分布

$$[u]dx + b[P]dt = 0 \qquad (4-4-14)$$

考虑到$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{ab}$，并以$P$和$U$来表示在$j+\frac{1}{2}$点上$p$和$u$的值，则可由式（4-4-14）得到关系

$$\left(U_{j+\frac{1}{2}} - u_{j+1}\right)\sqrt{\frac{a}{b}} - \left(P_{j+\frac{1}{2}} - p_{j+1}\right) = 0$$

$$\left(U_{j+\frac{1}{2}} - u_j\right)\sqrt{\frac{a}{b}} + \left(P_{j+\frac{1}{2}} - p_j\right) = 0$$

此式即为关系式（4-4-13）。

应当指出，只有当在$j-\frac{1}{2}$和$j+\frac{3}{2}$点上的波还没有传到$j+\frac{1}{2}$点上时，按衰变问题所求得的解（4-4-13）才是正确的，因而要求

$$\sqrt{ab}\,\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1$$

这是稳定条件，也是为保持格式的单调性所要求的条件。

从上面的讨论中可知，如果按式（4-4-13）定义P和U，则构造逼近于线化了的拉格朗日方程（4-4-6)的单调格式相当于求解一个简单的衰变问题。可按这一思想构造逼近一维欧拉方程的

戈杜诺夫格式。设在 x 轴上布有均匀网格 $x_j=(j-1)\Delta x$，且在某一时刻 t_0 各物理量是片状常数函数，即各物理量 $g_j(g=\rho, u, T)$ 在每一区段 $x_{j-\frac{1}{2}}<x<x_{j+\frac{1}{2}}$ 都是常数。在各半网格点上可能有间断存在。在 j 点上构造逼近于一维欧拉方程（4-2-6）的差分格式

$$\vec{U}_j^{n+1}=\vec{U}_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\vec{f}^{\,n}_{j+\frac{1}{2}}-\vec{f}^{\,n}_{j-\frac{1}{2}}\right)$$

应注意的是，此处 $\vec{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 应是在 $j+\frac{1}{2}$ 点上由求解精确的衰变问题而求得的。

戈杜诺夫格式在构造时考虑了物理的流动特点，因而给出了较好的数值解。实践表明，这一方法在接触间断附近的解不够好。这格式只有一阶逼近精度，后来范利尔构造了具有二阶逼近精度的戈杜诺夫格式。

第五节　罗（Roe）格式与U特性

现仍以模型方程（4-1-1）为例进行讨论。罗在文献〔27〕中给出的显式差分格式一般表达式为

$$u_j^{n+1}-u_j^n=-\nu\sum_k r_k(u^n_{j+k+1}-u^n_{j+k}) \tag{4-5-1}$$

这 $\nu=c\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}$ 为库朗数。为满足所需要的精度对系数 ν_k 需加以限制，如

$$\begin{aligned}&\Sigma r_k=1,\qquad \Sigma k r_k=-\frac{1}{2}(1+\nu)\\&\Sigma k^2 r_k=\frac{1}{6}(1+\nu)(1+2\nu)\end{aligned} \tag{4-5-2}$$

其中第一个等式为相容条件。对每一个区段（$j, j+1$）首先计

算一 $\nu(u_{j+1}^n-u_j^n)$，然后将其分成与 r_k 成比例的分量（$\sum r_k=1$）。式（4-5-1）中的第 k 个分量表示 $j+k$ 点上的增量向 j 点提供的贡献。这一过程可从图 4-13 中看出。式（4-4-3）与（4-5-1）这两种表示方法强调的重点不同。式（4-4-3）表示在给定点上 $n+1$ 时间层上的量是怎样通过 n 时间层上的量得到的，而式（4-5-1）除此之外还表示在 n 时间层上给定区间上的增量对 $n+1$ 时间层各区间量所做的贡献。

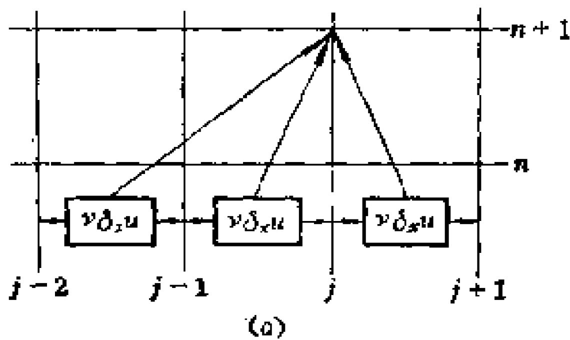


图4-13（a） 周围点的增量对 j 点的贡献

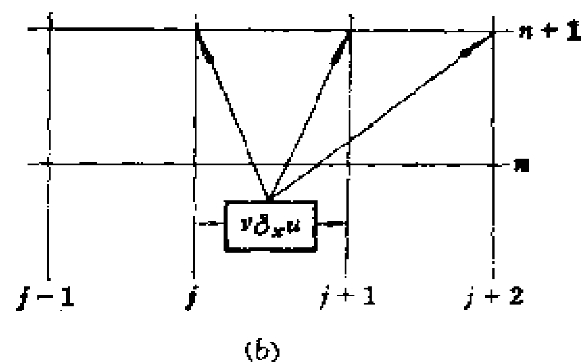


图4-13（b） 两点间之增量对周围点的贡献

根据式（4-5-1）的表示方法，可以将区间段（j，$j+1$）分离出来进行讨论，然后将其加权分散到各个网格点上去。

现讨论双曲型方程组情况。设所求解的问题为

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}=0 \qquad (4\text{-}5\text{-}3)$$

$$\vec{U}(0,x)=\vec{U}_0(x)$$

其中流通向量 $\vec{f}$ 是向量 $\vec{U}$ 的函数。在前一节中戈杜诺夫将原物理问题化成在每个网格区间上解准确的衰变问题（即准确的黎曼问题）。在解该问题之前他建议在网格区间用片状常数函数来代替初始值，并认为在$\left\{x_{j+\frac{1}{2}}\right\}$点上有间断存在。然后在每个区间段上求解黎曼问题。后来范利尔发展了具有二阶逼近精度的戈杜诺夫格式[28]。格里姆（Glimm）参照戈杜诺夫的思想构造了随机选取法。

一、线化黎曼问题及罗的U特性

戈杜诺夫格式和随机选取法的计算工作量都比较大，当推广到多维问题时更为复杂和困难。罗建议了一个经线化了的近似的黎曼问题。后来人们在这一基础上构造了精度更高的格式，关于这方面在第六章中还将提到。

所谓黎曼间断解问题即为求解满足初始条件

$$\vec{U}(0,x)=\vec{U}_L \qquad (x<0)$$
$$\vec{U}(0,x)=\vec{U}_R \qquad (x>0) \tag{4-5-4}$$

方程（4-5-3）的解，罗建议求解如下之方程

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\widetilde{\mathbf{A}}\frac{\partial \vec{U}}{\partial x}=0 \tag{4-5-5}$$

其中$\widetilde{\mathbf{A}}$是依赖于$\vec{U}_L$和$\vec{U}_R$的常数矩阵$\widetilde{\mathbf{A}}=\mathbf{A}(\vec{U}_L,\ \vec{U}_R)$。$\widetilde{\mathbf{A}}$是某种意义下雅可比矩阵$\mathbf{A}$的平均矩阵，它具有如下性质

（1）$\mathbf{A}(\vec{U},\ \vec{U})=\mathbf{A}(\vec{U})$；

（2）$\mathbf{A}(\vec{U}_L,\ \vec{U}_R)$有实特征根和完备的特征向量；

（3）$\mathbf{A}(\vec{U}_L,\ \vec{U}_R)(\vec{U}_R-\vec{U}_L)=\vec{f}(\vec{U}_R)-\vec{f}(\vec{U}_L)$。

罗在文献[30]中称这些为U特性（Uniform）。性质（1）保证了在光滑区$\widetilde{A}$的连续性。性质（3）表明，如果取值为$\vec{U}_L$和$\vec{U}_R$的两点间仅有一个单一的间断面，则近似解是原微分方程的准确解。通过间断面的跳跃条件为

$$V(\vec{U}_R-\vec{U}_L)=\vec{f}(\vec{U}_R)-\vec{f}(\vec{U}_L)$$

考虑到性质（3），则有

$$\mathbf{A}(\vec{U}_L,\ \vec{U}_R)(\vec{U}_R-\vec{U}_L)=V(\vec{U}_R-\vec{U}_L) \tag{4-5-6}$$

由此可知，$\vec{U}_R-\vec{U}_L$为矩阵$\mathbf{A}(\vec{U}_L,\ \vec{U}_R)$的特征向量，而间断面的速度$V$为对应的特征值。

在一般情况下，如下之两种平均方法

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}_L+\mathbf{A}_R),\quad \widetilde{\mathbf{A}}=\mathbf{A}\left[\frac{1}{2}(\vec{U}_L+\vec{U}_R)\right]$$

都不满足U特性。罗通过引入参变向量的办法给出了一种求得满足U特性的矩阵 $A(\vec{U}_L, \vec{U}_R)$ 的办法。在构造这一矩阵时利用了如下之恒等关系式

$$
\begin{aligned}
\delta(a+b) &\equiv \delta a+\delta b \\
\delta(ab) &\equiv \bar{a}\delta b+\bar{b}\delta a \qquad (4\text{-}5\text{-}7) \\
\delta\left(\frac{1}{b}\right) &\equiv -\delta b/b^{*2}
\end{aligned}
$$

这里 $\delta(f)=(f)_R-(f)_L$，$\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 为算术平均，b^* 为几何平均

$$
\bar{a}=\frac{a_L+a_R}{2},\quad \bar{b}=\frac{b_L+b_R}{2},\quad b^*=(b_L b_R)^{1/2}
$$

关于 $A(\vec{U}_L, \vec{U}_R)$ 的构造请参看附录二。

二、线化黎曼问题信息的丢失

可参照戈杜诺夫方法，将某一时刻物理参量在计算区间的分布看成是片状常数的函数，在每个网格区间上来解近似黎曼问题，即解方程（4-5-5)。

设 f_M 是在 $x=0$，$t>0$ 时的准确解，则

$$
\begin{aligned}
\Delta \vec{f}_{\underset{\rightarrow}{j}+\frac{1}{2}} &= \vec{f}_M-\vec{f}_j \\
\Delta \vec{f}_{\underset{\leftarrow}{j}+\frac{1}{2}} &= \vec{f}_{j+1}-\vec{f}_M
\end{aligned}
\qquad (4\text{-}5\text{-}8)
$$

这里下方的箭头表示来自左行波和右行波的贡献。

现在来讨论近似解的情况。U特性要求$\widetilde{A}$有着完备的特征向量$\vec{e}_k$。此时 $\Delta\vec{U}=\vec{U}_{j+1}-\vec{U}_j$ 可通过特征向量来表示

$$
\Delta\vec{U}=\sum_k a_k\vec{e}_k \qquad (4\text{-}5\text{-}9)
$$

又根据U特性（3）可得

$$
\Delta\vec{f}=\sum_k \lambda_k a_k\vec{e}_k \qquad (4\text{-}5\text{-}10)
$$

这里 λ_k 为矩阵 $\widetilde{A}$ 的对应于特征向量 $\vec{e}_k$ 的特征值。将 $\Delta\vec{f}$ 中的左行分量和右行分量分离开来，即

$$\Delta\underset{\leftarrow}{\vec{f}} = \sum_k \lambda_k a_k \boldsymbol{e}_k \quad (\lambda_k < 0)$$

$$\Delta\underset{\rightarrow}{f} = \sum_k \lambda_k a_k \boldsymbol{e}_k \quad (\lambda_k > 0) \tag{4-5-11}$$

如果其中的一个波（如第 k_0 个波）是由 $x=0$ 处发出的扇形稀疏波，则近似解将发生信息丢失。因为对精确解来说，第 k_0 个波将其一部分贡献给 $\underset{\leftarrow}{\vec{f}}$，将余下的部分贡献给 $\underset{\rightarrow}{f}$。近似解的第 k_0 个波将全部贡献给二者中的一个。对 $\vec{f}_j = \vec{f}_{j+1}$ 而 $\vec{U}_j \neq \vec{U}_{j+1}$，且有扇形稀疏波的极值情况，尽管此时 $\Delta\vec{f} = 0$，然而准确黎曼解给出的 $\Delta\underset{\leftarrow}{\vec{f}}$ 和 $\Delta\underset{\rightarrow}{\vec{f}}$ 将是数值上相等而符号是相反的。利用近似解给出的将是 $\Delta\underset{\rightarrow}{\vec{f}} = \Delta\underset{\leftarrow}{\vec{f}} = O$，因而也就无法反映出精确黎曼解的结构来。通常是通过人工粘性的办法进行修正。

第六节　守恒迎风格式

本节对双曲型守恒律

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = 0 \tag{4-6-1}$$

或

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \boldsymbol{A}\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = 0 \tag{4-6-2}$$

（其中 $\boldsymbol{A} = \partial f/\partial U$）给出一个守恒迎风差分格式。此格式是 1981 年提出的，见文献〔31、33、35〕。它是近期这类格式较早的工作，基于第二节所述的特征值符号分裂，由方程的双曲型，$\boldsymbol{A}$ 可对角化为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}$$

其中 $\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{\Lambda}$和 $\boldsymbol{L}$ 如式（2-1-19）和（2-1-20）所示。定义矩阵

$$\operatorname{sign}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}(\operatorname{sign}\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{L} \tag{4-6-3}$$

其中对角阵 $\operatorname{sign}\boldsymbol{\Lambda}$ 的对角元是

$$\operatorname{sign}\lambda_i=\begin{cases}+1 & 当\ \lambda_i>0\\ \theta & 当\ \lambda_i=0\\ -1 & 当\ \lambda_i<0\end{cases}$$

其中 θ 一般为 0，但也可以根据需要而定义，因此这里用了 sign 而不是通常的 sgn 符号。考虑显式差分格式，以下称为 CU（Conservative Upwind）格式，

$$\frac{\vec{U}_j^{n+1}-\vec{U}_j^n}{\Delta t}+\frac{1}{2}\left(I-\operatorname{sign}\boldsymbol{A}_{j+\frac{1}{2}}^n\right)\vec{D}_{j+\frac{1}{2}}^n+\frac{1}{2}\left(I+\operatorname{sign}\boldsymbol{A}_{j-\frac{1}{2}}^n\right)\vec{D}_{j-\frac{1}{2}}^n=0 \tag{4-6-4}$$

其中

$$\vec{D}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\vec{f}_{j+1}-\vec{f}_j}{\Delta x} \tag{4-6-5}$$

$$\boldsymbol{A}_{j+\frac{1}{2}}=\boldsymbol{A}\left(\vec{U}_{j+\frac{1}{2}}\right),\quad \vec{U}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\vec{U}_j+\vec{U}_{j+1}}{2} \tag{4-6-6}$$

即简单的算术平均。

首先说明此格式是迎风的。为此设（4-6-2）中 $\boldsymbol{A}$ 为常矩阵，左乘 $\boldsymbol{L}$ 得

$$\boldsymbol{L}\frac{\vec{U}_j^{n+1}-\vec{U}_j^n}{\Delta t}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}-\operatorname{sign}\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}\frac{\vec{U}_{j+1}^n-\vec{U}_j^n}{\Delta x}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{I}+\operatorname{sign}\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}\frac{\vec{U}_j^n-\vec{U}_{j-1}^n}{\Delta x}=0$$

分解成各分量方程为

$$\vec{l}\,\frac{\vec{U}_j^{n+1}-\vec{U}_j^n}{\Delta t}+\lambda\vec{l}\,\frac{\vec{U}_j^n-\vec{U}_{j-1}^n}{\Delta x}=0,\quad 对\ \lambda>0 \tag{4-6-7}$$

$$\vec{l}\cdot\frac{\vec{U}_j^{n+1}-\vec{U}_j^n}{\Delta t}+\lambda\vec{l}\,\frac{\vec{U}_{j+1}^n-\vec{U}_j^n}{\Delta x}=0,\ \text{对}\ \lambda<0 \quad (4\text{-}6\text{-}8)$$

$$\vec{l}\cdot\frac{\vec{U}_j^{n+1}-\vec{U}_j^n}{\Delta t}=0,\ \text{对}\ \lambda=0 \quad (4\text{-}6\text{-}9)$$

即特征关系式（2-1-22）的迎风差分近似。

现在把式（4-6-4）写为

$$\frac{\vec{U}_j^{n+1}-\vec{U}_j^n}{\Delta t}+\frac{\vec{f}_{j+1}^n-\vec{f}_{j-1}^n}{2\Delta x}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{sign}\mathbf{A}_{j+\frac{1}{2}}^n\right)\vec{D}_{j+\frac{1}{2}}^n-\left(\operatorname{sign}\mathbf{A}_{j-\frac{1}{2}}^n\right)\vec{D}_{j-\frac{1}{2}}^n\right] \quad (4\text{-}6\text{-}10)$$

方程的右边可视为$O(\Delta x)$的粘性项。由此可见CU格式的相容性，精度为一阶。再把$(\vec{f}_{j+1}-\vec{f}_{j-1})/2$写为$(\vec{f}_{j+1}+\vec{f}_j)/2-(\vec{f}_j+\vec{f}_{j-1})/2$，立即得知格式是守恒的。

由于式（4-6-6）采用的简单的算术平均，CU格式能方便地用于弱守恒律。如对

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}+s(x)\frac{\partial\vec{g}}{\partial x}=0 \quad (4\text{-}6\text{-}11)$$

定义$\mathbf{A}=\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{U}}+s(x)\dfrac{\partial\vec{g}}{\partial\vec{U}}$，那么式（4-6-5)现在变为形式

$$\vec{D}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\vec{f}_{j+1}-\vec{f}_j}{\Delta x}+s_{j+\frac{1}{2}}\frac{\vec{g}_{j+1}-\vec{g}_j}{\Delta x} \quad (4\text{-}6\text{-}12)$$

轴对称定常超声流方程经坐标变换是弱守恒的。用CU格式计算的一个喷管流动结果在图4-14中给出，详见文献[34]。

CU格式开始提出是做为求解定常问题的时间相关格式，此时它的数值粘性很有利。首先它加速收敛（到定常），因迎风格式有很好的收敛速度。在定常时，它在光滑区没有影响，仅在激波区有影响。它导致最多一个过渡点的数值激波。可证以下关系式成立

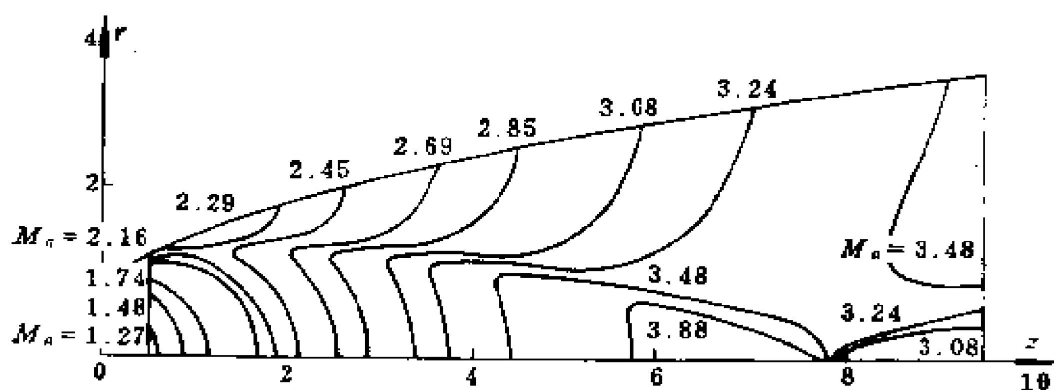


图4-14 轴对称喷管定常超声流动

$$\vec{D}_{j+\frac{1}{2}} = 0, \quad j、j+1 \neq jM$$

$$\vec{D}_{jM-\frac{1}{2}} + \vec{D}_{jM+\frac{1}{2}} = 0$$

$$\left(I + \operatorname{sign} A_{jM+\frac{1}{2}}\right)\vec{D}_{jM+\frac{1}{2}} = 0$$

这里 jM 是激波过渡点 $\left(在\ jM-\frac{1}{2}\right.$ 流速为超声速，在 $jM+\frac{1}{2}$ 流速为亚声速$\left.\right)$，其解是式（4-6-4）和（4-6-12）的定常解，详见文献[31]。由此可见在光滑区格式有二阶精度，在激波区格式有高分辨度。图 4-15 给出拟一维喷管的定常数值激波。

在边界上，譬如说左边界，仅需略去式（4-6-4)中的第三项即得对应的边界格式为

$$\frac{\vec{U}_j^{n+1} - \vec{U}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}\left(I - \operatorname{sign} A_{j+\frac{1}{2}}^n\right)\vec{D}_{j+\frac{1}{2}}^n = 0$$

（4-6-13）

其中$A_{j+\frac{1}{2}}^n$也可用 A_j^n 代替。式（4-6-13）左乘 L，得

$$L\frac{\vec{U}_j^{n+1} - \vec{U}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(I - \operatorname{sign} A)AL\frac{\vec{U}_{j+1}^n - \vec{U}_j^n}{\Delta x} = 0$$

对 $\lambda < 0$ 和 $= 0$ 分别有式（4-6-8）和（4-6-9），而

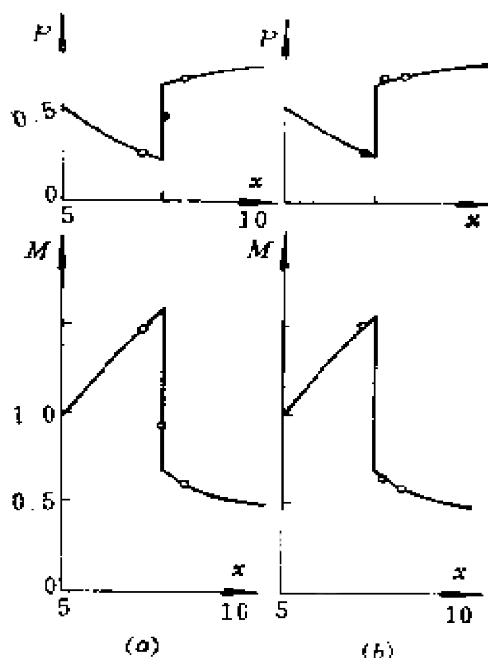


图4-15 拟一维喷管的定常数值激波
(a) $P_e=0.72$； (b) $P_e=0.78$
(P_e为出口压力)。

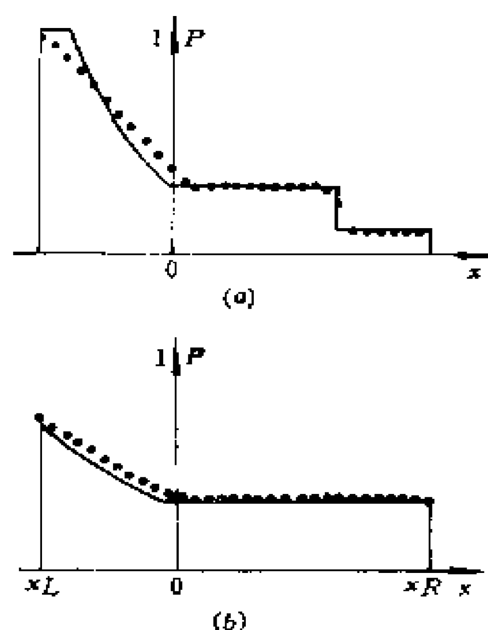


图4-16 有限区间上的黎曼问题
(a) $t=t_1$；
(b) $t=t_2>t_1$。

$$\vec{l}\cdot\frac{\vec{U}_j^{n+1}-\vec{U}_j^n}{\Delta t}=0\text{，对 }\lambda>0 \qquad (4\text{-}6\text{-}14)$$

即对外出特征，得所需特征关系的近似；而对进入特征，得对非线性双曲型方程组的无反射边界条件(见文献[36])

$$\vec{l}\ \frac{\partial\vec{U}}{\partial t}=0$$

的近似。用 CU 以及其对应的边界格式在一个有限区间上计算一个黎曼问题的数值结果如图 4-16 所示，详见文献[33]。注意当稀疏波和激波通过边界时无异常现象。对一般边界条件，先用式(4-6-13)得出初步 $\vec{U}_j^{n+1}$，记为$\bar{\vec{U}}_j^{n+1}$。从对应 $\lambda\leqslant0$ 的 $\bar{\vec{U}}_j^{n+1}$ 和边界条件（对应 $\lambda>0$）得出最后的边界值 $\vec{U}_j^{n+1}$。

在此提及对应式（4-6-4)、(4-6-5）的隐式格式经线性化为

$$\vec{f}^{n+1}=\vec{f}^n+A^n\Delta\vec{U}\qquad(\Delta\vec{U}=\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^n)$$

可整理为

$$\left(-\frac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{E}^{+}_{j-\frac{1}{2}}\mathbf{A}_{j-1}\right)\Delta\vec{U}_{j-1}$$

$$+\left(\mathbf{I}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{E}^{+}_{j-\frac{1}{2}}\mathbf{A}_{j}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{E}^{-}_{j+\frac{1}{2}}\mathbf{A}_{j}\right)\Delta\vec{U}_{j}$$

$$+\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\mathbf{E}^{-}_{j+\frac{1}{2}}\mathbf{A}_{j+1}\right)\Delta\vec{U}_{j+1}$$

$$=-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(E^{-}_{j+\frac{1}{2}}\frac{\vec{f}_{j+1}-\vec{f}_{j}}{\Delta x}+\mathbf{E}^{+}_{j-\frac{1}{2}}\frac{\vec{f}_{j}-\vec{f}_{j+1}}{\Delta x}\right)$$

(4-6-15)

式中

$$\mathbf{E}^{\pm}=\frac{1}{2}(\mathbf{I}\pm\mathrm{sign}\,\mathbf{A})$$

并统一略去了上标 n。这个隐式CU格式保持上述各性质，包括守恒性。因为式（4-6-14）在定常时总成立，所以式（4-6-13）可用于求解定常问题。当用隐式内点格式时，用对应式(4-6-13)的隐式边界格式特别有利。因为每时间层可在求解有关线性代数方程组后再用给定的边界条件修正边界值。这个边界格式还能推广到二维情况，见文献〔32〕。

对单个守恒律式(4-6-1)，设 $f(u)$是里普雪茨（Lipschitz）连续的，那么 $f(u_{j+1})-f(u_j)=\bar{a}_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1}-u_j)$，其中$\bar{a}_{j+\frac{1}{2}}=a(u_j,u_{j+1})$，$a=df/du$。CU格式可写为以下形式：

$$u_j^{n+1}=u_j^n+c^n_{+\,j+\frac{1}{2}}(u^n_{j+1}-u^n_j)-c^n_{-\,j-\frac{1}{2}}(u^n_j-u^n_{j-1})$$

$$=u_j^n-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(1-\mathrm{sign}\,a^n_{j+\frac{1}{2}}\right)\bar{a}^n_{j+\frac{1}{2}}(u^n_{j+1}-u^n_j)$$

$$-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(1+\mathrm{sign}\,a^n_{j-\frac{1}{2}}\right)\bar{a}^n_{j-\frac{1}{2}}(u^n_j-u^n_{j-1})$$

一般 $a_{j+\frac{1}{2}}$ 和$\bar{a}_{j+\frac{1}{2}}$ 是同号的，设这个总成立。此时

$$c_{-\,j-\frac{1}{2}}=\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(I+\operatorname{sign}a_{j-\frac{1}{2}}\right)\bar{a}_{j-\frac{1}{2}}\geqslant 0$$

$$c_{+\,j+\frac{1}{2}}=\frac{-\Delta t}{2\Delta x}\left(1-\operatorname{sign}a_{j+\frac{1}{2}}\right)\bar{a}_{j+\frac{1}{2}}\geqslant 0$$

$$c_{-\,j+\frac{1}{2}}+c_{+\,j+\frac{1}{2}}=\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\operatorname{sign}a_{j+\frac{1}{2}}\right)\bar{a}_{j+\frac{1}{2}}\geqslant 0$$

即格式是所谓的TVD (Total Variation Diminishing)。TVD格式将在第五章中讨论。CU格式，如上节的罗（Roe）格式，可以导致违反熵条件的定常间断。在文献[37]中，修正了罗(Roe)格式。如果用同样的方法修正CU格式，比罗（Roe)在大一点的区间上引进大一点的粘性，但公式中仍保留简单的算术平均，那么CU格式变为

$$\begin{aligned}&\frac{\vec{U}_j^{n+1}-\vec{U}_j^n}{\Delta t}+\frac{1}{2}\left(I-\operatorname{sign}\boldsymbol{A}_{j+\frac{1}{2}}^n\right)\frac{\vec{f}_{j+1}^n-\vec{f}_j^n}{\Delta x}\\&\qquad+\frac{1}{2}\left(I+\operatorname{sign}\boldsymbol{A}_{j-\frac{1}{2}}^n\right)\frac{\vec{f}_j^n-\vec{f}_{j-1}^n}{\Delta x}\\&\qquad=\boldsymbol{Q}_{j+\frac{1}{2}}^n(\vec{U}_{j+1}^n-\vec{U}_j^n)-\boldsymbol{Q}_{j-\frac{1}{2}}^n(\vec{U}_j^n-\vec{U}_{j-1}^n)\end{aligned}\tag{4-6-16}$$

式中

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&0&&&\\&&&g(\lambda)/2&&\\&&&&0&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&0\end{pmatrix}$$

$$g(\lambda)=\begin{cases}2\delta(\lambda)-|\lambda| & \text{当}|\lambda|<2\delta(\lambda)\\ 0 & \text{当}|\lambda|\geqslant 2\delta(\lambda)\end{cases}$$

而

$$\delta_{j+\frac{1}{2}}(\lambda)=\max\left\{0,\ \lambda\left(\vec{U}_{j+\frac{1}{2}}\right)-\lambda(\vec{U}_j),\ \lambda(U_{j+})-\lambda\left(U_{j+\frac{1}{2}}\right)\right\}$$

仅对可能产生问题的分量定义，详见文献〔25〕。对一般的流场和恰当的初值，用式(4-6-4)和(4-6-5)即可；必要时，可用(4-6-16)，其中 sign 还能以光滑函数近似。不过，对多维复杂流场，如第二章第四节末所述，还需从多方面来保证计算结果的可靠性。

第七节　一类单步格式的构造

在这一节中将给出一类单步差分格式的构造方法，且对部分格式进行简单的讨论。

一、格式的构造

在文献〔15〕中利用泰勒级数展开式给出了一类差分格式的构造方法。现仍讨论欧拉方程（4-2-6）的差分逼近。将向量 $\vec{U}^{n+1}$ 在 n 点上进行泰勒级数展开并利用原方程（4-2-6）可得

$$\begin{aligned}\vec{U}^{n+1}&=\vec{U}^n-\Delta t\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}+\frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}\right)+\cdots\\&=\vec{U}^n-\Delta t\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}-\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\cdots\\&=\vec{U}^n-\Delta t\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}^2\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}+\cdots\end{aligned}$$

式中右端的流通向量 $\vec{f}$ 及雅可比矩阵 $\boldsymbol{A}$ 皆取在 n 时间层上。可将上面三个式子统一写成如下形式：

$$\vec{U}^{n+1}=\vec{U}^n-\Delta t\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}+\frac{\Delta t^2}{2}\left[\alpha\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}-\beta\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\gamma\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}^2\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\right]+\cdots\tag{4-7-1}$$

不难看出，只要取 $\alpha+\beta+\gamma=1$，则上式在时间方向上将以二

阶精度逼近于欧拉方程（4-2-6）。如果上式中之一阶空间导数项以不低于二阶精度的差分式逼近，二阶和混合导数项以不低于一阶精度的差分式来逼近，则当取 $\alpha+\beta+\gamma=1$ 时所得到的差分式将不低于二阶精度逼近微分方程。对式（4-7-1）中之一阶导数项可取如下的一些差分逼近式

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}\right)_j=\frac{1}{\Delta x}\delta_x^0(\boldsymbol{A}\vec{U})_j+O(\Delta x^2)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}\right)_j=\frac{1}{\Delta x}(\delta_x^-\boldsymbol{A}^+\cdot+\delta_x^+\boldsymbol{A}^-\cdot)\vec{U}_j+O(\Delta x)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}\right)_j=\frac{1}{\Delta x}(\delta_x^b\boldsymbol{A}^+\cdot+\delta_x^f\boldsymbol{A}^-\cdot)\vec{U}_j+O(\Delta x^2)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}\right)_j=\frac{1}{\Delta x}\delta_x^c\vec{f}_j+O(\Delta x^4)$$

关于算子 δ_x^+、δ_x^-、δ_x^0、δ_x^b、δ_x^f 和 δ_x^c 在本章第一节有定义。式中之点号 · 表示前面之算子也作用于点号后面括号外之量。对二阶导数和混合导数项可取如下之差分逼近式

$$\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}=\frac{1}{\Delta t}(\delta_t\vec{U}^{n+1}-\delta_t\vec{U}^n)+O(\Delta t^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}^2\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}=\frac{1}{\Delta x^2}\{\delta_x^+[\sigma\delta_x^-(\delta_t\vec{U}^{n+1})]+\delta_x^+(\boldsymbol{A}^2\delta_x^-\vec{U})\}$$
$$+O(\Delta t,\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}=\frac{1}{\Delta x\Delta t}\delta_x^0(\boldsymbol{A}\delta_t\vec{U}^{n+1})_j+O(\Delta t,\Delta x^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}=\frac{1}{\Delta x\Delta t}\delta_x^-(\boldsymbol{A}\delta_t\vec{U}^{n+1})_j+O(\Delta t,\Delta x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}=\frac{1}{\Delta x\Delta t}\delta_x^+(\boldsymbol{A}\delta_t\vec{U}^{n+1})_j+O(\Delta t,\Delta x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}=\frac{1}{\Delta x\Delta t}(\delta_x^+\boldsymbol{A}^-\cdot+\delta_x^-\boldsymbol{A}^+\cdot)\delta_t\vec{U}^{n+1}+O(\Delta t,\Delta x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}=\frac{1}{\Delta x\Delta t}(\delta_x^b\boldsymbol{A}^+\cdot+\delta_x^f\boldsymbol{A}^-\cdot)\delta_t\vec{U}_j^{n+1}+O(\Delta t,\Delta x^2)$$

这里时间二阶导数项只用了向量 $\vec{U}$ 在三个时间层上的量，目的在

于使差分方程不要依赖于更多的前时刻层次上的量，否则在求解时需要更多前时间层次上的初始值。在纯空间二阶导数项的逼近中引入了标量参数σ，目的在于改善稳定性能和简化格式之隐式部分的求解。在前面曾指出，在式（4-7-1)中之二阶和混合导数项的差分逼近如果能保持一阶逼近精度，则格式将具有二阶逼近精度，因而参数σ的引入即可简化求解，又使格式仍具有二阶逼近精度。

参照上面提到的对导数项的差分逼近式可对式（4-7-1）进行差分化，经整理后可得如下之一般差分表达式

$$\Delta\vec{U}_j=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}\Big[-\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x A\vec{U}+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\delta_x^{+}\times(A\delta_x^{-}\vec{f}_j)-\frac{\alpha}{2}\delta_t\vec{U}_j^n\Big] \tag{4-7-2}$$

$$\left[I+\frac{\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}}{1-\frac{\alpha}{2}}\delta_x A-\frac{\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2}{1-\frac{\alpha}{2}}I\delta_x^{+}\sigma\delta_x^{-}\right]\delta_t\vec{U}_j^{n+1}=\Delta\vec{U}_j^n \tag{4-7-3}$$

$$\vec{U}^{n+1}=\vec{U}^n+\delta_t\vec{U}_j^{n+1} \tag{4-7-4}$$

式（4-7-2）和（4-7-3）中的差分算子可取不同的差分形式，对雅可比矩阵A和流通向量$\vec{f}$可采取不同的分裂形式，选取不同的参数α、β、γ和σ，则可得到各种不同的差分格式。对矩阵A和向量$\vec{f}$进行分裂后可有形式

$$\Delta\vec{U}_j=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}\Big[-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\delta_x\vec{f}^{+}+\delta_x\vec{f}^{-})+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\delta_x^{+}A\delta_x^{-}\vec{f}_j-\frac{\alpha}{2}\delta_t\vec{U}_j^n\Big] \tag{4-7-5}$$

$$[I+\bar{\alpha}(\delta_x A^{+}+\delta_x A^{-})-\bar{\beta}I\delta_x^{+}\sigma\delta_x^{-}]\delta_t\vec{U}_j^{n+1}=\Delta\vec{U}_j^n \tag{4-7-6}$$

$$\tilde{\alpha}=\frac{\dfrac{\beta}{2}\cdot\dfrac{\Delta t}{\Delta x}}{1-\dfrac{\alpha}{2}},\quad \tilde{\beta}=\frac{\dfrac{\gamma}{2}\left(\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2}{1-\dfrac{\alpha}{2}}$$

在表 6-1 中列出了一些常用的格式。

表6-1　逼近欧拉方程的部分格式

					隐式部分			显式部分			
					$\delta_x(A\delta_t\vec{U}^{n+1})$			$\delta_x\vec{f}=\delta_x A\vec{U}$			
参数					不分裂	分裂		不分裂	分裂		注
No	α	β	γ	σ	$A\delta_t\vec{U}$	$A^+\delta_t\vec{U}$	$A^-\delta_t\vec{U}$	$\vec{f}$	$A^+\vec{U}$	$A^-\vec{U}$	
1	0	0	0						δ_x^-	δ_x^+	显式，二点迎风
2	1	0	0					δ_x^0			显式，蛙跳
3	0	0	1	0				δ_x^0			显式，L W
4	0	1	0		δ_x^0			δ_x^0			隐式，矩形公式
5	0	1	0		δ_x^-			δ_x^0			半隐式，错点格式
6	0	1	0		δ_x^-			δ_x^0			半隐式，错点格式
7	0	1	0			δ_x^-	δ_x^+	δ_x^0			隐式
8	0	2	0		δ_x^0			δ_x^0			隐式，欧拉时间后差
9	0	β	0			δ_x^-	δ_x^+		δ_x^b	δ_x^f	隐式，三点迎风
10	0	β	0			δ_x^b	δ_x^f		δ_x^b	δ_x^f	隐式，三点迎风
11	−1	2	0		δ_x^0			δ_x^0			隐式，时间三点后差
12	0	3	0			δ_x^-	δ_x^+	δ_x^0			隐式，紧致差分
13	0	0	1	σ				δ_x^0			隐式，修正L-W

表中分显式部分和隐式部分。在显式部分对流通向量可不进行分裂直接进行差分，也可首先进行分裂然后进行差分化。对隐式部分也可同样对系数矩阵进行分裂。

从差分形式的一般表达式中可以看出，格式的精度受自由参数α、β、γ和σ的影响，也受具体的差分过程影响。如果在对

系数矩阵或流通向量进行分裂时不引入新的奇性（如导数间断），则分裂方法不同不影响格式逼近精度的量级。

二、具体格式举例

上面表中给出了很多差分格式，应注意到，这一类格式相对于增量 $\delta_t U$ 是线性的。进行泰勒级数展开的过程实际上也是一个线化的过程。这里仅就表中的部分格式做一简单的讨论。不难看出，表中的No.5 格式即为经线化了的本章第一节中的错点格式。对一维欧拉方程的错点格式为

$$\vec{U}_i^{n+1}=\vec{U}_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{\delta_x^-\vec{f}_i^{n+1}}{2}+\frac{\delta_x^+\vec{f}_i^n}{2}\right] \tag{4-7-7}$$

这是一非线性代数方程组，可对 $\vec{f}^{n+1}$ 进行线化

$$\vec{f}^{n+1}=\vec{f}^n+\mathbf{A}\delta_t\vec{U}^{n+1}+O(\Delta t^2)$$

将其代入式（4-7-7）中可得

$$\vec{U}_i^{n+1}=\vec{U}_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\frac{\delta_x^-[\vec{f}^n+\mathbf{A}^n\delta_t\vec{U}^{n+1}]_i}{2}+\frac{\delta_x^+\vec{f}_i^n}{2}\right\} \tag{4-7-8}$$

将该方程加以整理即得表中的 No.5。

在本章第一节曾提到，对标量方程错点格式当 $c\frac{\Delta t}{\Delta x}=-2$ 时 U_i^{n+1} 的系数为零。表中的 No.7 即为 No.5 的改进形式，克服了这一不利因素。未经线化的改进格式为

$$\vec{U}_i^{n+1}=\vec{U}_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{\frac{\delta_x^-(\vec{f}_i)^{n+1}}{2}+\frac{\delta_x^-(\vec{f}^+)_i^n}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{\delta_x^-(\vec{f}^-)_i^n}{2}+\frac{\delta_x^+(\vec{f}^-)_i^{n+1}}{2}\right\} \tag{4-7-9}$$

表中的 No.7 为该式对应的线化形式。

如果取式（4-7-2）和（4-7-3）中的 $\gamma=0$，则可得

$$\Delta\vec{U}_i=-\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}\left\{-\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x\mathbf{A}\vec{U}-\frac{\alpha}{2}\delta_t\vec{U}^n\right\}$$

$$\times\{I+\tilde{\alpha}\delta_x\mathbf{A}\cdot\}\delta_t\vec{U}_i^{n+1}=\Delta\vec{U}_i^n \tag{4-7-10}$$

如果将此式中之参数加以代换

$$\beta=2\theta, \quad \alpha=-2\xi, \quad \gamma=0$$

则经整理后可得著名的比姆和沃明格式，并

$\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=0$ 矩形公式

$\alpha=0$, $\beta=2$, $\gamma=0$ 欧拉时间后差

$\alpha=-1$, $\beta=2$, $\gamma=0$ 时间三点后差

如果利用系数矩阵和流通向量分裂技术，可有如下之差分形式：

$$\Delta\vec{U}_j=\frac{1}{1-\dfrac{\alpha}{2}}\left\{-\frac{\Delta t}{\Delta x}[\delta_x\vec{f}^+ +\delta_x\vec{f}^-]-\frac{\alpha}{2}\delta_t\vec{U}^n\right\} \quad (4\text{-}7\text{-}11)$$

$$\{I+\tilde{\alpha}(\delta_x^- A^+\cdot+\delta_x^+ A^-\cdot)\}\delta_t\vec{U}_j^{n+1}=\Delta\vec{U}_j \quad (4\text{-}7\text{-}12)$$

$$\vec{U}^{n+1}=\vec{U}^n+\delta_t\vec{U}^{n+1} \quad (4\text{-}7\text{-}13)$$

式中

$$\tilde{\alpha}=\frac{\dfrac{\beta}{2}\dfrac{\Delta t}{\Delta x}}{1-\dfrac{\alpha}{2}}$$

斯蒂格尔和沃明在文献[14]中取式（4-7-11）中

$$\delta_x\vec{f}_j^+=\delta_x^b\vec{f}_j^-, \quad \delta_x\vec{f}_j=\delta_x^f\vec{f}_j$$

表中的No.12为一种紧致格式[15]。表中一阶导数的差分为

$$\delta_x^c\vec{f}_j=\frac{\delta_x^0}{1+\dfrac{1}{6}\delta_x^2}\vec{f}_j \quad (4\text{-}7\text{-}14)$$

其展开形式为

$$\frac{1}{6}\delta_x^c\vec{f}_{j+1}+\frac{2}{3}\delta_x^c\vec{f}_j+\frac{1}{6}\delta_x^c\vec{f}_{j-1}=\delta_x^0\vec{f}_j \quad (4\text{-}7\text{-}15)$$

首先利用 n 时间层上的量求出 $\delta_x^0\vec{f}_j^n$，然后利用式（4-7-15）通过解代数方程求出 $\delta_x^c\vec{f}_j^n$，并将其代入式(4-7-1)，最后由式(4-7-12)求出 $\delta_t\vec{U}^{n+1}$ 来。经对模型方程分析可知，当取 $\alpha=\gamma=0$，$\beta\geqslant 3$ 时这一格式对任意步长比都是稳定的。关于紧致格式以及迎风

紧致格式还将在第六章中做更加细致的讨论。

如果将式（4-7-12）写成展开形式则得方程组

$$\tilde{a}\mathbf{A}^{-}_{j+1}\delta_t\vec{U}_{j+1}+[I+\tilde{a}(\mathbf{A}^{+}-\mathbf{A}^{-})]_j\delta_t\vec{U}_j-\tilde{a}\mathbf{A}^{+}_{j-1}\delta_t\vec{U}_{j-1}=\Delta\vec{U}_j \tag{4-7-16}$$

该式之求解对应于三对角块矩阵的求逆。对应之主对角元素占优势，可用矩阵追赶法进行求解。关于差分方程的求解将在第七章中进一步讨论。

第八节　多维问题的差分逼近

一、气动方程与雅可比系数矩阵

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{f}_1}{\partial x}+\frac{\partial\vec{f}_2}{\partial y}=\overrightarrow{VIS} \tag{4-8-1}$$

$$\vec{f}_1=\begin{vmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ u(E+p)\end{vmatrix}\quad \vec{U}=\begin{vmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{vmatrix}$$

$$\vec{f}_2=\begin{vmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ v(E+p)\end{vmatrix}\quad \overrightarrow{VIS}=\begin{vmatrix}VIS_1\\ VIS_2\\ VIS_3\\ VIS_4\end{vmatrix}$$

$$P=\frac{1}{\gamma M_\infty^2}\rho T\quad E=\rho\left(C_vT+\frac{u^2+v^2}{2}\right) \tag{4-8-2}$$

$$VIS_1=0$$

$$VIS_2=\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{11}+\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{12}$$

$$VIS_3=\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{12}+\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{22} \tag{4-8-3}$$

$$VIS_4 = \frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_{11} + v\sigma_{12}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\sigma_{12} + v\sigma_{22})$$
$$+ \frac{C_p}{P_r Re} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial T}{\partial x}$$
$$+ \frac{C_p}{P_r Re} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial T}{\partial y}$$
$$\sigma_{11} = \frac{\mu}{Re}\left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$\sigma_{12} = \frac{\mu}{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (4-8-4)$$
$$\sigma_{22} = \frac{\mu}{Re}\left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

关于粘性项的差分逼近将在本章第九节进行讨论，这里只讨论无粘项的差分逼近。二维欧拉方程为

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_2}{\partial y} = 0 \quad (4-8-5)$$

设A_k为流通向量$\vec{f}_k$的雅可比系数矩阵

$$A_k = \frac{D(f_k)}{D(U)}$$

现考虑更为一般形式的流通向量

$$\vec{f} = \alpha \vec{f}_1 + \beta \vec{f}_2 \quad (4-8-6)$$

其中α和β为不依赖于向量函数的自由参量，设A为流通向量$\vec{f}$的雅可比系数矩阵

$$A = \frac{D(\vec{f})}{D(\vec{U})} = \alpha A_1 + \beta A_2$$

矩阵A可通过其特征值组成的对角矩阵来表示

$$\Lambda = S^{-1} A S$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1(A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(A) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4(A) \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2}(\boldsymbol{A})=\alpha u+\beta v$$
$$\lambda_3(\boldsymbol{A})=\alpha u+\beta v-c\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \tag{4-8-7}$$
$$\lambda_4(\boldsymbol{A})=\alpha u+\beta v+c\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

关于雅可比矩阵$\boldsymbol{A}$，相似变换矩阵$\boldsymbol{S}$及$\boldsymbol{S}^{-1}$的具体表达形式请参看本章的附录一。

当取$\alpha=1$，$\beta=0$时可以得到矩阵$\boldsymbol{A}_1$及对应的特征值和对应的相似变换矩阵，当取$\alpha=0$，$\beta=1$时可以得到雅可比矩阵$\boldsymbol{A}_2$及对应的各量。

可通过对特征值$\lambda_k(\boldsymbol{A})$的分裂来分裂系数矩阵$\boldsymbol{A}$和流通向量$\vec{f}$

$$\lambda_k(\boldsymbol{A})=\lambda_k^+(\boldsymbol{A})+\lambda_k^-(\boldsymbol{A})$$
$$\lambda_k^+(\boldsymbol{A})\geqslant 0,\quad \lambda_k^-(\boldsymbol{A})\leqslant 0$$
$$\boldsymbol{A}^{\pm}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}^{\pm}\boldsymbol{S},\quad \vec{f}^{\pm}=\boldsymbol{A}^{\pm}\vec{U}$$

其中$\boldsymbol{\Lambda}^{\pm}$为由$\lambda_k^{\pm}(\boldsymbol{A})$组成的对角矩阵。可参照本章第二节的方法对矩阵$\boldsymbol{A}$进行分裂。可以给出如同式（4-2-27）那样的通过特征值或分裂后的特征值表示的流通向量一般表达形式

$$\vec{f}_1=\boldsymbol{S}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}}\boldsymbol{S}\vec{U}$$

关于二维的流通向量表达式可参看本章的附录一。

对三维问题可做类似的讨论。三维欧拉方程的向量形式为

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{f}_1}{\partial x}+\frac{\partial\vec{f}_2}{\partial y}+\frac{\partial\vec{f}_3}{\partial z}=0 \tag{4-8-8}$$

设$\boldsymbol{A}_k$为流通向量$\vec{f}_k$的雅可比系数矩阵，考虑更为一般形式的流通向量

$$\vec{f}=\alpha\vec{f}_1+\beta\vec{f}_2+\gamma\vec{f}_3 \tag{4-8-9}$$

设$\boldsymbol{A}$为向量$\vec{f}$的雅可比系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\frac{D(\vec{f})}{D(\vec{U})}=\alpha\boldsymbol{A}_1+\beta\boldsymbol{A}_2+\gamma\boldsymbol{A}_3 \tag{4-8-10}$$

矩阵$\boldsymbol{A}$可通过其特征值组成的对角矩阵来表示

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}$$

$\boldsymbol{\Lambda}$为由矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值组成的对角矩阵，各特征值为

$$\lambda_{1,2,3}(A)=\alpha u+\beta v+\gamma w$$
$$\lambda_4(A)=\alpha u+\beta v+\gamma w-c\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \quad (4-8-11)$$
$$\lambda_5(A)=\alpha u+\beta v+\gamma w+c\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

可通过对特征值 $\lambda_k(A)$ 的分裂来分裂A和$\vec{f}$。关于对三维问题的雅可比矩阵A，相似变换矩阵 S 及 S^{-1}，以及通过特征值表示的流通向量一般表达形式可参看本章的附录一。

二、麦科马克格式及时间分裂法

对一维问题的一些逼近方法都可很容易地推广到多维问题中去，这里只对两类方法做一简单分析，其一为显式格式及时间分裂法，另一为单步隐式格式及其构造。

逼近于二维欧拉方程式（4-8-5）的显式麦科马克格式为[5]

$$\vec{U}_{i,j}^{\overline{n+1}}=\vec{U}_{i,j}^{n}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^-(\vec{f}_1)_{i,j}^{n}-\frac{\Delta t}{\Delta y}\delta_y^-(\vec{f}_2)_{i,j}^{n} \quad (4-8-12)$$

$$\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\frac{1}{2}(\vec{U}_{i,j}^{n}+\vec{U}_{i,j}^{\overline{n+1}})-\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^+(\vec{f}^{\overline{n+1}})_{i,j}+\frac{\Delta t}{\Delta y}\delta_y^+(\vec{f}^{\overline{n+1}})_{i,j}\right] \quad (4-8-13)$$

$$\delta_x^-\vec{f}_{i,j}=\vec{f}_{i,j}-\vec{f}_{i-1,j},\quad \delta_x^+\vec{f}_{i,j}=\vec{f}_{i+1,j}-\vec{f}_{i,j}$$
$$\delta_y^-\vec{f}_{i,j}=\vec{f}_{i,j}-\vec{f}_{i,j-1},\quad \delta_y^+\vec{f}_{i,j}=\vec{f}_{i,j+1}-\vec{f}_{i,j}$$

这里空间导数在预测步都采用了后差，校正步都采用前差。在该格式中可采用前差后差等各种不同组合形式。文献[38]在这方面做了细致的研究，它指出，为了求得在（i，j）点上$n+1$层上的量将依赖于n层上周围七个点上的值，在预测和校正步前后差分组合形式中应使这七个点靠近流动方向排列。这一格式的稳定条件为

$$\Delta t\leqslant\frac{1}{\dfrac{|u|}{\Delta x}+\dfrac{|v|}{\Delta y}+c\sqrt{\dfrac{1}{\Delta x^2}+\dfrac{1}{\Delta y^2}}} \quad (4-8-14)$$

为了简化求解过程提高求解效率发展了各种不同的时间分裂

格式[39,40]。根据麦科马克时间分裂法的思想，可把微分方程（4-8-5）形式写成如下之一维序列

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x}=0 \qquad (4\text{-}8\text{-}15\text{a})$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{f}_2}{\partial y}=0 \qquad (4\text{-}8\text{-}15\text{b})$$

注意，这种书写方法并不意味着向量 $\vec{U}$ 满足这两个方程，这里只是为了便于构造格式的一种形式上的写法。

设 $L_x(\Delta t_x)$ 为式（4-8-15 a）的一个逼近算子

$$\vec{U}^*_{i,j}=L_x(\Delta t_x)\vec{U}^n_{i,j} \qquad (4\text{-}8\text{-}16)$$

该算子等价于如下两个运算公式序列

$$\vec{U}^{\bar{*}}_{i,j}=\vec{U}^n_{i,j}-\frac{\Delta t_x}{\Delta x}\delta_x^+(\vec{f}_1)^n_{i,j}$$

$$\vec{U}^*_{i,j}=\frac{1}{2}\left[\vec{U}^n_{i,j}+\vec{U}^{\bar{*}}_{i,j}-\frac{\Delta t_x}{\Delta x}\delta_x^-(\vec{f}_1)^{\bar{*}}_{i,j}\right]$$

类似可以定义求解式（4-8-15 b）的算子 $L_y(\Delta t_y)$

$$\vec{U}^*_{i,j}=L_y(\Delta t_y)\vec{U}^n_{i,j} \qquad (4\text{-}8\text{-}17)$$

其具体展开式为

$$\vec{U}^{\bar{*}}_{i,j}=\vec{U}^n_{i,j}-\frac{\Delta t_y}{\Delta y}\delta_y^+(\vec{f}_2)^n_{i,j}$$

$$\vec{U}^*_{i,j}=\frac{1}{2}\left[\vec{U}^n_{i,j}+\vec{U}^{\bar{*}}_{i,j}-\frac{\Delta t_y}{\Delta y}\delta_y^-(\vec{f}_2)^{\bar{*}}_{i,j}\right]$$

利用算子 L_x 和 L_y 可构造逼近于方程（4-8-5）的具有二阶逼近精度的差分格式

$$\vec{U}^{n+1}_{i,j}=L_y\left(\frac{\Delta t}{2}\right)L_x(\Delta t)L_y\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\vec{U}^n_{i,j} \qquad (4\text{-}8\text{-}18)$$

这一格式的截断误差为 $O(\Delta t^2,\ \Delta x^2,\ \Delta y^2)$。一般说来：①如果时间步长不超过每个算子稳定性所允许的步长，则格式是稳定的；②各分算子的时间步长之和相等则格式是相容的；③如果算子序列是对称排列的，则格式具有二阶逼近精度。下面给出满足这三个要求的其他两个时间分裂格式。

$$\vec{U}_{i,j}^{n+1}=L_y\left(\frac{\Delta t}{2}\right)L_x\left(\frac{\Delta t}{2}\right)L_x\left(\frac{\Delta t}{2}\right)L_y\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\vec{U}_{i,j}^{n} \quad (4\text{-}8\text{-}19)$$

$$\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\left[L_y\left(\frac{\Delta t}{2m}\right)\right]^m L_x(\Delta t)\left[L_y\left(\frac{\Delta t}{2m}\right)\right]^m \vec{U}_{i,j}^{n} \quad (4\text{-}8\text{-}20)$$

在式（4-8-20）中 m 为整数。当 $\Delta y \ll \Delta x$ 时利用式（4-8-20）是很有益处的。

从上面的讨论中可以看出，时间分裂法的采用可简化求解过程，且放松了对时间步长的限制。

对三维问题完全可以构造类似的格式，这里不再重复。

应当指出，在利用时间分裂法时由于中间过渡层上的量的引入为边界条件的处理带来困难。在采用隐式时间分裂法时这一困难更为突出。

三、一类单步差分格式的构造

现以二维问题为例进行讨论。参照一维情况将 $\vec{U}^{n+1}$ 在 n 时间层上进行泰勒级数展开，并利用原方程（4-8-5）得

$$\begin{aligned}\vec{U}^{n+1}=&\vec{U}^{n}-\Delta t\left(\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x}+\frac{\partial \vec{f}_2}{\partial y}\right)+\alpha\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}\\&-\beta\frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}_1\cdot+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{A}_2\right)\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}\\&+\gamma\frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}_1\cdot+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{A}_2\cdot\right)^2\vec{U}\\&+O[(\alpha+\beta+\gamma-1)\Delta t^2,\ \Delta t^3]\end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{A}_k$ 为对应于流通向量 $\vec{f}_k$ 的雅可比矩阵。当 $\gamma=0$ 时参照一维问题将上式进行相应的差分化可得对二维欧拉方程（4-8-5)的差分方程一般表达式

$$\Delta U_{i,j}=-\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x\boldsymbol{A}_1\cdot+\frac{\Delta t}{\Delta y}\delta_y\boldsymbol{A}_2\cdot\right]$$

$$\times \vec{U}-\frac{\frac{\alpha}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}}\delta_t\vec{U}_{i,j} \qquad (4-8-21)$$

$$\left\{I+\frac{\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x\boldsymbol{A}_1\cdot+\frac{\Delta t}{\Delta y}\delta_y\boldsymbol{A}_2\cdot\right]\right\}\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\Delta\vec{U}_{i,j}^n$$

$$(4-8-22)$$

$$\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\vec{U}_{i,j}^n+\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1} \qquad (4-8-23)$$

式（4-8-22）是对 $\delta_t\vec{U}$ 的线性代数方程组。在左方之矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 可采用不同的方法进行分裂，而差分算子 δ_x 和 δ_y 可采用简单的向前和向后差分（$\delta_x^{\pm}$，$\delta_y^{\pm}$）以使计算更为简单。在式（4-8-21）中之矩阵和流通向量也可采用不同的分裂形式，算子 δ_x 和 δ_y 也可采用相应的不同具体差分形式。如果再选用不同的参数 α 和 β，则可得到各种不同的差分格式。

对三维问题采用完全类似的方法可得到一类单步格式的一般表达式。式（4-8-22）的求解一般对应于五对角块矩阵的求逆，关于这类方程的求解将在第七章中讨论。

第九节　粘性项的差分逼近

众所周知，当流动不产生分离或不产生严重分离时利用欧拉方程/边界层方程迭代可以求解大量的实践问题。但对有些流动通过分别计算欧拉方程和边界层方程是难以解决的。例如，在绕流的相互干扰区，包括激波与边界层的相互干扰，尾缘相互作用区的流动，以及有较大分离区的流动等。此时需求解完全的N-S方程。

在这里主要讨论非定常N-S方程的解法。非定常N-S方程是具有双曲—抛物性质的方程。方程由无粘项和粘性项两个部分组成。粘性项描述了物理量的耗散特性，它的作用是使流场内之

流动参数趋于平滑。相对来说，粘性项的逼近处理比较容易，因而人们把更多的注意力集中在对无粘项的逼近上。一般说来粘性项的引入主要是加大了计算工作量。

早期人们是采用显式办法来逼近可压N－S方程的[39,40]。在粘性占主导地位时方程主要表现为抛物型的性质。此时由于稳定性而对时间步长有着过严的要求。为了克服由于粘性项对时间步长的限制，阿伦－程对布拉依洛夫斯卡娅格式进行了改进[8]。

目前在实践中主要采用隐式法来逼近N－S方程[42]。在本节中将介绍作者处理粘性项的一种简单方法。

以一维N－S方程（4-2-1）为例进行讨论。利用显式格式进行逼近时，在式（4-2-3）中的各项可采用简单的中心差分，例如

$$VIS_2 \approx \frac{4}{3} \cdot \frac{\mu_{j+1/2}(u_{j+1}-u_j)-\mu_{j-1/2}(u_j-u_{j-1})}{Re\Delta x^2}$$

设$\boldsymbol{A}_0$为向量$\vec{U}$对$\vec{U}_0$的雅可比矩阵

$$\boldsymbol{A}_0=\frac{D(\vec{U})}{D(\vec{U}_0)}$$

其中

$$\vec{\boldsymbol{U}}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ E\end{bmatrix} \qquad \vec{U}_0=\begin{bmatrix}\rho\\ u\\ T\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}1, & 0, & 0\\ u, & \rho, & 0\\ C_vT+\frac{u^2}{2}, & \rho u, & C_v\rho\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{B}\frac{\partial\vec{U}}{\partial x} \tag{4-9-1}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{A}_0^{-1},\quad \boldsymbol{B}_0=\begin{bmatrix}0, & 0, & 0\\ 0, & \frac{3}{4}\frac{\mu}{\text{Re}}, & 0\\ 0, & \frac{4}{3}\frac{\mu u}{Re}, & \frac{C_p}{P_r}\frac{k}{Re}\end{bmatrix}$$

$$A_e^{-1}=\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ -\dfrac{u}{\rho} & \dfrac{1}{\rho}, & 0 \\ \dfrac{u^2-\dfrac{E}{\rho}}{\rho C_v}, & -\dfrac{u}{\rho C_v}, & \dfrac{1}{\rho C_v} \end{bmatrix}$$

将 $\vec{U}^{n+1}$ 在 n 点上进行泰勒级数展开，并利用方程（4-9-1）可得与式（4-7-1）类似的表达式（取 $\gamma=0$）

$$\vec{U}^{n+1}=\vec{U}^n+\Delta t\left[\frac{\partial}{\partial x}B_0\frac{\partial\vec{U}_0}{\partial x}-\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}\right]$$

$$+\frac{\Delta t^2}{2}\left\{\alpha\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2}+\beta\left[-\frac{\partial}{\partial x}A\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}B\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\right)\right]\right\} \qquad (4\text{-}9\text{-}2)$$

式中{ }括号内的项主要起着两个作用，其一为控制时间方向上的精度，另一为控制和调节差分化后格式的稳定性。希望在不影响这两个作用的前提下对式（4-9-2）做一简化处理。将{ }括号内与粘性项有关的项

$$\frac{\Delta t^2}{2}\beta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}B\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\right)$$

以

$$\frac{\Delta t^2}{2}\beta\frac{\partial}{\partial x}\left[B\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\right)\right]$$

代之。考虑到 $B\approx\dfrac{1}{Re}$，因而简化处理所带来的误差为

$$O\left[\frac{\Delta t^2}{Re}\right]$$

这种处理仅仅是为了简化求解过程。在 Re 较大时这种简化处理不会给逼近精度带来很大影响。当所感兴趣的是定常问题的解时，这种简化处理将不影响定态解。

经近似处理后的差分一般表达形式为

$$\Delta \hat{U}_i=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{2}}\left[-\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x \boldsymbol{A}\vec{U}+\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta_x(\boldsymbol{B}_1\delta_x\vec{U}_0)-\frac{\alpha}{2}\delta_t\vec{U}^n\right] \tag{4-9-3}$$

$$\left\{I+\frac{\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x\boldsymbol{A}\cdot-\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta_x\boldsymbol{B}\delta_x\cdot\right]\right\}\delta_t\vec{U}_i^{n+1}=\Delta\vec{U}_i^n \tag{4-9-4}$$

$$\vec{U}_i^{n+1}=\vec{U}_i^n+\delta_t\vec{U}_i^{n+1} \tag{4-9-5}$$

在式（4-9-4）中左端之无粘项可利用系数矩阵分裂技术进行差分，而对粘性项可采用简单的中心差分。不难看出，后者将加强主对角线的优势地位。对式（4-9-3）之右端无粘项可用不同的流通向量分裂技术及不同的差分方法，而对粘性项可采用简单的中心差分。

对多维问题可采用类似的方法进行差分逼近。在方程中含 β 项的隐式部分中可将空间混合导数项略去，认为空间混合导数项对稳定性影响不大。这种简化处理方法对数值解的精度影响也是不大的，因为由此而引入的误差为

$$O\left(\frac{\Delta t^2}{Re}\right)$$

附录一　多维问题的雅可比矩阵、相似变换矩阵及流通向量一般表达式

一、二维情况

设 $\vec{f}_1$ 为 x 方向上的流通向量，$\vec{f}_2$ 为 y 方向上的流通向量。现讨论更为一般形式的流通向量

$$\vec{f}=\alpha\vec{f}_1+\beta\vec{f}_2 \tag{A-1}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 为对应于 $\vec{f}$ 的雅可比矩阵

$$
\boldsymbol{A}=
\begin{vmatrix}
0 & \alpha & \beta & 0 \\
\alpha\left[\dfrac{\gamma-3}{2}u^2+\dfrac{\gamma-1}{2}v^2\right]-\beta uv & \alpha u(3-\gamma)+\beta v & -\alpha(\gamma-1)v+\beta u & \alpha(\gamma-1) \\
\beta\left[\dfrac{\gamma-1}{2}u^2+\dfrac{\gamma-3}{2}v^2\right]-\alpha uv & \alpha v-\beta(\gamma-1)u & \alpha u+(3-\gamma)\beta v & \beta(\gamma-1) \\
\begin{array}{l}\alpha u\left[\dfrac{\gamma-2}{2}V^2-\dfrac{C^2}{\gamma-1}\right]+\beta v \\ \times\left[\dfrac{\gamma-2}{2}V^2-\dfrac{c^2}{\gamma-1}\right]\end{array} & \begin{array}{l}-\beta(\gamma-1)uv \\ +\alpha\left[\dfrac{V^2}{2}+(1-\gamma)u^2+\dfrac{c^2}{\gamma-1}\right]\end{array} & \begin{array}{l}-\alpha(\gamma-1)uv \\ +\beta\left[\dfrac{V^2}{2}+(1-\gamma)v^2+\dfrac{c^2}{\gamma-1}\right]\end{array} & (\alpha u+\beta v)\gamma
\end{vmatrix}
$$

其中 $V^2=u^2+v^2$。当 $\alpha=1$，$\beta=0$ 时即为流通向量 f_1 的雅可比矩阵，当 $\alpha=0$，$\beta=1$ 时 $\boldsymbol{A}$ 为对应于 f_2 的雅可比矩阵。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可通过对角矩阵来表示

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为由 $\boldsymbol{A}$ 的特征值构成的对角矩阵

$$
\boldsymbol{\Lambda}=\begin{vmatrix}
\lambda_1(\boldsymbol{A}) & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda_2(\boldsymbol{A}) & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda_3(\boldsymbol{A}) & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda_4(\boldsymbol{A})
\end{vmatrix}
$$

$$\lambda_{1,2}(\boldsymbol{A})=\alpha u+\beta v,\quad \lambda_{3,4}(\boldsymbol{A})=\alpha u+\beta v\mp c\sigma \qquad (\text{A-2})$$

$$\sigma=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$
\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}
\dfrac{V^2}{2}-\dfrac{c^2}{\gamma-1} & -u & -v & 1 \\
-\alpha v+\beta u & -\beta & \alpha & 0 \\
-\alpha u-\beta v+\dfrac{V^2}{2}\sigma & \alpha+\dfrac{\gamma-1}{c}u\sigma & \beta+\dfrac{\gamma-1}{c}v\sigma & -\dfrac{\gamma-1}{c}\sigma \\
-\alpha u-\beta v-\dfrac{V^2}{2}\sigma & \alpha-\dfrac{\gamma-1}{c}u\sigma & \beta-\dfrac{\gamma-1}{c}v\sigma & \dfrac{\gamma-1}{c}\sigma
\end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{S}^{-1}=\begin{pmatrix}
-\dfrac{\gamma-1}{c^2} & 0 & -\dfrac{1}{2c\sigma} & \dfrac{1}{2c\sigma} \\
-\dfrac{\gamma-1}{c^2}u & -\dfrac{\beta}{\sigma^2} & \dfrac{\alpha}{2\sigma^2}-\dfrac{u}{2c\sigma} & \dfrac{\alpha}{2\sigma^2}+\dfrac{u}{2c\sigma} \\
-\dfrac{\gamma-1}{c^2}v & \dfrac{\alpha}{\sigma^2} & \dfrac{\beta}{2\sigma^2}-\dfrac{v}{2c\sigma} & \dfrac{\beta}{2\sigma^2}+\dfrac{v}{2c\sigma} \\
-\dfrac{\gamma-1}{c^2}\times\dfrac{V^2}{2} & \dfrac{\alpha v-\beta u}{\sigma^2} & \dfrac{1}{2c\sigma}\left[c-\dfrac{\alpha u+\beta v}{\sigma}-\dfrac{V^2}{2}-\dfrac{c^2}{\gamma-1}\right] & \dfrac{1}{2c\sigma}\left[c-\dfrac{\alpha u+\beta v}{\sigma}+\dfrac{V^2}{2}+\dfrac{c^2}{\gamma-1}\right]
\end{pmatrix}
$$

式中 c 为无量纲化后的声速，$\boldsymbol{S}$ 为由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左特征行向量所构成的矩阵。

可利用特征值 $\lambda_k(\boldsymbol{A})$ 的分裂值来构造分裂后的流通向量 $\tilde{f}^{\pm}$。类似一维情况，可以给出流通向量的一般表达式

$$\tilde{\vec{f}}_1=\frac{\rho}{2\gamma}\begin{bmatrix} 2(\gamma-1)\tilde{\lambda}_1+\tilde{\lambda}_3+\tilde{\lambda}_4 \\ 2(\gamma-1)\tilde{\lambda}_1 u-\tilde{\lambda}_3(u-c\tilde{k}_1)+\tilde{\lambda}_4(u+c\tilde{k}_1) \\ 2(\gamma-1)\tilde{\lambda}_1 v+\tilde{\lambda}_3(v-c\tilde{k}_2)+\tilde{\lambda}_4(v+c\tilde{k}_2) \\ (\gamma-1)\tilde{\lambda}_1 V^2+\frac{\tilde{\lambda}_3}{2}[(u-c\tilde{k}_1)^2+(v-ck_2)^2] \\ \quad +W_1+\frac{\tilde{\lambda}_4}{2}[(u+c\tilde{k}_1)^2+(v+c\tilde{k}_2)^2] \end{bmatrix} \tag{A-3}$$

$$W_1=\frac{(3-\gamma)(\tilde{\lambda}_3+\lambda_4)c^2}{2(\gamma-1)}$$

$$\tilde{k}_1=\frac{\alpha}{\sigma},\qquad \tilde{k}_2=\frac{\beta}{\sigma}$$

如果取 $\tilde{\lambda}_k(\boldsymbol{A})=\lambda_k(\boldsymbol{A})$，则可得到原流通向量 $\vec{f}$。如果取 $\tilde{\lambda}_k(\boldsymbol{A})=\lambda_k^{\pm}(\boldsymbol{A})$，则可得到分裂后的 $\vec{f}^{\pm}$。

二、三 维 情 况

设 $\vec{f}_1$、$\vec{f}_2$ 和 $\vec{f}_3$ 分别为对应于 x、y 和 z 方向的流通向量。现讨论更为一般的形式

$$\vec{f}=\alpha_1\vec{f}_1+\alpha_2\vec{f}_2+\alpha_3\vec{f}_3 \tag{A-4}$$

对应的雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_1\frac{\gamma-1}{2}V^2-u\widetilde{V} & (2-\gamma)\alpha_1 u+\widetilde{V} & -(\gamma-1)\alpha_1 v+\alpha_2 u & -(\gamma-1)\alpha_1 w+\alpha_3 u & \alpha_1(\gamma-1) \\ \alpha_2\frac{\gamma-1}{2}V^2-v\widetilde{V} & \alpha_1 v-(\gamma-1)\alpha_2 u & (2-\gamma)\alpha_2 v+\widetilde{V} & -(\gamma-1)\times\alpha_2 w+\alpha_3 v & \alpha_2(\gamma-1) \\ \alpha_3\frac{\gamma-1}{2}V^2-w\widetilde{V} & \alpha_1 w-(\gamma-1)\alpha_3 u & -(\gamma-1)\alpha_3 v+\alpha_2 w & (2-\gamma)\alpha_3 w+\widetilde{V} & \alpha_3(\gamma-1) \\ \left[(\gamma-2)\frac{V^2}{2}-\frac{c^2}{\gamma-1}\right]\widetilde{V} & \alpha_1\left(\frac{V^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma-1}\right)-(\gamma-1)u\widetilde{V} & \alpha_2\left(\frac{V^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma-1}\right)-(\gamma-1)v\widetilde{V} & \alpha_3\left(\frac{V^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma-1}\right)-(\gamma-1)w\widetilde{V} & \gamma\widetilde{V} \end{bmatrix}$$

式中

$$\tilde{V} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$$

雅可比矩阵可通过对角矩阵来表示

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S}^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{vmatrix} \lambda_1(\boldsymbol{A}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2(\boldsymbol{A}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(\boldsymbol{A}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4(\boldsymbol{A}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5(\boldsymbol{A}) \end{vmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3}(\boldsymbol{A}) = \tilde{V}$$

$$\lambda_{4,5}(\boldsymbol{A}) = \tilde{V} \mp c\sigma \qquad \text{(A-5)}$$

$$\sigma = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

下面给出一种相似变换矩阵 S 和 S^{-1} 的表达形式

$$\boldsymbol{S} = \begin{vmatrix} \dfrac{V^2}{2} - \dfrac{c^2}{\gamma - 1} & -u & -v & -w & 1 \\ \alpha_2 u - \alpha_1 v & -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_3 u - \alpha_1 w & -\alpha_3 & 0 & \alpha_1 & 0 \\ -\tilde{V} - \dfrac{V^2}{2} \times \dfrac{\gamma - 1}{c}\sigma & \alpha_1 + \dfrac{\gamma - 1}{c} u\sigma & \alpha_2 + \dfrac{\gamma - 1}{c} v\sigma & \alpha_3 + \dfrac{\gamma - 1}{c} w\sigma & -\dfrac{\gamma - 1}{c}\sigma \\ -\tilde{V} + \dfrac{V^2}{2} \times \dfrac{\gamma - 1}{c}\sigma & \alpha_1 - \dfrac{\gamma - 1}{c} u\sigma & \alpha_2 - \dfrac{\gamma - 1}{c} v\sigma & \alpha_3 - \dfrac{\gamma - 1}{c} w\sigma & \dfrac{\gamma - 1}{c}\sigma \end{vmatrix}$$

$S^{-1}=$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\gamma-1}{c^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2c\sigma} & \frac{1}{2c\sigma} \\
-\frac{\gamma-1}{c^2}u & -\frac{\alpha_2}{\sigma^2} & -\frac{\alpha_3}{\sigma^2} & \frac{\alpha_1}{2\sigma^2}-\frac{u}{2c\sigma} & \frac{\alpha_1}{2\sigma^2}+\frac{u}{2c\sigma} \\
-\frac{\gamma-1}{c^2}v & \frac{\alpha_1^2+\alpha_3^2}{\alpha_1\sigma^2} & -\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\sigma^2} & \frac{\alpha_2}{2\sigma^2}-\frac{v}{2c\sigma} & \frac{\alpha_2}{2\sigma^2}+\frac{v}{2c\sigma} \\
-\frac{\gamma-1}{c^2}w & -\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1\sigma^2} & \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_1\sigma^2} & \frac{\alpha_3}{2\sigma^2}-\frac{w}{2c\sigma} & \frac{\alpha_3}{2\sigma^2}+\frac{w}{2c\sigma} \\
-\frac{\gamma-1}{c^2}\times\frac{V^2}{2} & \frac{v}{\alpha_1}-\frac{\alpha_2 V}{\alpha_1\sigma^2} & \frac{w}{\alpha_1}-\frac{\alpha_3\widetilde{V}}{\alpha_1\sigma^2} & \left(\frac{\widetilde{V}}{2\sigma^2}-\frac{1}{2c\sigma}\right)\times\left[\frac{V^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma-1}\right] & \left(\frac{\widetilde{V}}{2\sigma^2}+\frac{1}{2c\sigma}\right)\times\left[\frac{V^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma-1}\right]
\end{bmatrix}
$$

三维流通向量的表达式为

$$
\vec{f}_1=\frac{\rho}{2\gamma}\begin{bmatrix}
2(\gamma-1)\tilde{\lambda}_1+\tilde{\lambda}_4+\tilde{\lambda}_5 \\
2(\gamma-1)\tilde{\lambda}_1 u+\tilde{\lambda}_4(u-c\tilde{k}_1)+\tilde{\lambda}_5(u+c\tilde{k}_1) \\
2(\gamma-1)\tilde{\lambda}_1 v+\tilde{\lambda}_4(v-c\tilde{k}_2)+\tilde{\lambda}_5(v+c\tilde{k}_2) \\
2(\gamma-1)\tilde{\lambda}_1 w+\tilde{\lambda}_4(w-c\tilde{k}_3)+\tilde{\lambda}_5(w+c\tilde{k}_3) \\
(\gamma-1)\tilde{\lambda}_1 V^2+\frac{\tilde{\lambda}_4}{2}[(u-c\tilde{k}_1)^2+(v-c\tilde{k}_2)^2+(w-c\tilde{k}_3)^2]+W_1+P+\frac{\tilde{\lambda}_5}{2}[(u+c\tilde{k}_1)^2+(v+c\tilde{k}_2)^2+(w+c\tilde{k}_3)^2]
\end{bmatrix}
\tag{A-6}
$$

$$
W_1=\frac{(3-\gamma)(\tilde{\lambda}_4+\tilde{\lambda}_5)c^2}{2(\gamma-1)}
$$

$$
P=2\rho(\gamma-1)\tilde{\lambda}_1\tilde{k}_1(\tilde{k}_2 w-\tilde{k}_3 v)
$$

$$
\tilde{k}_1=\frac{\alpha_1}{\sigma},\quad \tilde{k}_2=\frac{\alpha_2}{\sigma},\quad \tilde{k}_3=\frac{\alpha_3}{\sigma},
$$

$$\sigma = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

附录二　罗平均矩阵的构造

现直接讨论三维情况，设有方程

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{f}_2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{f}_3}{\partial z} = 0 \tag{A-7}$$

其中

$$\vec{U} = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{vmatrix} \qquad \vec{f}_1 = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E+p) \end{vmatrix}$$

$$\vec{f}_2 = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(E+p) \end{vmatrix} \qquad \vec{f}_3 = \begin{vmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(E+p) \end{vmatrix}$$

这里（u，v，w）是在坐标系（x，y，z）中的速度，无量化后的压力在本章第二节已经给出，E 为

$$E = \rho\left(C_v T + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\right) \tag{A-8}$$

可以验证，$\vec{U}$、$\vec{f}_k$ 的分量可通过 $\vec{W}$ 向量之分量的二次（平方）组合量构成，这里

$$\vec{W} = \rho^{1/2}\{1,\ u,\ v,\ w,\ H\}^T \tag{A-9}$$

$$\rho H = E + p \tag{A-10}$$

例如，　$U_1 = W_1^2$，$(f_2)_4 = W_3 W_4$，…

$$U_5 = \frac{W_1 W_5}{\gamma} + \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma}(W_2^2 + W_3^2 + W_4^2) \tag{A-11}$$

$$(f_2)_2=\frac{\gamma-1}{\gamma}W_1W_5+\frac{\gamma+1}{2\gamma}W_2^2-\frac{\gamma-1}{2\gamma}(W_3^2+W_4^2)$$

$\vdots$

向量 $\vec{U}$、$\vec{f}_1$、$\vec{f}_2$、$\vec{f}_3$ 的跳跃关系可通过 $\vec{W}$ 的跳跃关系来表示

$$(\vec{U}_L-\vec{U}_R)\equiv\widetilde{\boldsymbol{B}}(\vec{W}_L-\vec{W}_R) \tag{A-12}$$

这里$\widetilde{\boldsymbol{B}}$是一平均意义下的矩阵，用下式表示

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}=\begin{Vmatrix} 2\widetilde{W}_1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ \widetilde{W}_2, & \widetilde{W}_1, & 0, & 0, & 0 \\ \widetilde{W}_3, & 0, & \widetilde{W}_1, & 0, & 0 \\ \widetilde{W}_4, & 0, & 0, & \widetilde{W}_1, & 0 \\ \dfrac{\widetilde{W}_5}{\gamma}, & \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\widetilde{W}_2, & \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\widetilde{W}_3, & \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\widetilde{W}_4, & \dfrac{\widetilde{W}_1}{\gamma} \end{Vmatrix}$$

$\widetilde{W}_k$ 表示两点间的算术平均。类似可以写出

$$(\vec{f}_1)_L-(\vec{f}_1)_R\equiv\widetilde{\mathbf{C}}(\vec{W}_L-\vec{W}_R) \tag{A-13}$$

这里

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}=$$

$$\begin{vmatrix} \widetilde{W}_2, & \widetilde{W}_1, & 0, & 0, & 0 \\ \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\widetilde{W}_5, & \dfrac{\gamma+1}{\gamma}\widetilde{W}_2, & -\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\widetilde{W}_3, & -\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\widetilde{W}_4, & \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\widetilde{W}_1 \\ 0, & \widetilde{W}_3, & \widetilde{W}_2, & 0, & 0 \\ 0, & \widetilde{W}_4, & 0, & \widetilde{W}_2, & 0 \\ 0, & \widetilde{W}_5, & 0, & 0, & \widetilde{W}_2 \end{vmatrix}$$

可以写成简单的(A-12)和(A-13)式是因为$\vec{U}$,$\vec{f}_k$ 中任一个向量与另一向量互为一次齐次函数，而这些向量又是W的二次齐次函数。

当有了式（A-12）和（A-13）后就可以建立增量 $\Delta\vec{f}_1$ 与 $\Delta\vec{U}$ 之间的联系，从而可以得到 $\widetilde{A}_1=\widetilde{C}(\widetilde{B})^{-1}$，$\widetilde{A}_1$ 就是对应于 $\vec{f}_1$ 的平均意义下的矩阵，它将满足U特性。

类似可以得到对应于 $\vec{f}_2$ 和 $\vec{f}_3$ 的平均意义下的矩阵 $\widetilde{A}_2$ 和 $\widetilde{A}_3$。

在文献〔30〕中还给出了对应于矩阵 $\widetilde{A}_1$ 的特征值和特征向量。

$\widetilde{A}_1$ 的特征值为

$$\lambda_{1,2,3}= u$$
$$\lambda_{4,5}= u \mp c \tag{A-14}$$

$$c^2=(\gamma-1)\left[H-\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\right]$$

应注意式（A-14）中出现的物理量均为如下意义下的平均量

$$u=\frac{u_L+Du_R}{1+D}$$

$$v=\frac{v_L+Dv_R}{1+D}$$

$$w=\frac{w_L+Dw_R}{1+D} \tag{A-15}$$

$$H=\frac{H_L+DH_R}{1+D}$$

$$D=\left(\frac{\rho_R}{\rho_L}\right)^{1/2} \tag{A-16}$$

与 λ_k 对应的特征向量为

$$\vec{e}_1=\begin{vmatrix}1\\u\\v\\w\\\frac{V^2}{2}\end{vmatrix}\quad \vec{e}_2=\begin{vmatrix}0\\0\\v\\0\\v^2\end{vmatrix}\quad \vec{e}_3=\begin{vmatrix}0\\0\\0\\w\\w^2\end{vmatrix}$$

$$\vec{e}_4=\begin{vmatrix}1\\u-c\\v\\w\\H-uc\end{vmatrix}\qquad \vec{e}_5=\begin{vmatrix}1\\u+c\\v\\w\\H+uc\end{vmatrix}$$

参考文献

1 Warming R F and Hyett B J. The Modified Equation Approach to the Stability and Accuracy Analysis of Finite-Difference Methods, J. Comp Phyys. 1974, 14, 159～179

2 马延文. Navier-Stoke方程的数值计算方法研究. 计算数学, 1983 (1)

3 Брандовская И Ю. Разностная схема для численного решения двухмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого газа, Доклады А Н СССР, 1965, 160 (5):1042～1045

4 Allen J S and Cheng S I. Numerical Solutions of the Compressible Navier-Stokes Equations for the laminar Near Wake, Phys. Fluids, 1970, 13, 35～52

5 MacCormack R W. The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering, AIAA Paper No. 69-354

6 Tannehill J C., Holst T L and Rakich J V. Numerical Computation of Two-Dimensional Viscous Blunt Body Flow with an Impinging Shock, AIAA Paper No. 75-154

7 Kutler P, Warming R F and Lomax H. Computation of Space Shuttle Flow Fields Using Noncentred Finite Difference Scheme, AIAA J 11: 196～204

8 Годунов С К. Разностный Метод Численного Расчета Разрывных Решений Уравнений Гидродинамики, Математический Сборник, 1959, 47 (3)

9 Jennings G. Discrete Shock, Comm. Pure Appl. Math., 1974, 27

10 Harten A, Hyman J M and Lax P D. On Finite Difference Approximations and Entropy Conditions for Shocks. Comm. Pure Appl. Math., 1976, 29: 297

11 Courant R, Isaacson E and Rees M. On the Sotution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences. Comm. Pure Appl. Math 1952, 5: 243～255

12 Moretti G. The λ-Scheme, Computers and Fluids. 1979, 7: 191～205

13 Chakravarthy S R. The Split-Coefficient Matrix Method for Hyperbolic Systems of Gas Dynamics Equations. AIAA Paper No. 80-0268

14 Steger J L and Warming R F. Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamic Equations with Application to Finite-Diffirence Methods. J. Comp. Phys., 1981, 40, 263～293

15 Ma Yanwen and Fu Dexun. Numerical Solution of Compressible Flow with Compact Scheme. AIAA Paper No. 87-1123

16 Buning P G and Steger J L. Solution of the Two-Dimensional Euler

Equations with Generalized Coordinate Transformation Using Flux Vector Splitting. AIAA Paper No. 82-0971

17 Steger J L. Preliminary Study of Relaxation Method for the Inviscid Conservative Gasdynamics Equations Using Flux Splitting. NASA CR-3415, 1981

18 Van Leer B., Flux-Vector Splitting for the Euler Equations, ICASE Report 82-30, 1982

19 MacCormack R W. Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow, AIAA Paper 81-0110

20 MacCormack R W, Current Status of Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations AIAA Paper 85-032

21 Warming R F and Beam R M. Upwind Second Order Difference Schemes and Applications in Aerodynamics. AIAA J., 1976, 14; 1241~1249

22 Jameson A. Transonic Flow Calculations, MAE Report 1651, Princeton University

23 Van Der Houwen. Construction of Integration Formulas for Initial Value Problems. North Holland, 1977.

24 Roe P L and Pike J. Reconstructucring Jameson's Finite Volume Scheme for Euler Equations. RAE Report 1983.

25 Huang L C. On an Upwind Scheme for Hypevbolic Conservation Laws, unpublished Lecture Notes, 1985.

26 Yee H C. Upwind and Symmetric Shock-Capturing Schemes. NASA TM 89-464, 1987.

27 Roe P L The Use of the Riemann Problem in Finite Difference Schemes, Lecture Notes in Physics, 1980, 141.

28 Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V A Second Order Sequel to Godunov's Method, J. Compt. Phys. 1979, 32: 101~136

30 Roe P L. Approximate Riemann Solvers. Parameter Vector, and Difference Schemes J Comput. Phys. 1981, 43: 357~372

31 Huang L C. Pseudo-Unsteady Difference Scheme for Discontinuous Solutions of Steady State One-Dimensional Fluid Dynamics Equations J. Comput Phys. 1981, 42: 195~211

32 Huang L C. A Boundary Difference Scheme and its Application in the Computation of Steady State Axisymmetric Flow in Nozzles

33 Huang L C. An Upwind Difference Scheme and Its Corresponding Boundary Scheme, J. Comput Math. 1983, 1: 75~82

34 黄兰洁。用迎风格式计算轴对称喷管定常超音速流动。力学学报，1985，17.

35 Huang L C. On an Upwind Scheme Proc of the 1984 Beijing Symp. on Diff. Geom. and Diff. Eqs., Science Press, 1985

36 Hedstrom G W Nonreflecting Boundary Condition for Nonlinear Hyperbolic Systems. J. Comput. Physics, 1979, 30: 222～237

37 Harten A and Hymon J M. Self Adjusting Grid Methods for One-Dimensional Hyperbolic Conservation Laws. J. Comput. Phys. 1983, 50: 235～269

38 李松波. 用 MacCormack 二步格式计算无粘流场的数值实验, 空气动力学学报, 1983 (4).

39 MacCormack R W and Baldwin B S. A Numerical Method for Solving the Navier-Stokes Equations with Application to Shock Boundary Layer Interactions. AIAA No. 75-1

40 Yanenko N N. The Method of Fractional Steps: The Solution of Problems of Mathematical Physics in Several Variables. Springer-Verlag, New York 1971

41 Allen J S and Cheng S I. Numerical Solutions of the Compressible Navier-Stokes Equations for the Laminar Near Wake. Phys. Fluids. 1970, 13: 35～52

42 Beam R M and Warming B F An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations. AIAA J. 1978, 16: 393～401

第五章　数值解分辨率的改进
——TVD格式

第一节　模拟精度与网格技术

一、逼近精度与特征尺度

在利用数值方法模拟物理问题时，首先遇到的是精度问题。在实践中所需模拟的问题求解域极为复杂，例如被绕物体有拐角、凹陷、突起等，而来流速度可能是高超声速、超声速、跨声速和亚声速等。所有这些使得物理流动图象极为复杂。从宏观角度考虑，流动区域大体上包含有光滑区、边界层及剪切流动区、分离涡运动区，以及含有激波和间断面的区域等。

流动结构一般都与一定的特征尺度相联系。为了能正确地描述流动的每一局部特性，必需在相应的尺度范围内分布有足够的网格点数。对极限情况，如激波及涡面等，相应的区域尺度趋于零，此时需要构造特殊的格式才能正确地反映流动结构。

在解的光滑区，流动参数的变化与被绕物体的特征长度有着同样的量级。如果在整个计算区域内解都是光滑的，则人们多采用具有二阶逼近精度的差分格式来模拟。对这类问题人们主要把重点放在提高求解效率方面。在光滑区也易于构造高精度格式。鲁萨诺夫（Rusanov）、伯斯坦（Burstain）、米林（Mirin）以及沃明，库勒（Warming, Kutler）和朗马克士(Lomax)等人构造了具有三阶逼近精度的差分格式[1~3]，笔者在文献[4]中曾用紧致格式求解了钝锥超声速粘性绕流问题。高精度格式的采用可利用较少的网格点数得到较高精度的数值解，因而既提高了数值解的精度又可改进求解效率。一般说来，高精度格式都较为复

杂，且给边界条件的处理带来一定困难。

求解粘性绕流问题时需要考虑物面附近的粘性效应。通常人们把边界层区分开来进行计算。在这种处理方法中没有考虑到粘性流（指边界层内流动）和无粘流之间的相互干扰，而这种干扰有时是不可忽略的。为了考虑这种干扰，一种是采用内外流迭代的方法，另一种方法是将两个区域作为一个整体来求解N－S方程或简化N－S方程。

在求解这类干扰问题时将遇到两个截然不同的特征尺度，其一为物体的特征长度，另一为边界层的厚度。在物面附近的法向方向物理量的梯度很大，为了正确模拟在该区内的流动特性，网格点的合理布局是非常重要的。

分离流与涡运动的数值模拟近年来引起人们极大的兴趣。在这一区域内N－S方程中的无粘项和粘性项都起着重要的作用。曾有人企图通过欧拉方程来研究分离流动，计算给出的物理图象虽然形似，但这并不是粘性流动的真实反映。

二、激波附近的数值解

激波在不考虑粘性效应时是一间断面。过去多把这一间断分离开来做为内边界进行处理[5]，在这一内边界上利用激波关系式及相应的特征关系。由于将间断面分离了出来，因而这种方法的精度较高，这就是通常所说的激波装配法。这类方法一般较为复杂，对有些情况，如流动结构事先不清楚，有悬挂激波时，特别利用N－S方程进行求解时，这种装配方法难以应用。

另一种方法是不将间断面分离出来，而将其包含在计算区域之内用统一的方式进行计算，即所谓激波捕捉法。在第四章曾指出，采用一阶精度的格式会使激波抹的过平，而通常具有二阶或高于二阶精度的经典格式数值解在激波附近会产生非物理的振荡。过去通常采用人工粘性的方法来压制这种非物理的振荡。有关这种人工平滑或人工滤波技术将在第六章中专门进行讨论。

近年来为了改善激波附近数值解的分辨率取得了很大进展，

例如发展了TVD格式（Total Variation Diminishing），ENO格式（Essentially Non Oscillatory）等。这类格式在激波附近都给出了有着较高分辨率的数值解。在本章中将讨论TVD格式.在我国也发展了一些具有自己特点的有着较高分辨率的差分方法，如NND格式（Non Oscillatory, Containing No free parameters and Dissipative scheme），MmB格式（Maximum and minimum Bounds Preserving）。笔者所发展的带色散协调因子的迎风紧致格式在激波附近也给出了较高的分辨率。关于这些格式将在第六章中进行讨论。

三、粘性流计算中的网格与逼近精度

在数值计算粘性流动问题时应注意真实的粘性不被由于差分化而引入的截断误差所掩盖。这种误差主要来自于方程中无粘项的差分逼近。对于高雷诺数这一问题更应引起注意。可通过坐标变换的方法使得在物理空间的网格布局更为合理。现以线性伯格斯方程为例做进一步讨论

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad c>0 \tag{5-1-1}$$

式中 c 和 μ 均为常数。如果定义雷诺数 Re 为

$$Re=\frac{c}{\mu}$$

则式（5-1-1）可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c\left[\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\right] \tag{5-1-2}$$

现进行坐标变换

$$\xi=\xi(x)$$

变换后的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\xi_x\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{c}{Re}\left[\xi_{xx}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\xi_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right]$$

如果选取的坐标变换满足方程

$$Re\xi_x=\xi_{xx} \tag{5-1-3}$$

则变换后的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{c}{Re}\xi_x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \tag{5-1-4}$$

在此式中不再出现空间一阶导数项，因而也就不存在一阶空间导数的逼近误差影响真实粘性的问题了。如果要求$\xi(x)$满足条件

$$\xi(0)=0,\quad \xi(1)=1$$

则式（5-1-3）的解为

$$\xi(x)=\frac{\exp(Rex)-1}{\exp(Re)-1} \tag{5-1-5}$$

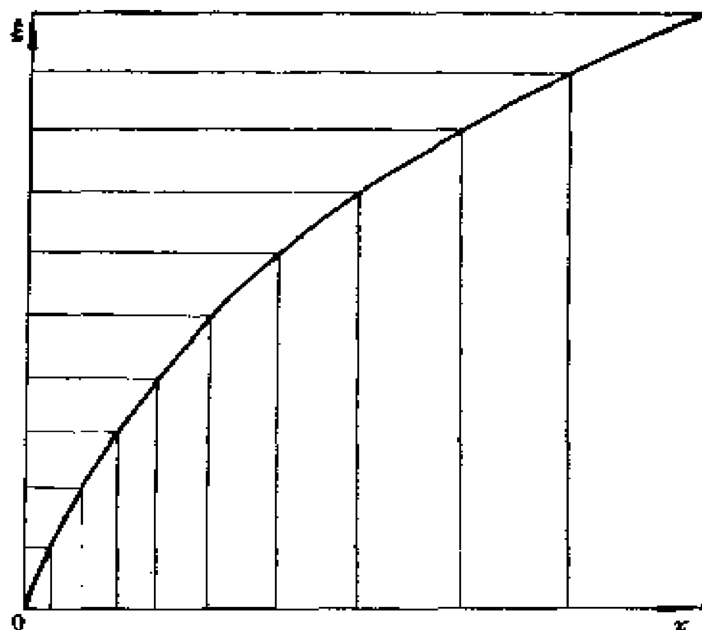


图5-1　计算平面与物理平面的网点分布

从图 5-1 中可以看到，在计算平面内网格点是均匀分布的，在物理平面内接近 $x=0$ 处网格是逐渐加密的。

在实际应用中不可能找到这样的坐标变换，使得方程中空间一阶导数项自动消失，但适当的坐标变换可减少导数的系数。

为了改善边界层内数值解的精度，指数型的差分格式引起人们的注意，但该方法主要用来求解不可压流动问题[6-8]。

四、网格雷诺数

网格雷诺数是粘性流数值模拟中的一个重要参数。它主要反映了差分化后的N－S方程中粘性项是否起到了应有的作用。现通过模型方程做一启发式的讨论。

逼近于式（5-1-1）的最简单的差分格式为

$$\frac{\delta_t u_i^{n+1}}{\Delta t}+c\frac{\delta_x^0 u_i^n}{\Delta x}=\mu\frac{\delta_x^2 u_i^n}{\Delta x^2} \qquad (5\text{-}1\text{-}6)$$

罗奇(Roache)在文献[9]中称这一格式为FTCS方法，在差分式中时间导数取前差，空间导数取中心差（Forward Time and Centred Space Difference)。如果定义网格雷诺数为

$$Re_{\Delta x}=\Delta x Re$$

则式（5-1-6）可改写成如下形式：

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=\frac{c}{\Delta x}\left[\frac{1}{Re_{\Delta x}}\delta_x^2 u_i^n-\delta_x^0 u_i^n\right] \qquad (5\text{-}1\text{-}7)$$

从此式中可以看出，网格雷诺数在差分方程中起着权衡作用，它的大小意味着在差分方程中惯性力和粘性力各自起作用的大小不同。

定义

$$r=\mu\frac{\Delta t}{\Delta x^2},\quad \gamma=c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

FTCS格式的修正方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\mu-\frac{c^2\Delta t}{2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{c\Delta x^3}{3}$$

$$\times\left(3r-\gamma^2-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\cdots \qquad (5\text{-}1\text{-}8)$$

启发式的稳定性分析要求

$$c^2\frac{\Delta t}{2}\leqslant\mu$$

或通过网格雷诺数来表示

$$Re_{\Delta x}\leqslant\frac{2}{\gamma}\tag{5-1-9}$$

在方程（5-1-1）中含μ项起着扩散作用，条件（5-1-9）使得离散化后的方程也有着这种扩散性质。现将离散化后的方程（5-1-7）改写为

$$u_j^{n+1}=\frac{r}{2}(2-Re_{\Delta x})u_{j+1}^n+(1-2r)u_j^n$$

$$+\frac{r}{2}(Re_{\Delta x}+2)u_{j-1}^n\tag{5-1-10}$$

从物理上讲，如果初始分布函数是单调的，则方程（5-1-1)的解将使这种单调性保持下去。根据第四章的讨论，常系数格式的单调性要求各系数为非负，即

$$\mu\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\leqslant\frac{1}{2}\tag{5-1-11}$$

$$Re_{\Delta x}\leqslant 2\tag{5-1-12}$$

条件（5-1-11）也是差分方程中粘性项的稳定性所要求的，条件（5-1-12）为在差分方程中粘性项起到应有的作用而要求的。

通常认为在粘性流数值计算时网格雷诺数应满足条件（5-1-12)。这里仅仅是一个启发式的分析，它表明在进行粘性流计算时，对网格的尺度应有一定的要求。还应注意到，类似于式（5-1-12）的限制是针对局部网格雷诺数而言的。在无粘占主导地位的区域中由于雷诺数很大，方程中的整个粘性都可以忽略，因而可不考虑网格雷诺数的影响。在粘性项起主导作用的区域中往往都是速度比较小，因而局部雷诺数也比较小，再加上适当的网格选取可以使局部网格雷诺数不会过大。

对网格雷诺数的限制与具体差分格式有关。如果对方程（5-1-1）中的无粘项取迎风差分（设$c>0$）

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+c\frac{\delta_x^- u_j^n}{\Delta x}=\mu\frac{\delta_x^2 u_j^n}{\Delta x^2}\tag{5-1-13}$$

则修正方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=\left[\mu\left(1+\frac{Re_{\Delta x}}{2}\right)-\frac{c^2\Delta t}{2}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\cdots$$

从修正方程中可以看出，为了保持差分格式具有耗散特性，要求对时间步长有一定限制，为了使物理上真实的粘性起主导作用，要求网格雷诺数足够小。为了放松对网格雷诺数的限制，采用高精度的差分格式是有益的。

第二节　一阶逼近精度的TVD格式

利用通常的激波捕捉技术求解具有间断解的物理问题所遇到的主要困难是

（1）在解的梯度大的区域，在二阶或高阶精度格式数值解中有非物理振荡产生；

（2）可能出现非线性不稳定；

（3）可能得到非物理解。

现已知，对于单个方程单调的守恒型差分格式的解可以收敛到满足熵不等式的弱解即唯一物理解，然而它只有一阶逼近精度。当采用二阶（或高阶）精度格式求解具有间断解的物理问题时，需加入人工耗散项来克服数值解中的伪振荡，但会引起信息的丢失。近年来新发展的一种新型差分格式克服了上述的三个困难。这种格式具有二个特点：①对标量非线性方程及常系数双曲型方程组，格式的解是总变差衰减的（Total Variation Diminishing）；②与守恒律和熵不等式是相容的。具有这种特性的格式被称为TVD格式或TVNI格式（Total Variation Nonincreasing）。

TVD格式提高了对激波的捕捉能力，但其不足之处是在极值点上格式只有一阶逼近精度。为了克服这一不足，之后又发展了ENO格式（Essentially Non Oscillatory）。ENO格式处处都有二阶逼近精度，目前该格式仍处于发展之中。

在文献[10]中描绘了各种格式之间的从属关系。在图5-2中

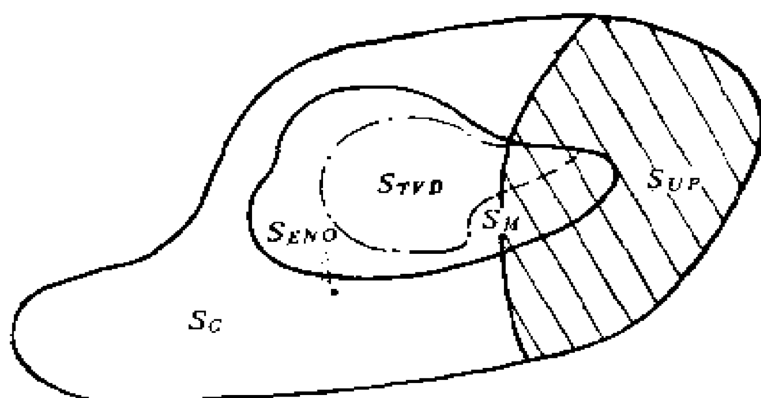


图5-2　各类型差分格式的从属关系

给出了逼近双曲型方程各类型差分格式之间的从属关系。设S_T为包括了各种类型差分格式的集合。S_T由两个大部分组成，其一为由迎风格式组成的子集S_{UP}，另一为由中心型差分格式组成的子集S_C，即$S_T=S_C \cup S_{UP}$。设S_{ENO}为由ENO格式组成的子集，S_{TVD}为由TVD格式组成的子集，S_M为由单调格式组成的子集，则各种格式之间的从属关系为$S_M \subset S_{TVD} \subset S_{ENO} \subset S_T$。

在我国近年来也发展了一些具有对激波有较强捕捉能力的方法，如在第六章将要介绍的NND格式，MmB格式，以及带色散协调因子的迎风紧致格式等。可以证明，NND格式是TVD的。对二维标量方程不存在二阶精度的TVD格式，但可构造二阶精度的MmB格式[11]。此外我国也发展了一些各种改进形式的TVD格式和ENO格式等[32]。

一、TVD格式的物理考虑

现对总变差这一概念做进一步的讨论。对一元函数$u(x)$的定义域任给一划分Δ：$\bigcup_j (x_j, x_{j+1}]$。总变差为对所有划分$\sum_j |u(x_{j+1})-u(x_j)|$的上确界。记总变差为

$$TV(u(x))=\sup_{\Delta}\left(\sum_j |u(x_{j+1})-u(x_j)|\right) \qquad (5-2-1)$$

如果 $u(x)$ 在整个实轴上连续可微，则在实轴上的总变差为

$$TV(u(x))=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|dx$$

如果函数是离散的u_k($k=-\infty$, …, $+\infty$)，则总变差定义为

$$TV(u)=\sum_{-\infty}^{\infty}|u_{k+1}-u_k| \quad (5-2-2)$$

下面来讨论非线性模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0 \quad (5-2-3)$$

之解的总变差变化情况。该方程的解沿特征线

$$\frac{dx}{dt}=a(u)$$

是常数，因为此时

$$\frac{du}{dt}=0$$

式中 $a(u)=f'_u$。设从t_1时刻到t_2时刻特征线没有相交（参看图5-3）。在t_1时刻有任意划分，可在t_2时刻找到相应的划分，使得 $u(t_2, x_i^*)=u(t_1, x_i)$，反之亦然。由此可知，在特征线相交之前方程（5-2-3）的解对于 x 的总变差为常数。

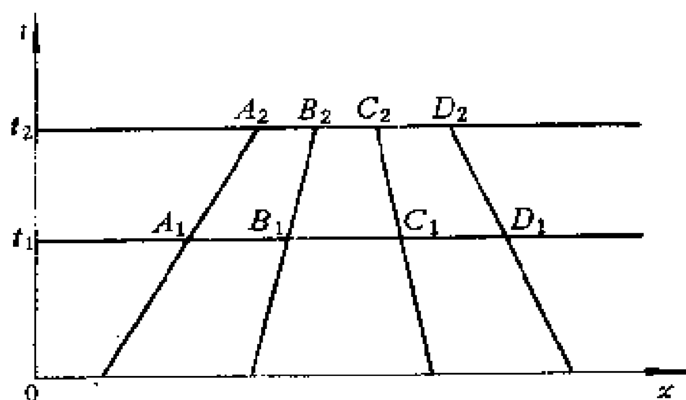


图5-3　特征线相交前之总变差

现假设特征线B_1B_2和C_1C_2于t_2时刻相交（参看图5-4），此时t_2时刻B_2点之左方的总变差与t_1时刻B_1之左方的总变差相等，C_2和C_1之右方的总变差相等，而

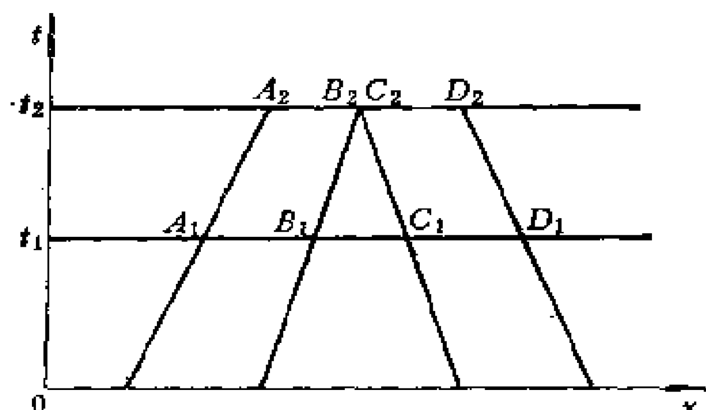


图5-4　特征线相交时之总变差

$$|u(C_2)-u(B_2)|=|u(C_1)-u(B_1)|$$

$$\leqslant \sum_{B_1\leqslant x\leqslant C_1}|u(x_{j+1})-u(x_j)|$$

因而当有激波时总变差是下降的。

由上面的简单讨论中可知，方程（5-2-3）的解随时间的推移总变差是下降的。由于方程解的这一特性使得随时间的增长解中不可能产生新的局部极值点，且解的局部最小值在时间推移过程中不再减小，而局部最大值不再增加。因此，如果在初始时刻解是单调的，在以后的时刻将保持这种单调性。

应注意，这里对TVD特性的讨论是针对非线性标量方程而进行的，对非线性方程组和多维问题并未有相应的理论基础。

二、显式TVD格式

设逼近于式（5-2-3）的三点守恒型差分格式为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda\left(h^n_{j+\frac{1}{2}}-h^n_{j-\frac{1}{2}}\right) \qquad (5\text{-}2\text{-}4)$$

其中

$$h_{j+\frac{1}{2}}=h(u_j,\ u_{j+1}),\ \ \lambda=\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

要求满足相容条件

$$h(u_j, u_j) = f(u_j) \tag{5-2-5}$$

称 h 为数值流通量。这里将讨论如下形式的数值流通量

$$h_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[f_j + f_{j+1} - \psi\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\Delta_{j+\frac{1}{2}}u\right] \tag{5-2-6}$$

其中

$$f_j = f(u_j),\quad \Delta_{j+\frac{1}{2}}u = u_{j+1} - u_j,$$

$$a_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \dfrac{f_{j+1} - f_j}{\Delta_{j+\frac{1}{2}}u}, & \Delta_{j+\frac{1}{2}}u \neq 0 \\ a(u_j), & \Delta_{j+\frac{1}{2}}u = 0 \end{cases} \tag{5-2-7}$$

ψ 是 λ 和 a 的函数。

下面给出三个典型的数值流通量的具体形式。

1. L-W 格式

$$h_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[f_j + f_{j+1} - \lambda\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)^2\Delta_{j+\frac{1}{2}}u\right] \tag{5-2-8}$$

$$\psi(a) = \lambda(a)^2$$

2. L-F 格式（Lax-Friedrichs）

$$h_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[f_j + f_{j+1} - \frac{1}{\lambda}\Delta_{j+\frac{1}{2}}u\right] \tag{5-2-9}$$

$$\psi(a) = \frac{1}{\lambda}$$

3. GCIR格式（Generalization of the Courant-Isaacson-Rees Scheme）

$$\psi(a) = |a| \tag{5-2-10}$$

可很容易证明，如果满足条件

$$\lambda C^{-}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\lambda}{2}\left[-a_{j+\frac{1}{2}}+\psi\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\right]\geqslant 0$$

（5-2-11 a）

$$\lambda C^{+}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\lambda}{2}\left[a_{j+\frac{1}{2}}+\psi\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\right]\geqslant 0$$

（5-2-11 b）

$$\lambda\left(C^{+}_{j+\frac{1}{2}}+C^{-}_{j+\frac{1}{2}}\right)=\lambda\psi\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\leqslant 1$$

（5-2-11 c）

则格式（5-2-4)、（5-2-6）是TVD格式。首先设$\Delta_{j+1/2}u\neq 0$，则由式（5-2-7）可知

$$f_{j\pm 1}=f_j\pm a_{j\pm\frac{1}{2}}\Delta_{j\pm\frac{1}{2}}u$$

因而

$$h_{j\pm\frac{1}{2}}=f_j+\frac{1}{2}\left[\pm a_{j\pm\frac{1}{2}}\Delta_{j\pm\frac{1}{2}}u-\psi\left(a_{j\pm\frac{1}{2}}\right)\right.$$
$$\left.\times\Delta_{j\pm\frac{1}{2}}u\right]$$

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\lambda}{2}\left\{\left[a_{j+\frac{1}{2}}-\psi\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\right]\Delta_{j+\frac{1}{2}}u\right.$$
$$\left.+\left[a_{j-\frac{1}{2}}+\psi\left(a_{j-\frac{1}{2}}\right)\right]\Delta_{j-\frac{1}{2}}u\right\}$$

将该式取在$j+1$点上，并与在j点上的相应式相减则得

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^{n+1}=\frac{\lambda}{2}\left[-a_{j+\frac{3}{2}}+\psi\left(a_{j+\frac{3}{2}}\right)\right]\Delta_{j+\frac{3}{2}}u^n$$
$$+\left[1-\lambda\psi\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\right]\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n$$
$$+\frac{\lambda}{2}\times\left[a_{j-\frac{1}{2}}+\psi\left(a_{j-\frac{1}{2}}\right)\right]\Delta_{j-\frac{1}{2}}u^n$$

对式之两端取绝对值，并考虑到条件（5-2-11），然后按 j 进行求和则可得到

$$TV(u^{n+1})\leqslant TV(u^{n})$$

上面给出的式（5-2-11）仅是(5-2-4)类型差分格式为 TVD 的一个充分条件。前面给出的 $L-W$ 不是 TVD 格式．$L-F$ 和 GCIR是TVD格式，而其中 $L-F$ 满足熵不等式，而GCIR 不满足熵不等式[15]。

在第四章中曾讨论了单调格式和保单调格式(monotone and monotonicity preserving)。在讨论单调格式时指出，对常系数单波方程，单调格式要求差分方程右端之系数为非负。应注意到，在那里这些系数仅为 j 点的函数，而并不是解 u 的函数，而在此处式（5-2-11）的系数可是 u 的函数。单调的差分格式一定是保单调的，TVD格式是保单调的。保单调格式比单调格式更为广泛，它可以是具有二阶精度的格式[16~19]。TVD格式不能保证熵不等式得到满足，因而差分解可能收敛于非物理解。

在文献[16，20]中哈顿（Harten）以及哈顿和海曼（Harten 和Hyman）等人对一类 TVD格式做了修正，使其与熵不等式是相容的。修正后的函数 ψ 为

$$\psi(z)=\begin{cases}|z| & |z|\geqslant\delta_1\\ \dfrac{z^2+\delta_1^2}{2\delta_1} & |z|<\delta_1\end{cases}\tag{5-2-12}$$

这里δ_1是一个小量。在图 5-5 中给出了三个函数 ψ 的例子。

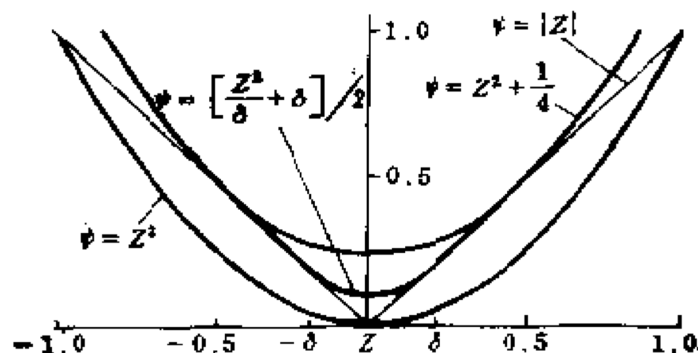


图5-5　不同形式 $\psi(z)$ 的比较

三、隐式TVD格式

讨论具有单参数的五点守恒型差分格式

$$u_j^{n+1}+\lambda\theta\left(h^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}-h^{n+1}_{j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=u_j^n-\lambda(1-\theta)\left(h^n_{j+\frac{1}{2}}-h^n_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{5-2-13}$$

这里$0\leqslant\theta\leqslant 1$。

$$h^k_{j+\frac{1}{2}}=h_{j+\frac{1}{2}}(u^k_{j-1},\ u^k_j,\ u^k_{j+1},\ u^k_{j+2}),\quad k=n,\ n+1$$

设

$$\bar{h}_{j+\frac{1}{2}}=(1-\theta)h^n_{j+\frac{1}{2}}+\theta h^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}$$

则式（5-2-13）可改写成如下形式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\lambda\left(\bar{h}_{j+\frac{1}{2}}-\bar{h}_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{5-2-14}$$

这里

$$\bar{h}_{j+\frac{1}{2}}=\bar{h}(u^n_{j-1},\ u^n_j,\ u^n_{j+1},\ u^n_{j+2},\ u^{n+1}_{j-1},\ u^{n+1}_j,\ u^{n+1}_{j+1},\ u^{n+1}_{j+2})$$

要求数值流通量满足相容条件

$$\bar{h}(u,\ u,\ u,\ u,\ u,\ u,\ u,\ u)=f(u)$$

如果取$\theta=0$则得到显式格式，取$\theta=\frac{1}{2}$得梯形格式，取$\theta=1$则为欧拉时间后差隐式格式。

可将式（5-2-13）写成如下形式

$$Lu^{n+1}=Ru^n \tag{5-2-15}$$

其中L和R都是差分算子

$$(Lu)_j=u_j+\lambda\theta\left(h_{j+\frac{1}{2}}-h_{j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$(Ru)_j = u_j - \lambda(1-\theta)\left(h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}\right) \quad (5\text{-}2\text{-}16)$$

哈顿给出了使格式（5-2-13）为TVD格式的充分条件[17]

$$TV(Ru^n) \leqslant TV(u^n) \quad (5\text{-}2\text{-}17)$$
$$TV(Lu^{n+1}) \geqslant TV(u^{n+1})$$

设数值流通量 $h_{j+\frac{1}{2}}$ 是里普雪茨（Lipschitz）连续的，并式(5-2-13）可改写成形式

$$u_j^{n+1} - \lambda\theta\left(\widetilde{C}^-_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u - \widetilde{C}^+_{j-\frac{1}{2}} \Delta_{j-\frac{1}{2}} u\right)^{n+1}$$
$$= u_j^n + \lambda(1-\theta)\left(\widetilde{C}^-_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u - \widetilde{C}^+_{j-\frac{1}{2}} \Delta_{j-\frac{1}{2}} u\right)^n$$
$$(6\text{-}2\text{-}18)$$

式中

$$\widetilde{C}^{\mp}_{j\pm\frac{1}{2}} = \widetilde{C}^{\mp}(u_{j\mp1},\ u_j,\ u_{j\pm1},\ u_{j\pm2})$$

是有界函数。哈顿进一步指出，满足式（5-2-17）的充分条件是

1．对所有的 j

$$C^{\pm}_{j+\frac{1}{2}} = \lambda(1-\theta)\widetilde{C}^{\pm}_{j+\frac{1}{2}} \geqslant 0 \quad (5\text{-}2\text{-}19\,a)$$

$$C^{+}_{j+\frac{1}{2}} + C^{-}_{j+\frac{1}{2}} = \lambda(1-\theta)\left(\widetilde{C}^{+}_{j+\frac{1}{2}} + \widetilde{C}^{-}_{j+\frac{1}{2}}\right) \leqslant 1$$
$$(5\text{-}2\text{-}19\,b)$$

2．对所有 j

$$-\infty < C \leqslant -\lambda\theta\widetilde{C}^{\pm}_{j+\frac{1}{2}} \leqslant 0 \quad (5\text{-}2\text{-}19\,c)$$

如果取 $\theta=0$ 和$\lambda\widetilde{C}^{\pm} = C^{\pm} = \frac{\lambda}{2}[\psi(z) \pm z]$，则可得到显式格式，如果取 $\theta=1$ 和同样的 $\widetilde{C}^{\pm}$，则可得隐式格式。它们都是只

有一阶精度的格式。如果条件（5-2-19）得到满足，则所得到的格式为一阶精度的TVD格式。

现对 $\theta=1$ 情况做进一步讨论。设

$$C^{\pm}(z)=\frac{1}{2}[\psi(z)\pm z] \tag{5-2-20}$$

很明显，对任意 z 有 $C^{\pm}(z)\geqslant 0$。设 $h_{j+1/2}$ 按式（5-2-6）所定义，并考虑到式（5-2-7）则有

$$h_{j\pm\frac{1}{2}}=f_j-C^{\mp}\left(a_{j\pm\frac{1}{2}}\right)\Delta_{j\pm\frac{1}{2}}u$$

将其代入式（5-2-13）得

$$u_j^{n+1}-\lambda C^-\left(a_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}\right)\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^{n+1}+\lambda C^+\left(a_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}\right)\Delta_{j-\frac{1}{2}}u^{n+1}$$
$$=u_j^n \tag{5-2-21}$$

现来证明，如果 $C^{\pm}(z)\geqslant 0$，则格式（5-2-13）为无条件稳定的TVD格式。将式（5-2-21）取在 $j+1$ 点上并减去在 j 点上的式（5-2-21）经整理后得

$$\left[1+\lambda C_{j+\frac{1}{2}}^{-}+\lambda C_{j+\frac{1}{2}}^{+}\right]\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^{n+1}$$

$$=\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n+\lambda C_{j-\frac{1}{2}}^{+}\Delta_{j-\frac{1}{2}}u^{n+1}+\lambda C_{j+\frac{3}{2}}^{-}\Delta_{j+\frac{3}{2}}u^{n+1}$$

这里 $C_{j+\frac{1}{2}}^{\pm}=C^{\pm}\left(a_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}\right)$。对该式取绝对值，并利用 $C^{\pm}(z)\geqslant 0$ 这一条件可得

$$\left[1+\lambda C_{j+\frac{1}{2}}^{-}+\lambda C_{j+\frac{1}{2}}^{+}\right]\left|\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^{n+1}\right|$$
$$\leqslant\left|\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n\right|+\lambda C_{j-\frac{1}{2}}^{+}\left|\Delta_{j-\frac{1}{2}}u^{n+1}\right|+\lambda C_{j+\frac{3}{2}}^{-}$$
$$\times\left|\Delta_{j+\frac{3}{2}}u^{n+1}\right|$$

将其重新改写可得

$$\left|\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^{n+1}\right| \leqslant \left|\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^{n}\right| + \lambda\left[C^{-}_{j+\frac{3}{2}}\left|\Delta_{j+\frac{3}{2}}u^{n+1}\right| - C^{-}_{j+\frac{1}{2}}\left|\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^{n+1}\right|\right] - \lambda\left[C^{+}_{j+\frac{1}{2}} \times \left|\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^{n+1}\right| - C^{+}_{j-\frac{1}{2}}\left|\Delta_{j-\frac{1}{2}}u^{n+1}\right|\right]$$

即

$$\left|\Delta_{j-\frac{1}{2}}u^{n+1}\right| \leqslant \left|\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^{n}\right| + \lambda(\Xi_{j+1} - \Xi_{j}) \tag{5-2-22}$$

其中

$$\Xi_{j} = C^{-}_{j+\frac{1}{2}}\left|\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^{n+1}\right| - C^{+}_{j-\frac{1}{2}}\left|\Delta_{j-\frac{1}{2}}u^{n}\right|$$

对式（5-2-22）进行求和则可知格式是TVD的。

四、半离散形式的TVD格式[21]

设守恒律（5-2-3）只在空间进行离散化，并离散化后的方程可写为形式

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{C^{+}_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}\Delta_{j+\frac{1}{2}}u - \frac{C^{-}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}\Delta_{j-\frac{1}{2}}u \tag{5-2-23}$$

如果 $C^{\pm}_{j\pm\frac{1}{2}} \geqslant 0$，则方程（5-2-23）的解具有TVD特性。

现来证明这一结论。可将总变差改写为形式

$$TV(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} S_{j+\frac{1}{2}}(u_{j+1} - u_j) \tag{5-2-24}$$

这里

$$S_{j+\frac{1}{2}}=\begin{cases}1 & 如果 \Delta_{j+\frac{1}{2}}u\geqslant 0\\ -1 & 如果 \Delta_{j-\frac{1}{2}}u<0\end{cases}$$

因此

$$\frac{d}{dt}TV(u)=\sum_{-\infty}^{\infty}S_{j+\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}(u_{j+1}-u_j)$$

$$=\frac{1}{\Delta x}\sum_{-\infty}^{\infty}S_{j+\frac{1}{2}}\left\{C^{+}_{j+\frac{3}{2}}\Delta_{j+\frac{3}{2}}u\right.$$

$$-\left(C^{+}_{j+\frac{1}{2}}+C^{-}_{j+\frac{1}{2}}\right)\Delta_{j+\frac{1}{2}}u$$

$$\left.+C^{-}_{j-\frac{1}{2}}\Delta_{j-\frac{1}{2}}u\right\}$$

$$=-\frac{1}{\Delta x}\sum_{-\infty}^{\infty}V_{j+\frac{1}{2}}\Delta_{j+\frac{1}{2}}u$$

这里

$$V_{j+\frac{1}{2}}=\left(C^{+}_{j+\frac{1}{2}}+C^{-}_{j+\frac{1}{2}}\right)S_{j+\frac{1}{2}}$$

$$-C^{+}_{j+\frac{1}{2}}S_{j-\frac{1}{2}}-C^{-}_{j+\frac{1}{2}}S_{j+\frac{3}{2}}$$

如果 $C^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}\geqslant 0$，则 $V_{j+\frac{1}{2}}$ 或者为零，或者与 $\Delta_{j+\frac{1}{2}}u$ 有着同样的符号，因而

$$\frac{d}{dt}TV(u)\leqslant 0$$

这表明总变差是不增长的。

第三节　高阶TVD格式的构造

这里将主要介绍两种构造方法：一种是通过一阶精度的 TVD 格式（迎风格式）来构造具有二阶精度的 TVD 格式的方法，即所谓流通量修正法；另一种是通过对称型L-W格式来构造具有二阶精度的 TVD 格式。按这两种方法人们构造了不同的高精度 TVD 格式，详细情况读者可参阅文献[10]。

构造高精度的 TVD 格式（指高于一阶精度）主要是通过一种限量因子（Limiter）来限制函数 u_j 或流通量 f_j 的梯度变化。对常系数情况两种限量因子是等价的。人们通过限量因子来修改迎风格式或中心格式，以得到二阶精度的 TVD 格式。利用这种方法所得到的 TVD 格式相应的称为迎风或对称 TVD 格式。这里所说迎风或对称 TVD 格式是针对原格式而言。

一、利用迎风格式构造高精度 TVD 格式

利用迎风格式构造的高精度 TVD 格式也称高阶迎风TVD格式。针对守恒律方程（5-2-3）曾指出，它的解具有 TVD 特性。这种特性并不依赖于流通量 f 的具体形式。同样一阶精度的 TVD 格式也不依赖于数值流通量的具体形式，可通过对流通量进行修正的办法来提高格式的精度。流通量修正法参照了反扩散方法[22]。由于一阶迎风格式有着较大的差分耗散项（差分粘性的量级为$\approx \Delta x$），希望通过对流通量进行修正，使这一过大的耗散项被反掉。设方程（5-2-3）中的 f 为原流通量，再设 g 为其修正量，修正后的流通量为 $\hat{f}=f+g$。无疑可构造针对 $\hat{f}$ 逼近于方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \hat{f}}{\partial x}=0 \qquad (5\text{-}3\text{-}1)$$

的具有一阶精度的 TVD 格式。由此将首先保证格式解的TVD特性。所引入的修正量 g 与原流通量相比应该是一小量，因而逼近

于方程（5-3-1）的格式也是方程（5-2-3）的逼近式。现要求由于 g 的引入能反掉逼近于式（5-2-3）的差分格式中扩散项的主导项，从而达到提高逼近于方程（5-2-3）的格式的精度。按这种方法构造的格式既提高了逼近精度，又保证了 TVD 特性，问题在于如何来构造修正量 g。在文献[15, 17]中给出了一个具体的构造方法，现介绍如下。经修正了的对应于式（5-3-1）的格式为

$$u_j^{n+1}+\lambda\theta\left(\tilde{h}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}-\tilde{h}_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}\right)$$

$$=u_j^n-\lambda(1-\theta)\left(\tilde{h}_{j+\frac{1}{2}}^{n}-\tilde{h}_{j-\frac{1}{2}}^{n}\right) \tag{5-3-2}$$

其中

$$\tilde{h}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\tilde{f}_j+\tilde{f}_{j+1}-\psi\left(\tilde{a}_{j+\frac{1}{2}}\right)\Delta_{j+\frac{1}{2}}u\right] \tag{5-3-3 a}$$

$$\tilde{f}_j=f_j+g_j$$

$$g_j=\text{minmod}\left(\sigma_{j+\frac{1}{2}}\Delta_{j+\frac{1}{2}}u,\ \sigma_{j-\frac{1}{2}}\Delta_{j-\frac{1}{2}}u\right) \tag{5-3-3 b}$$

$$\tilde{a}_{j+\frac{1}{2}}=a_{j+\frac{1}{2}}+\gamma_{j+\frac{1}{2}} \tag{5-3-3 c}$$

$$\gamma_{j+\frac{1}{2}}=\begin{cases}\dfrac{g_{j+1}-g_j}{\Delta_{j+\frac{1}{2}}u} & \Delta_{j+\frac{1}{2}}u\neq 0\\ 0 & \Delta_{j+\frac{1}{2}}u=0\end{cases} \tag{5-3-3 d}$$

$$\sigma(z)=\frac{1}{2}\psi(z)+\lambda\left(\theta-\frac{1}{2}\right)z^2 \tag{5-3-4}$$

这里引入了 minmod 函数，它的定义为

$$\text{minmod}(x,y)=\text{sgn}(x)\cdot\max\{0,\ \min[|x|,\ y\ \text{sgn}(x)]\} \tag{5-3-5}$$

这一函数表明，如果自变量 x 和 y 是同号，则取绝对值最小量的值；如果它们是异号，则取其为零。

现在来讨论一下这样所构造的格式是怎样既保持了 TVD 特性又提高了精度的。

首先根据 $\psi(z)$，$a_{j+\frac{1}{2}}$ 及 $\gamma_{j+\frac{1}{2}}$ 的定义可将格式写成形式(5-2-18)，如果系数满足充分条件（5-2-19)则格式是TVD 的。关于函数 $\sigma(z)$ 的表达式(5-3-4)可参照格式（5-2-13）的修正方程而得，它即为对应的修正方程中的扩散系数

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma(a)\frac{\partial u}{\partial x}\right] \qquad (5-3-6)$$

为使格式（5-2-13）为 TVD 的充分条件（5-2-19)，相当于通常的库朗（Courant）数（CFL）的限制。如果充分条件得到满足，则由式（5-3-4）所定义的 $\sigma\geqslant 0$。为求解定常问题可取

$$\sigma(z)=\frac{1}{2}\psi(z)\geqslant 0 \qquad (5-3-7)$$

现在再来讨论逼近精度问题。根据函数 g_j 的构造可知

$$g_j=g(u_{j-1},\ u_j,\ u_{j+1}),\quad g(u,\ u,\ u)=0$$

$$\left|\gamma_{j+\frac{1}{2}}\right|=\frac{|g_{j+1}-g_j|}{|u_{j+1}-u_j|}\leqslant\sigma\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)$$

$$g=\Delta x\sigma(a)\frac{\partial u}{\partial x}+O(\Delta x^2)$$

前面已指出，不进行流通量修正时修正方程之主导项为式（5-3-6)，在利用 g_j 进行修正后，恰好将修正方程中的扩散项反掉了，从而提高了精度。在定义函数 g_j 时利用了 min mod 的概念，即取二个自变量中最小的那个量。这表示不要过量的将扩散量反掉。

根据式（5-3-3）可知

$$\tilde{h}_{j+\frac{1}{2}}=\tilde{h}(u_{j-1},\ u_j,\ u_{j+1},\ u_{j+2})$$

$$\tilde{h}(v,\ u,\ u,\ w)=f(u)$$

这表明在格式中虽然与五个网点相连系，但实质上可看成是三点

格式，在临边界点上不会带来困难。

现来讨论在极值点附近 TVD 格式解的情况。设

$$u_{j-1} \leqslant u_j = u_{j+1} \geqslant u_{j+2}$$

此时 $g_j = g_{j+1} = 0$，即相当于未对数值流通量进行修正，因而此时之差分格式只有一阶逼近精度。在极值点只有一阶逼近精度是 TVD 格式的一个共同特点。从而也可以看出，TVD 格式是非线性的，它在一般区域内具有二阶逼近精度，而在极值点只有一阶逼近精度。

实践表明，直接按上面介绍的方法将给出过大的扩散效应。哈顿给出了对 g_j 的修正方法。在计算中以修正了的 $\tilde{g}$ 代替 g，而 $\tilde{g}$ 定义为

$$\tilde{g}_j = (1 + \omega\theta_j) g_j, \quad \omega > 0$$

$$\theta_j = \frac{\left| \Delta_{j+\frac{1}{2}} u - \Delta_{j-\frac{1}{2}} u \right|}{\left| \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \right| + \left| \Delta_{j-\frac{1}{2}} u \right|} \tag{5-3-8}$$

叶（Yee）在文献[10]中对函数 g_j 的定义做了适当的修正，从而减小了耗散效应和提高了解的分辨率。

上面介绍了由哈顿提出的用流通量修正法构造的高精度 TVD 格式。近年来发展了很多高精度的迎风 TVD 格式，例如，利用 MUSCL（Monotony Upstream Scheme for Conservation Law）[10]格式构造的 TVD 格式、罗-斯韦伯（Roe-Sweby）二阶精度的 TVD 格式、粤雪尔-查克拉瓦特（Osher-Chakravarthy）TVD 格式等。

二、利用中心型差分格式构造显式二阶TVD格式

利用原中心型差分格式构造的具有二阶精度的 TVD 格式通常被称为对称 TVD 格式。在介绍流通量修正法时曾提到，对流通量的修正相当于一种反扩散的方法。这一思想最早由鲍利斯和布克（Boris 和 Book，1973）提出，在文献[23]中曾用反扩散方

法计算了三维粘性绕流问题。

这一部分将介绍在文献〔24〕中利用L-W格式构造二阶精度TVD格式的方法。

设有标量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad c=\text{常数}>0 \tag{5-3-9}$$

对应的L-W格式可改写为

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\gamma\delta_x^- u_j^n-\delta_x^-\left\{\frac{1}{2}(1-\gamma)\gamma\delta_x^+ u_j^n\right\} \tag{5-3-10}$$

$$\gamma=c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

很明显，该式由两部分组成，其一为通常的一阶迎风格式，另一为反扩散修正项。众所周知，L-W格式不是TVD格式，可通过限制反扩散量的方法来克服这一缺点。现考虑式（5-3-10）的变形方程

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\gamma\delta_x^- u_j^n-\delta_x^-\left\{\varphi_j\cdot\frac{1}{2}(1-\gamma)\gamma\delta_x^+ u_j^n\right\} \tag{5-3-11}$$

这里φ_j是一非负的函数，被称为限量因子（Limiter)。引入限量因子的目的是用来控制反扩散量，或通过限量函数来限制修正流通量（反扩散流通量）的变化，使格式满足TVD性质。在文献〔24〕中取φ_j为r_j的函数，对线性情况r_j定义为

$$r_j=\frac{\delta_x^- u_j}{\delta_x^+ u_j}$$

现在来讨论如何选取限量因子φ_j，以使式（5-3-11）为TVD，且能保证格式具有二阶逼近精度。将式（5-3-11)改写为如下形式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-C^+_{j-\frac{1}{2}}\delta_x^- u_j^n+C^-_{j+\frac{1}{2}}\delta_x^+ u_j^n \tag{5-3-12}$$

$$C^-_{j+\frac{1}{2}}\equiv 0$$

$$C^{+}_{j-\frac{1}{2}}=\nu+\frac{1}{2}(1-\nu)\nu\frac{\delta_x^-\{\varphi_j(r_j)\delta_x^-u_j^n\}}{\delta_x^-u_j^n} \quad (5\text{-}3\text{-}13)$$

将式（5-3-13）加以整理，则可得到

$$C^{+}_{j-\frac{1}{2}}=\nu\left\{1+\frac{1}{2}(1-\nu)\left[\frac{\varphi(r_j)}{r_j}-\varphi(r_{j-1})\right]\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}14)$$

如果对方括号〔 〕中的量加以限制

$$\left|\frac{\varphi(r_j)}{r_j}-\varphi(r_{j-1})\right|\leqslant\phi \quad (5\text{-}3\text{-}15)$$

则有不等式

$$\nu\left\{1-\frac{1}{2}(1-\nu)\phi\right\}\leqslant C^{+}_{j-\frac{1}{2}}\leqslant\nu\left\{1+\frac{1}{2}(1-\nu)\phi\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}16)$$

对照格式为TVD的充分条件（5-2-19）可知，如果

$$0\leqslant C^{+}_{j-\frac{1}{2}}\leqslant 1$$

则格式（5-3-12）为TVD。为此由式（5-3-16）可知，ϕ 必须满足不等式 $\phi\leqslant 2$。为使限量因子为非负，定义

$$\varphi(r)=0, \quad 当\ r\leqslant 0\ 时$$

如此参照式（5-3-15）可得到对函数 φ 的限制

$$0\leqslant\left(\frac{\varphi(r)}{r},\ \varphi(r)\right)\leqslant 2 \quad (5\text{-}3\text{-}17)$$

由此可知，如果限量因子 $\varphi(r)$ 位于图 5-6 中的阴影部分，则格式（5-3-12）为TVD。

在图中还给出了对应于L-W格式 $\varphi_j\equiv 1$ 的曲线，以及对应于沃明-比姆（Warming-Baam）迎风格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\nu\delta_x^-u_j^n-\delta_x^-\left\{\frac{1}{2}(1-\nu)\nu\delta_x^-u_j^n\right\} \quad (5\text{-}3\text{-}18)$$

的 $\varphi_j\equiv\nu$ 的曲线。

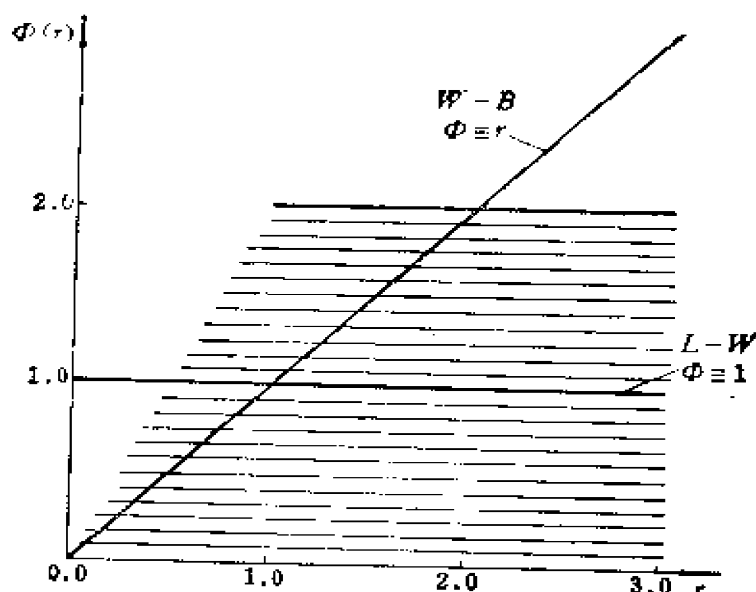


图5-6　TVD区

限量因子 $\varphi(r)$ 的上界为

$$\varphi(r)=\min(2r,\ 2),\quad r\geqslant 0 \tag{5-3-19}$$

上面讨论了为使格式为 TVD 而对限量函数施加的限制，还应对 $\varphi(r)$ 做进一步的限制，以使格式尽可能具有二阶逼近精度。由于 $r\leqslant 0$ 时 $\varphi(r)=0$ 使得在解的极值点失掉了二阶精度。

从图 5-6 中可以看到，上面提到的二个格式，即L-W格式和沃明-比姆迎风格式，都通过 $\varphi(1)=1$ 点，这是对具有二阶精度格式的要求。还应注意到，任意利用网点（u_{j-2}，u_{j-1}，u_j，u_{j+1}）构造的具有二阶精度的差分格式应当是 L-W 格式和沃明-比姆迎风格式的加权平均，其限量函数可表示为

$$\varphi(r)=[1-\theta(r)]\varphi^{L-W}(r)+\theta(r)\varphi^{W-B}(r) \tag{5-3-20}$$

$$0\leqslant\theta\leqslant 1$$

由于 $\varphi^{L-W}=1$，$\varphi^{W-B}=r$，因而

$$\varphi(r)=1+\theta(r)(r-1) \tag{5-3-21}$$

φ^{L-W} 为L-W格式的限量函数；φ^{W-B} 为沃明-比姆格式的限量函数。这里选用了内插，数值实验表明外插给出不理想的结果。这样由 TVD 格式对应的限量因子 $\varphi(r)$ 变化范围（图 5-6）分离

出具有二阶精度的 TVD 格式对应的限量因子 $\varphi(r)$ 之变化范围（图5-7）。

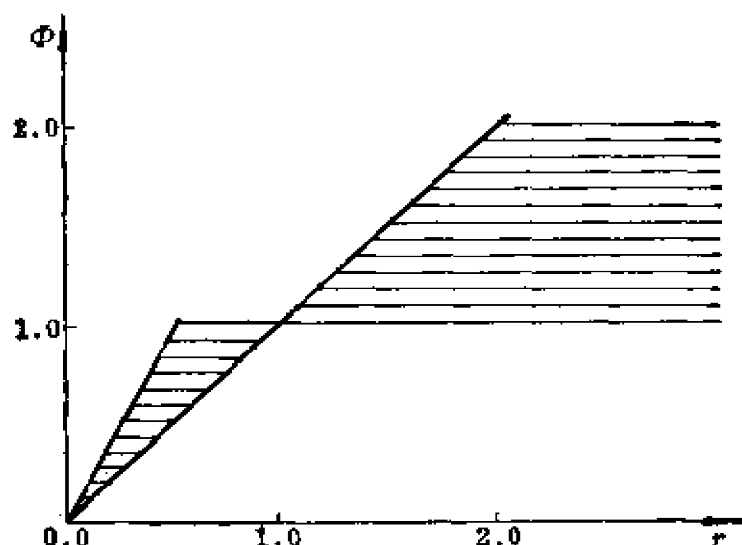


图5-7　二阶精度TVD区

下面给出几个限量因子 $\varphi(r)$ 的具体表达形式。

1. ϕ 限量因子（Roe-Sweby）

$$\varphi_\phi(r)=\max\{0,\ \min(\phi r,1),\ \min(r,\ \phi)\} \qquad (5\text{-}3\text{-}22)$$

$$1\leqslant\phi\leqslant 2$$

当取 $\phi=2$ 时即为罗[25]提出的巨蜂函数（Superbee），它是图5-7 中的上界，当取 $\phi=1$ 时为罗提出的 min mod 转换函数[19]，对一般情况中的变化给在图 5-8 中。

2. 范利尔（Van Leer）限量因子[26]

$$\varphi_{VL}(r)=\frac{|r|+r}{|r|+1} \qquad (5\text{-}3\text{-}23)$$

该函数为一曲线，其变化情况给在图 5-9 中。

3. 查克拉瓦特-粤雪尔（Chakravarthy-Osher）限量因子[27]

$$\varphi_{co}(r)=\max\{0,\ \min(2r,\ 1),\ \min(r,2)\} \qquad (5\text{-}3\text{-}24)$$

其变化曲线给在图 5-10 中。

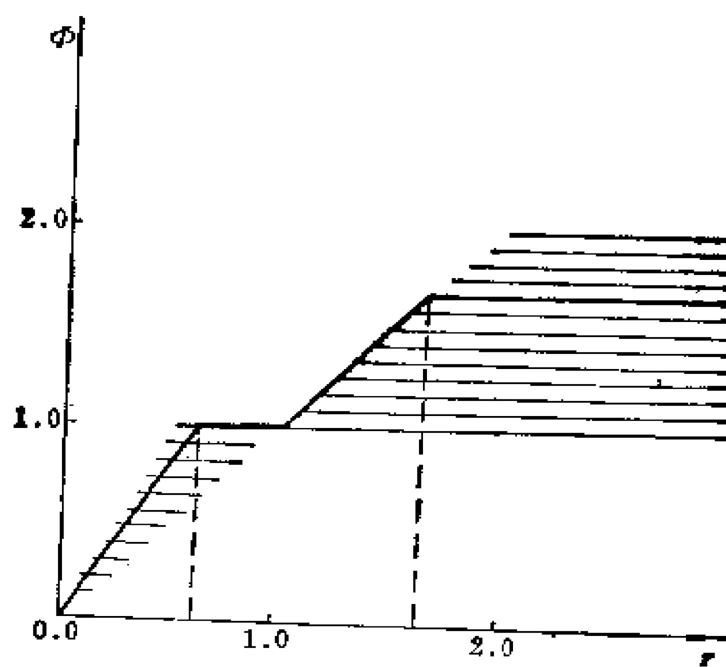


图5-8　φ限量因子

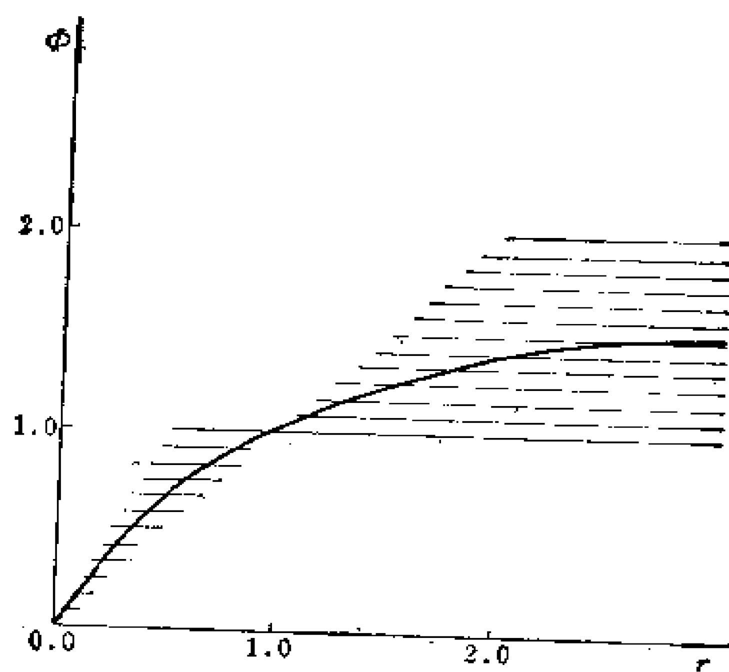


图5-9　范利尔限量因子

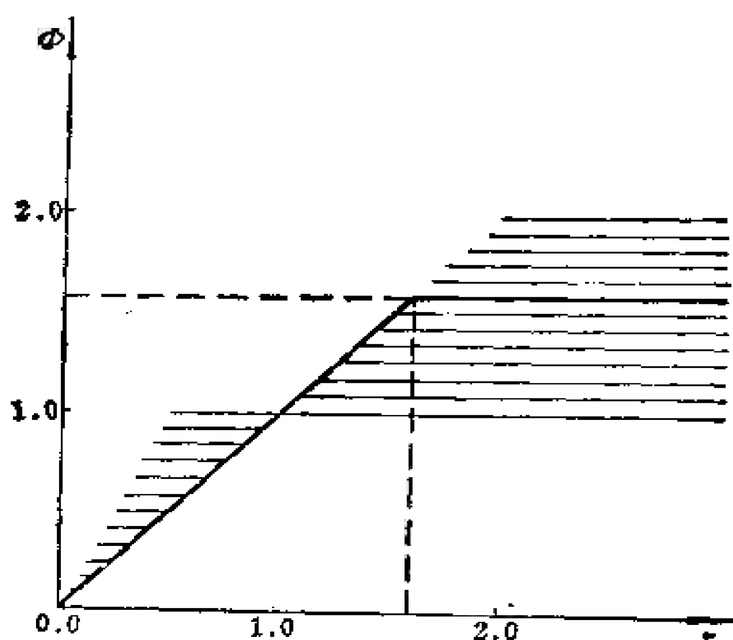


图5-10　查克拉瓦特-粤雪尔限量因子

三、对称隐式二阶TVD格式

（一）常系数情况

1984 年戴维斯（Davis）[28] 将前面介绍的罗-斯韦伯（Roe-Sweby）二阶精度的 TVD 格式改写成两项和的形式，其一为 L-W格式，另一为附加的守恒型耗散项。此后他又将这一格式进行了简化，简化后的格式仍为 TVD 格式。后来罗又将这一方法进行了推广[29]，之后叶又将罗—戴维斯格式推广为具有单参数的具有二阶精度的隐式 TVD 格式[30,31]。

现将方程（5-3-11）改写为如下形式：

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{1}{2}\nu(1+\nu)\delta_x^- u_j^n-\frac{1}{2}\nu(1-\nu)\delta_x^+ u_j^n$$

$$-\frac{1}{2}|\nu|(1-|\nu|)\left(1-Q_{j-\frac{1}{2}}\right)\delta_x^- u_j^n$$

$$+\frac{1}{2}|\nu|(1-|\nu|)\left(1-Q_{j+\frac{1}{2}}\right)\delta_x^+ u_j^n \qquad (5\text{-}3\text{-}25)$$

其中右端项的前一部分即为通常的L-W格式，这里不再要求式(5-3-9)中的系数 c 为正。式(5-3-25)中的限量因子以 $Q_{j+\frac{1}{2}}$ 来表示，它的定义为

$$Q_{j+\frac{1}{2}}=Q\left(r^{-}_{j+\frac{1}{2}},\ r^{+}_{j+\frac{1}{2}}\right) \tag{5-3-26 a}$$

$$r^{-}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\delta^{-}_{x}u_{j}}{\delta^{+}_{x}u_{j}},\quad r^{+}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\delta^{+}_{x}u_{j+1}}{\delta^{+}_{x}u_{j}} \tag{5-3-26 b}$$

下面给出几个限量因子的具体表达形式

$$Q(r^{-},\ r^{+})=\min\mathrm{mod}(1,\ r^{-})+\min\mathrm{mod}(1,\ r^{+})-1 \tag{5-3-27 a}$$

$$Q(r^{-},\ r^{+})=\min\mathrm{mod}(1,\ r^{-},\ r^{+}) \tag{5-3-27 b}$$

$$Q(r^{-},\ r^{+})=\min\mathrm{mod}\left(2,\ 2r^{-},\ 2r^{+},\ \frac{1}{2}(r^{-}+r^{+})\right) \tag{5-3-27 c}$$

$$Q(r^{-},\ r^{+})=\max\{0,\ \min(2r^{-},\ 1),\ \min(r^{-},\ 2)\}+\max\{0,\ \min(2r^{+},\ 1),\ \min(r^{+},\ 2)\} \tag{5-3-27 d}$$

$$Q(r^{-},\ r^{+})=\frac{r^{-}+|r^{-}|}{1+r^{-}}+\frac{r^{+}+|r^{+}|}{1+r^{+}}-1 \tag{5-3-27 e}$$

(5-3-27 d) 为罗的巨蜂（Super bee）限量因子，(5-3-27 e)为范利尔的限量因子。式中含有几个自变量的min mod表示，当各参数有不同符号时取零值，当各参量有着相同的符号时取绝对值的最小值。

针对式（5-3-25）数值流通量可以写为

$$h^{L-W}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left\{c(u_{j}+u_{j+1})-\left[\lambda c^{2}Q_{j+\frac{1}{2}}+|c|\times\left(1-Q_{j+\frac{1}{2}}\right)\right]\delta^{+}_{x}u^{n}_{j}\right\} \tag{5-3-28}$$

可利用这个数值流通量和式（5-3-2）来构造隐式格式。此时之

格式只能用来求解非定常问题。对求解定常问题，就象对显式格式那样需对时间步长进行限制($\Delta t\sim\Delta x$)，否则由于在式(5-3-28)中含有λ项而使得定常解依赖于步长比。为利用隐式格式求解定常问题的一个补救办法是消去含$\lambda c^2 Q_{j+1/2}$项，即取数值流通量为

$$h^{L-W}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left\{c\left(u_j+u_{j+1}\right)-|c|\left(1-Q_{j+\frac{1}{2}}\right)\delta_x^+ u_j\right\}\tag{5-3-29}$$

现在来讨论为使格式(5-3-2)和(5-3-29)为TVD的充分条件。此时之格式可以改写为

$$u_j^{n+1}-\lambda\theta\left(\widetilde{C}^-_{j+\frac{1}{2}}\delta_x^+ u_j-\widetilde{C}^+_{j+\frac{1}{2}}\delta_x^- u_j\right)^{n+1}$$

$$=u_j^n-\lambda\left(1-\theta\right)\left(\widetilde{C}^-_{j+\frac{1}{2}}\delta_x^+ u_j-\widetilde{C}^+_{j+\frac{1}{2}}\delta_x^- u_j\right)^n\tag{5-3-30a}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{C}^+_{j-\frac{1}{2}}=c\left[1-\frac{1}{2}Q_{j-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\frac{Q_{j+\frac{1}{2}}}{r^-_{j+\frac{1}{2}}}\right]\\&\widetilde{C}^-_{j+\frac{1}{2}}=0\end{aligned}\right\}\quad c>0\tag{5-3-30b}$$

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{C}^-_{j+\frac{1}{2}}=|c|\left[1-\frac{1}{2}Q_{j+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}}{r^+_{j-\frac{1}{2}}}\right]\\&C^-_{j-\frac{1}{2}}=0\end{aligned}\right\}\quad c<0\tag{5-3-30c}$$

此时对应于式(5-2-19)的充分条件为

$$0 < \lambda(1-\theta)c\left[1-\frac{1}{2}Q_{j-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\frac{Q_{j+\frac{1}{2}}}{r^{-}_{j+\frac{1}{2}}}\right]$$

$$< 1,\quad c > 0 \tag{5-3-31a}$$

$$0 < \lambda(1-\theta)|c|\left[1-\frac{1}{2}Q_{j+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}}{r^{+}_{j-\frac{1}{2}}}\right]$$

$$< 1,\quad c > 0 \tag{5-3-31b}$$

$$-\infty < -\lambda\theta\widetilde{C}^{\pm}_{j+\frac{1}{2}} \leqslant 0 \tag{5-3-31c}$$

不难验证，对 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ 和 $r \neq 0$，如果 $c > 0$ 时取

$$Q_{j-\frac{1}{2}} - \frac{Q_{j+\frac{1}{2}}}{r^{-}_{j+\frac{1}{2}}} < 2$$

$$\frac{Q_{j+\frac{1}{2}}}{r^{-}_{j+\frac{1}{2}}} - Q_{j-\frac{1}{2}} < \frac{2}{\lambda(1-\theta)c} - 2 \tag{5-3-32a}$$

$$\lambda c < \frac{1}{1-\theta}$$

当 $c < 0$ 时取

$$Q_{j+\frac{1}{2}} - \frac{Q_{j-\frac{1}{2}}}{r^{+}_{j-\frac{1}{2}}} < 2$$

$$\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}}{r^{+}_{j-\frac{1}{2}}} - Q_{j+\frac{1}{2}} < \frac{2}{\lambda(1-\theta)|c|} - 2 \tag{5-3-32b}$$

$$\lambda|c| < \frac{1}{1-\theta}$$

则式（5-3-31）充分条件将得到满足。由于

$$\lambda|c| < \frac{1}{1-\theta}$$

则

$$\frac{2}{\lambda(1-\theta)|c|} - 2 > 0$$

将永远是正确的。现设Q和Q/r总是正的，如果所设计的Q满足条件

$$Q_{j+\frac{1}{2}} < 2$$

$$\frac{Q_{j+\frac{1}{2}}}{r^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}} < \frac{2}{\lambda(1-\theta)|c|} - 2 \qquad (5\text{-}3\text{-}33)$$

$$\lambda|c| < \frac{2}{3(1-\theta)}$$

则所构造的差分格式将是 TVD 的。

前面曾提到的限量因子（5-3-27 b）和（5-3-27 c）将满足不等式（5-3-33）。从式（5-3-27）中可以看到，$Q(1, 1) = 1$。这表明在解的光滑区格式将具有二阶逼近精度。如果取自由参数 $\theta = \frac{1}{2}$，则格式在时间方向和空间方向都具有二阶逼近精度。如果取 $\theta = 0$ 则得显式 TVD 格式，取 $\theta = 1$ 得全隐式TVD格式。除取 $\theta = \frac{1}{2}$ 外格式在时间方向只有一阶逼近精度。

（二）非线性标量守恒方程

现将对称 TVD 格式推广到非线性情况。与方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad (5\text{-}3\text{-}34)$$

对应的数值流通量为

$$h_{j+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\left[(f_j+f_{j+1})-\left|a_{j+\frac{1}{2}}\right|\left(1-Q_{j+\frac{1}{2}}\right)\times\delta_{j+\frac{1}{2}}u\right] \tag{5-3-35}$$

这里$\delta_{j+\frac{1}{2}}u=u_{j+1}-u_j$。在$a_{j+\frac{1}{2}}=0$时格式的耗散特性消失，可取如下之修正形式来消除这一问题

$$h_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[(f_{j+1}+f_j)-\psi\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\left(1-Q_{j+\frac{1}{2}}\right)\times\delta_{j+\frac{1}{2}}u\right] \tag{5-3-36}$$

这里ψ是$a_{j+\frac{1}{2}}$的函数，在式（5-2-12）中已有定义，也可取如下之形式

$$\psi(z)=\begin{cases}|z| & |z|\geqslant\delta_1\\ \delta_1 & |z|\leqslant\delta_1\end{cases} \tag{5-3-37}$$

式（5-3-36）中出现的$a_{j+\frac{1}{2}}$定义为式（5-2-7），限量函数$Q_{j+\frac{1}{2}}$中出现的$r^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}$的定义为

$$r^{-}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\left|a_{j-\frac{1}{2}}\right|\delta_{j-\frac{1}{2}}u}{\left|a_{j+\frac{1}{2}}\right|\delta_{j+\frac{1}{2}}u}$$

$$r^{+}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\left|a_{j+\frac{3}{2}}\right|\delta_{j+\frac{3}{2}}u}{\left|a_{j+\frac{1}{2}}\right|\delta_{j+\frac{1}{2}}u} \tag{5-3-38}$$

对应式（5-3-33）的差分格式是TVD格式的充分条件为

$$Q_{j+\frac{1}{2}} < 2 \tag{5-3-39 a}$$

$$\frac{Q_{j+\frac{1}{2}}}{r^{-}_{j+\frac{1}{2}}} < \frac{2}{\lambda(1-\theta)\left|a_{j-\frac{1}{2}}\right|} - 2 \tag{5-3-39 b}$$

$$\frac{Q_{j+\frac{1}{2}}}{r^{+}_{j+\frac{1}{2}}} < \frac{2}{\lambda(1-\theta)\left|a_{j+\frac{3}{2}}\right|} - 2 \tag{5-3-39 c}$$

$$\lambda\left|a_{j+\frac{1}{2}}\right| < \frac{2}{3(1-\theta)} \tag{5-3-39 d}$$

上面介绍了非线性标量守恒形隐式TVD格式，限制因子$Q(r^{+}, r^{-})$的自变量由式(5-3-38)所定义。变量$r^{\pm}$也可定义为式(5-3-26 b)，如此可简化求解过程。求解二维欧拉方程的实践表明[18]，简化形式的式(5-3-26 b)给出的结果更为好些。

（三）标量隐式格式的线化

无论对线性或非线性标量方程，最后所得之隐式TVD格式都是非线性的。这里针对非线性标量方程介绍隐式TVD格式的一种线化方法。

参照式(5-3-2)，带有数值流通量(5-3-36)的隐式格式可以写为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &+ \frac{\lambda\theta}{2}\left[f_{j+1} - \psi\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\left(1 - Q_{j+\frac{1}{2}}\right)\delta_x^{+}u_j\right]^{n+1} \\ &- \frac{\lambda\theta}{2}\left[f_{j-1} - \psi\left(a_{j-\frac{1}{2}}\right)\left(1 - Q_{j-\frac{1}{2}}\right)\delta_x^{-}u_j\right]^{n+1} \\ &= \text{RHS} \end{aligned} \tag{5-3-40}$$

这里RHS为在n时间层上的已知量。

现介绍两种线性化的方法，一种是非守恒形式的，另一种是守恒形式的。

首先介绍非守恒形式的式（5-3-40）的线化形式。将该式左方两个括号内都减以 f_j，并考虑到式（5-2-7）则可得

$$u_j^{n+1}+\frac{\lambda\theta}{2}\left[a_{j+\frac{1}{2}}-\psi\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\left(1-Q_{j+\frac{1}{2}}\right)\right]^{n+1}\delta_x^+u_j^{n+1}$$

$$-\frac{\lambda\theta}{2}\left[-a_{j-\frac{1}{2}}-\psi\left(a_{j-\frac{1}{2}}\right)\left(1-Q_{j-\frac{1}{2}}\right)\right]^{n+1}\delta_x^-u_j^{n+1}$$

$$=\text{RHS} \tag{5-3-41}$$

如果将左方之括号内的量皆取在 n 时间层上，则可得到非守恒形式的线性代数方程组。所得之代数方程组可用第七章中介绍之追赶法进行求解。可用这种方法求解定常问题。在求解定常问题时可取式（5-3-41)中之 $Q_{j\pm\frac{1}{2}}=0$。

如果利用关系式

$$f_j^{n+1}-f_j^n=a_j^n\delta_t u_j^{n+1}+O(\Delta t^2)$$

这里 $a=f_u$。将 $\delta_x^\pm u^{n+1}$ 之系数取在 n 时间层上则可得守恒形式的线化方程

$$u_j^{n+1}+\frac{\lambda\theta}{2}\left[a_{j+1}^n u_{j+1}^{n+1}-\psi\left(a_{j+\frac{1}{2}}^n\right)\left(1-Q_{j+\frac{1}{2}}^n\right)\delta_x^+u^{n+1}\right.$$

$$\left.-a_{j-1}^n u_{j-1}^{n+1}+\psi\left(a_{j-\frac{1}{2}}^n\right)\left(1-Q_{j-\frac{1}{2}}^n\right)\delta_x^-u^{n+1}\right]=\text{RHS} \tag{5-3-42}$$

或写成形式

$$e_1\delta_t u_{j+1}+e_2\delta_t u_j+e_3\delta_t u_{j-1}=-\lambda\left(h_{j+\frac{1}{2}}^n-h_{j-\frac{1}{2}}^n\right)$$

$$e_1=\frac{\lambda\theta}{2}\left[a_{j+1}-\psi\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\left(1-Q_{j+\frac{1}{2}}\right)\right]^n$$

$$e_3=\frac{\lambda\theta}{2}\left[-a_{j-\frac{1}{2}}-\psi\left(a_{j-\frac{1}{2}}\right)\left(1-Q_{j-\frac{1}{2}}\right)\right]^n$$

$$e_2 = 1 + \frac{\lambda\theta}{2}\left[\psi\left(a_{j-\frac{1}{2}}\right)\left(1 - Q_{j-\frac{1}{2}}\right) + \psi\left(a_{j+\frac{1}{2}}\right)\left(1 - Q_{j+\frac{1}{2}}\right)\right]^*$$

式（5-3-42）用于求解定常问题时可取式左端中之$Q_{j\pm\frac{1}{2}}=0$。事实上式（5-3-42）并未被证明是TVD，但实践表明它可以给出具有高分辨率的激波解。

四、含有源项的预测-校正TVD格式

到目前为止所讨论的方程皆为齐次方程。现在来讨论非线性非齐次的守恒律方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = S(u) \tag{5-3-43}$$

前面讨论之TVD特性只是针对齐次守恒律方程的。当有源项后微分方程的解则不一定有这种特性，但人们还是希望方程之齐次部分具有TVD特性。

为求解定常问题，和避免中间之边界条件处理和节省内存，将具有二阶精度的TVD格式推广来求解带源项的最简单办法是先将源项考虑进去按通常之两步法进行求解。这里包含了预测(Predictor)步和校正步(Corrector)。最后一步为将由预测-校正步所得之量进行守恒型的数值耗散修正。下面给出具体的步骤。

$$u_j^{(1)} = u_j^n - \lambda\delta_x^- f_j^n + \Delta t S_j^n \tag{5-3-44 a}$$

$$u_j^{(2)} = \frac{1}{2}\left[u_j^{(1)} + u_j^n - \lambda\delta_x^+ f_j^{(1)} + \Delta t S_j^{(1)}\right] \tag{5-3-44 b}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^{(2)} + \left[\phi_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} - \phi_{j-\frac{1}{2}}^{(2)}\right] \tag{5-3-44 c}$$

其中

$$\phi_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\psi\left(\nu_{j+\frac{1}{2}}\right)-\nu^2_{j+\frac{1}{2}}\right]$$

$$\times\left(\Delta_{j+\frac{1}{2}}-\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}\right)$$

$$\nu=\lambda a,\quad \lambda=\frac{\Delta t}{\Delta x},$$

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}}=u_{j+1}-u_j$$

函数ψ的定义为式（5-2-12），而$\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}$为

$$\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}=\text{minmod}\left(\Delta_{j+\frac{1}{2}},\ \Delta_{j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$+\text{minmod}\left(\Delta_{j+\frac{1}{2}},\ \Delta_{j+\frac{3}{2}}\right)-\Delta_{j+\frac{1}{2}}$$

$$\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}=\text{minmod}\left(\Delta_{j-\frac{1}{2}},\ \Delta_{j+\frac{1}{2}},\ \Delta_{j+\frac{3}{2}}\right)$$

$$\hat{Q}_{j+\frac{1}{2}}=\text{minmod}\left[2\Delta_{j-\frac{1}{2}},\ 2\Delta_{j+\frac{1}{2}},\ 2\Delta_{j+\frac{3}{2}},\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left(\Delta_{j-\frac{1}{2}}+\Delta_{j+\frac{1}{2}}\right)\right]$$

当取$S=0$，并方程为常系数情况，且$\phi_{j+\frac{1}{2}}$是取在u^n点上而不是$u^{(1)}$点上，则这一方法是TVD的。对非线性情况难以证明这一结论，但对一维和多维数值实验表明，数值解确有类似的TVD特性。

上面介绍的这一方法有时称TVD麦科马克格式。

第四节　TVD格式在气动计算中的应用

现在讨论更为一般的情况。有守恒双曲型方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial f(U)}{\partial x}=0 \tag{5-4-1}$$

$\boldsymbol{A}$为雅可比矩阵

$$\boldsymbol{A}=\frac{D(\vec{f})}{D(\vec{U})}$$

这里 $\vec{U}$ 和 $\vec{f}$ 为由 m 个分量组成的列向量。矩阵$\boldsymbol{A}$有实特征根 $\lambda^k(\vec{U})$ 和完备的特征向量。矩阵$\boldsymbol{A}$可通过对角矩阵来表示

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{S}$$

式中　$\boldsymbol{\Lambda}$——由特征值 $\lambda^k(\vec{U})$ 组成的对角矩阵；

$\boldsymbol{S}^{-1}$——由矩阵$\boldsymbol{A}$之右特征列向量 $\vec{R}^k$ 组成之矩阵；

$\boldsymbol{S}$——由$\boldsymbol{A}$之左特征行向量组成之矩阵。

$$\boldsymbol{S}^{-1}=\{\vec{R}^1(\vec{U}),\ \cdots,\ \vec{R}^m(\vec{U})\}$$

$$\boldsymbol{S}=\{\vec{L}^1(\vec{U}),\ \cdots,\ \vec{L}^m(\vec{U})\}^T$$

前面讨论差分格式的 TVD 特性时，只是针对标量方程。对一维常系数双曲型方程组也可很容易地构造相应的 TVD 格式，只要将方程组化为特征型就可以了。然而非线性双曲型方程组的解并非一定能保持解的单调性。这里所说的 TVD 格式的推广也只是形式上的推广。现介绍采用冻结系数的方法进行推广，即将矩阵$\boldsymbol{A}$看成是常数矩阵。

假设

$$\vec{W}=\boldsymbol{S}\vec{U}$$

则可得特征型方程

$$\frac{\partial W^k}{\partial t}+\lambda^k\frac{\partial W^k}{\partial x}=0,\quad \lambda^k=\text{常数} \tag{5-4-2}$$

设向量 $\vec{U}_{j+\frac{1}{2}}$ 为 $\vec{U}_j$ 和 $\vec{U}_{j+1}$ 的某种对称平均

$$\vec{U}_{j+\frac{1}{2}}=\vec{\varphi}(\vec{U}_j,\ \vec{U}_{j+1})$$

$\boldsymbol{A}_{j+\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{S}_{j+\frac{1}{2}}$和$\boldsymbol{S}^{-1}_{j+\frac{1}{2}}$分别为对应于矩阵$\boldsymbol{A}\left(\vec{U}_{j+\frac{1}{2}}\right)$的相应量$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{S}$和$\boldsymbol{S}^{-1}$。

定义

$$\vec{\alpha}_{j+\frac{1}{2}}=\vec{W}_{j+1}-\vec{W}_{j},\quad \delta_{j+\frac{1}{2}}\vec{U}=\vec{U}_{j+1}-\vec{U}_{j}$$

$$\delta_{j+\frac{1}{2}}\vec{U}=S^{-1}_{j+\frac{1}{2}}\vec{\alpha}_{j+\frac{1}{2}},\quad \vec{\alpha}_{j+\frac{1}{2}}=S_{j+\frac{1}{2}}\delta_{j+\frac{1}{2}}\vec{U} \tag{5-4-3}$$

可针对标量方程（5-4-2）构造对应于式（5-3-35）的数值流通量，从而可以得到相应的对称型的差分格式，然后将所得到的差分格式反变到守恒变量中去。按这种方法可以得到如下之单参数TVD格式

$$\vec{U}_j^{n+1}+\lambda\theta\left(\vec{H}^{n+1}_{j+\frac{1}{2}}-\vec{H}^{n+1}_{j-\frac{1}{2}}\right)=\vec{U}_j^n-\lambda(1-\theta)\times\left(\vec{H}^{n}_{j+\frac{1}{2}}-\vec{H}^{n}_{j-\frac{1}{2}}\right) \tag{5-4-4}$$

其中

$$\vec{H}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\vec{f}_j+\vec{f}_{j+1}-S^{-1}_{j+\frac{1}{2}}\vec{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}\right) \tag{5-4-5}$$

这里$\vec{\Phi}_{j+\frac{1}{2}}$为一向量，其元素为$\phi^k_{j+\frac{1}{2}}$（$k=1,\cdots,m$），

$$\phi^k_{j+\frac{1}{2}}=\psi\left(\lambda^k_{j+\frac{1}{2}}\right)\left(1-Q^k_{j+\frac{1}{2}}\right)\alpha^k_{j+\frac{1}{2}} \tag{5-4-6}$$

$$Q^k_{j+\frac{1}{2}}=Q\left[(r^-)^k_{j+\frac{1}{2}},\ (r^+)^k_{j+\frac{1}{2}}\right] \tag{5-4-7}$$

$$\left(r^-_{j+\frac{1}{2}}\right)^k=\frac{\left|\lambda^k_{j-\frac{1}{2}}\right|\alpha^k_{j-\frac{1}{2}}}{\left|\lambda^k_{j+\frac{1}{2}}\right|\alpha^k_{j+\frac{1}{2}}} \tag{5-4-8a}$$

$$\left(r^{+}_{j+\frac{1}{2}}\right)^{k}=\frac{\left|\lambda_{j+\frac{3}{2}}\right|\alpha^{k}_{j+\frac{3}{2}}}{\left|\lambda_{j+\frac{1}{2}}\right|\alpha^{k}_{j+\frac{1}{2}}} \qquad (5\text{-}4\text{-}8\,b)$$

$\alpha^{k}_{j+\frac{1}{2}}$ 为 $\vec{\alpha}_{j+\frac{1}{2}}$的分量，函数$\psi$由式（5-2-12）所定义。对式(5-4-8)可采用简化形式

$$\left(r^{-}_{j+\frac{1}{2}}\right)^{k}=\frac{\alpha^{k}_{j-\frac{1}{2}}}{\alpha^{k}_{j+\frac{1}{2}}},\quad \left(r^{+}_{j+\frac{1}{2}}\right)^{k}=\frac{\alpha^{k}_{j+\frac{3}{2}}}{\alpha^{k}_{j+\frac{1}{2}}}$$

$$(5\text{-}4\text{-}9)$$

式（5-4-8）的守恒线化形式为

$$\boldsymbol{E}_1\delta_t\vec{U}_{j-1}+\boldsymbol{E}_2\delta_t\vec{U}_j+\boldsymbol{E}_3\delta_t\vec{U}_{j+1}=-\lambda\left(\vec{H}^{n}_{j+\frac{1}{2}}-\vec{H}^{n}_{j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$(5\text{-}4\text{-}10)$$

$$\delta_t\vec{U}=\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^{n}$$

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{\lambda\theta}{2}\left(-\boldsymbol{A}_{j}-\boldsymbol{K}_{j-\frac{1}{2}}\right)^{n}$$

$$\boldsymbol{E}_3=\frac{\lambda\theta}{2}\left(\boldsymbol{A}_{j+1}-\boldsymbol{K}_{j+\frac{1}{2}}\right)^{n} \qquad (5\text{-}4\text{-}11)$$

$$\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{I}+\frac{\lambda\theta}{2}\left(\boldsymbol{K}_{j-\frac{1}{2}}+\boldsymbol{K}_{j+\frac{1}{2}}\right)^{n}$$

$$\boldsymbol{K}_{j\pm\frac{1}{2}}=(\boldsymbol{S}^{-1}\Omega\boldsymbol{S})_{j\pm\frac{1}{2}} \qquad (5\text{-}4\text{-}12)$$

$$\Omega_{j\pm\frac{1}{2}}=\mathrm{diag}\left[\psi\left(\lambda^{k}_{j\pm\frac{1}{2}}\right)\left(1-Q^{k}_{j\pm\frac{1}{2}}\right)\right]_{j}$$

这里diag(z^{k}) 表示对角矩阵，其对角元素为z^{k}。式（5-4-5)中之$\boldsymbol{S}^{-1}\vec{\boldsymbol{\Phi}}$可写成形式

$$(S^{-1}\vec{\delta})_{j+\frac{1}{2}} = (S^{-1}\Omega\vec{\delta})_{j+\frac{1}{2}}$$

$$= (S^{-1}\Omega S)_{j+\frac{1}{2}}\delta_{j+\frac{1}{2}}\vec{U} = K_{j+\frac{1}{2}}\delta_{j+\frac{1}{2}}\vec{U} \tag{5-4-13}$$

不难看出，矩阵$K_{j\pm\frac{1}{2}}$的引入使计算工作量大为增加。戴维斯提出了一个简化的处理方法，

$$(S^{-1}\Omega S)_{j+\frac{1}{2}} \approx \bar{\omega}\left(r^{-}_{j+\frac{1}{2}},\ r^{+}_{j+\frac{1}{2}}\right)I \tag{5-4-14}$$

这里$\bar{\omega}$是依赖于$r^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}$的标量函数，I是$m\times m$单位矩阵，

$$\bar{\omega}_{j+\frac{1}{2}} = \psi\left(\bar{\lambda}_{j+\frac{1}{2}}\right)\left[1 - Q\left(r^{-}_{j+\frac{1}{2}},\ r^{+}_{j+\frac{1}{2}}\right)\right] \tag{5-4-15}$$

$$\bar{\lambda}_{j+\frac{1}{2}} = \max_{k}\left|\lambda^{k}_{j+\frac{1}{2}}\right|$$

$$r^{-}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\left(\delta_{j-\frac{1}{2}}\vec{U},\ \delta_{j+\frac{1}{2}}\vec{U}\right)}{\left(\delta_{j+\frac{1}{2}}\vec{U},\ \delta_{j-\frac{1}{2}}\vec{U}\right)} \tag{5-4-16 a}$$

$$r^{+}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\left(\delta_{j+\frac{3}{2}}\vec{U},\ \delta_{j+\frac{1}{2}}\vec{U}\right)}{\left(\delta_{j+\frac{1}{2}}\vec{U},\ \delta_{j+\frac{1}{2}}\vec{U}\right)} \tag{5-4-16 b}$$

式中（·，·）表示内积。

罗给出相应的简化形式为

$$r^{-}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\left(\alpha_{j-\frac{1}{2}},\ \alpha_{j+\frac{1}{2}}\right)}{\left(\alpha_{j+\frac{1}{2}},\ \alpha_{j+\frac{1}{2}}\right)}$$

$$r^+_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\left(\alpha_{j+\frac{3}{2}},\ \alpha_{j+\frac{1}{2}}\right)}{\left(\alpha_{j+\frac{1}{2}},\ \alpha_{j+\frac{1}{2}}\right)}$$

$$\bar{\lambda}_{j+\frac{1}{2}}=\left.\frac{\sum_k \lambda^k(\alpha^k)^2}{\sum_k(\alpha^k)^2}\right|_{j+\frac{1}{2}}$$

或者

$$\left(\bar{\lambda}_{j+\frac{1}{2}}\right)^2=\left.\frac{\sum_k[\lambda_k\alpha^k]^2}{\sum_k(\alpha^k)^2}\right|_{j+\frac{1}{2}}$$

实践表明，戴维斯提出的简化方法是一个简单而有效的方法。

参考文献

1 Rusanov V V. On Difference Scheme of Third Order Accuracy for Nonlinear Hyperbolic Systems. J. Comput. Phys., 1970, 5; 507～516.

2 Burstein S Z and Mirin A A Third Order Difference Methods for Hypersonic Equations J. Comput. Phys., 1970, 5, 547～571.

3 Warming R F, Kutler P and Lomax H. Second and Third Order Noncentred Difference Schemes for Nonlinear Hyperbolic Equations. AIAA J. 1973, 11, 189～196.

4 Ma Yanwen and Fu Dexun. Numerical Solutions of Compressible Flow with Compact Scheme. AIAA Paper No. 87-1123.

5 朱幼兰、钟锡昌、陈柄木等. 初边值问题差分方法及绕流. 北京，科学出版社，1980

6 Allen D, Deg, Southwell R W. Quartly J. of Mech. and Applied Math. 1955, 8.

7 Doolan E P et al Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Bourdary Layers. Boolo Press, 1980.

8 王汝权、韩永贵、孙建安等 用指数型差分格式模拟各种涡流 计算物理第二届年会，大庸，1987

9 Roache P J Computational Fluid Dynamics Hermosa. Albuquerque, New Mexico, 1972

10 Yee H C Upwind and Symmetric Shock-Capturing Schemes. NASA

Technical Memorandum 89464.

11 Wu Huamo. New Accurate High Resolution TVD Schemes Analysis and Applications. International Symposium on CFD, Nagoya, 1989.

12 Harten A and Osher S. Uniformly High-Order Accurate Nonoscillatory Schemes I. SIAM J. Num. Analy. 1987, 24(2). 279~309.

13 Harten A, Osher S Engquist B and Chakravarthy. Some Results on Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes. ICASE Report 86~18.

14 Harten A. On high-Order Accurate Interpolation for Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes. The IMA Volumes in Mathematics and it's Applications, Springer-Verlag, 1986, 2; 71~106.

15 Crandall M G and Majda A. Monotone Difference Approximations for Scalar Conservation Law. Math Comp. 1980, 34(149).

16 Harten A. A High Resolution Scheme for the Computation of weak Solutions of Hyperbolic Conservation Laws. NYU Report, March, 1982.

17 Harten A. On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite Difference Schemes. NYU Report, October, 1982.

18 Yee H C Warming R F and Harten A., Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations, AIAA Paper 83-1902

19 Sweby P K and Bains M J. Convergence of Roe's Schemes for the General Non-Linear Scalar Wave Equation. Numerical Analysis Report 8/81, University of Reading, 1981.

20 Harten A and Hyman J M. A Self-Adjusting Grid for the Computation of Weak Solutions of Hyperbolic Conservation Laws. Los Alamos Nat. Lab. Report LA 9105, 1981.

21 Jameson A. Transonic Flow Calculation MAE Report # 1651, Princeton University.

22 Boris J P and Book, D L. Flux Corrected, I, SHASTA, A Fluid Transport Algorithm That Works, J. Comp. Phys. 1973, 11: 38~69

23 Zhuang F G. and Zhang H X. Computational Fluid Dynamics in China. AIAA 87-1134

24 Sweby P K. High Resolution Schemes Using Flux Limiter for Hyperbolic Conservation Law, SIAM J. Numer. Anal, 1984, 21(5)

25 Roe P L. Some Contribution to the Modelling of Discontinuous Flows. Lectures in Applied Mathematics, 1985, 22.

26 Van Leer B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. II. Monotonicity and conservation Combined in a Second Order Scheme. J. Comp. Phys. 1974, 14: 361~370

27 Chakravarthy S and Osher S. High Resolution Applications of the Osher Upwind Scheme for the Euler Equations. AIAA Paper presented at 6th CFD Conference, 1983.

28 Davis S F. TVD Finite Difference Scheme and Artificial Viscosity. ICASE Report No. 84-20, 1984.

29 Roe P L. Generalized Formulation of TVD Lax Wencroff Schemes, ICASE Report No. 84-53, 1984.

30 Yee H C. Construction of Explicit and Implicit Symmetric TVD Schemes and Their Applications, J. Comp. phys, 1987, 68: 151~179

31 Yee H C. Generalized Formation of a Class of Explicit and Implicit TVD Schemes. NASA TM-86775, July, 1985.

32 黄敦. 北京地区CFD讨论班文集 1990.

第六章　数值解分辨率的改进
——其他类型高精度格式

第五章介绍了具有 TVD 特性的差分格式，在这一章中将介绍其他类型的高精度差分格式。第一节将介绍作者最近提出的利用耗散比拟思想构造高分辨率格式的方法[36]。可以看到，按这一思想可构造一些 TVD 类型的格式。参照耗散比拟的思想还可以看到，对应于差分格式的修正方程中色散项（三阶空间导数项）的滤波作用；第二节将介绍紧致格式、迎风紧致格式和带色散协调因子的迎风紧致格式；第三节将介绍 NND[9] 格式，第四节将介绍文献〔12〕中发展的 MmB 格式；最后两节将分别介绍 CSCM 方法和滤波技术。

第一节　耗散比拟法构造差分格式

一、模型方程解变化情况的分析

为简便起见，考虑如下之模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad f=f(u) \tag{6-1-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad a=f_u \tag{6-1-2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6-1-3}$$

式（6-1-2）为对应于式（6-1-1）的非守恒形式。众所周知，在非线性双曲型偏微分方程解中可能有间断产生。在利用欧拉方程求解气动问题时，即使解之初始分布是光滑的，随时间之推移解

中也可能出现间断。当利用二阶或高阶精度格式求解这类物理问题时，在间断附近数值解中会有非物理振荡产生。事实上在间断形成之前微分方程的解还是光滑的时候，一些格式的数值解中也会有振荡产生。在利用N－S方程求解气动问题时，尽管由于耗散项的存在其解应是光滑的，但由于计算机条件的限制使网格不能无限地细分，在粘性较小且解之梯度变化很大的地方也可能有数值振荡产生。这种振荡与格式、解的梯度及梯度变化有关。无论是欧拉方程还是N－S方程都极为复杂，无法对其解的行为进行分析。这里将通过启示性的分析方法探讨产生数值振荡的原因，找出克服的办法。

对差分方程的微分近似进行分析将有助于了解差分解的行为。在利用这种方法进行分析时要求微分方程的解有所需连续导数。设方程（6-1-1）中之 f 满足熵不等式，因而有物理解存在，且当 $\varepsilon \to 0$ 时方程（6-1-3）的解趋于方程（6-1-1）的物理解。在方程（6-1-1）之解的间断面附近式（6-1-3）的对应解梯度很大（ε 足够小），但解是光滑的。本节所讨论的激波是指对应于式（6-1-3）类型的激波，或称N－S型激波。对这种类型激波是可以采用差分方程的微分近似来进行讨论的。设有一单一N－S类型激波（如图 6-1 所示），现只讨论图 6-1 中（a）情况，对图 6-1 中（b）可做类似讨论。离开激波之中心解向左方和向

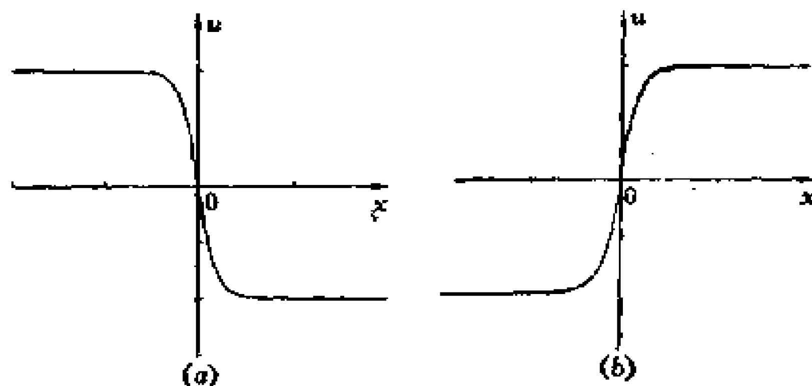


图6-1　激波变化示意图

（a）第一类激波；（b）第二类激波。

右方分别趋于 u^- 和 u^+。在该区内一阶导数为负，且在激波之中心达到最小值。根据图解分析可知，一阶导数之变化将如图 6-2 之（a）所示。在激波之左侧解上凸，在右侧解下凹，即解的二阶导数穿过激波改变符号。依图 6-2 之（a）可定性地确定二阶导数变化情况，如图 6-2 中之（b）所示。如此可知高阶导数的变化情况。图 6-2 是根据伯格斯方程（$f=u^2/2$）之准确解绘制的。一般说来，可以认为在 N-S 类型激波附近的一个小区内解是单调的，其一阶导数在这一区域内保持自己的符号不变，且在激波的中心达到极值，二阶导数穿过激波将改变自己的符号。随解之导数阶次的增加，导数之振荡频率加大，振幅增加。上面的讨论对在激波附近解的变化情况有了一个大致的了解。

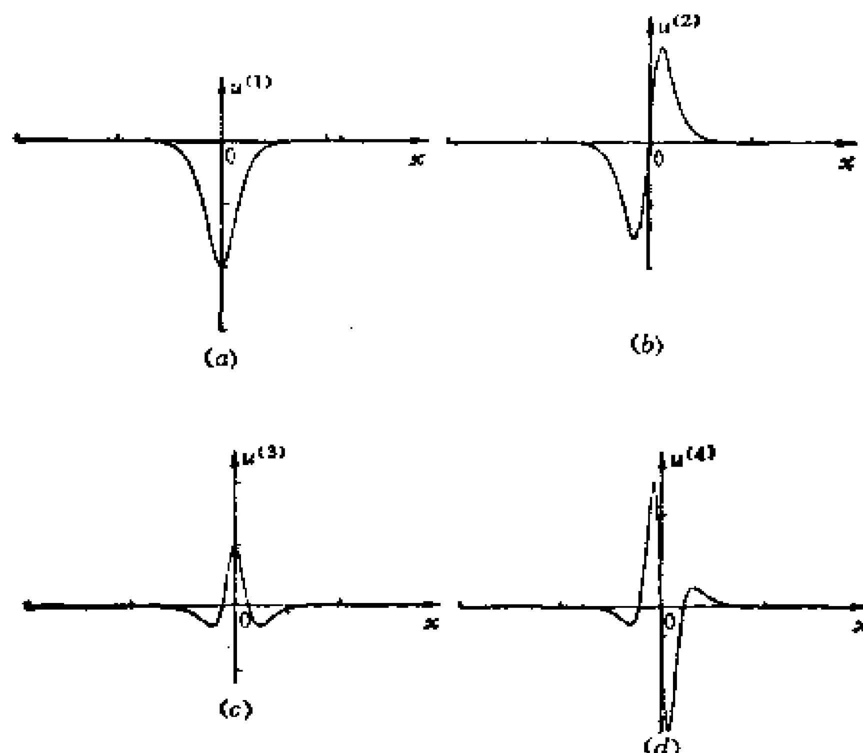


图6-2 激波附近 u 的各阶导数变化示意图

（a）一阶导数；（b）二阶导数；

（c）三阶导数；（d）四阶导数。

二、耗散比拟法

（一）耗散比拟方程与耗散比拟系数

首先以方程（6-1-2）为例进行讨论。设解有所需各阶导数。差分方程的解是以一定的精度逼近于对应的微分方程的解的，但它是对应的修正方程的准确解。分析差分方程的第一微分近似[81~83]对了解数值解的行为是有益的。设对应于式（6-1-2）的半离散化格式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{a}{\Delta x}G=0 \tag{6-1-4}$$

通常G为$u(x+l\Delta x)$的线性组合

$$G(x)=\sum_{l}\alpha_{l}u(x+l\Delta x) \tag{6-1-5}$$

为书写方便这里省略了自变量t。系数α_l需满足如下之相容关系

$$\sum_{l}\alpha_{l}=0,\quad \sum_{l}\alpha_{l}l=1 \tag{6-1-6}$$

对应于式（6-1-4）的具有k阶精度格式的修正方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=a\Delta x^{k}\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}(\sigma u)+\cdots \tag{6-1-7}$$

$$\sigma=-\frac{1}{(k+1)!}\sum_{l}(\alpha_{l}l^{k+1}) \tag{6-1-8}$$

它依赖于具体的差分格式。在解的大梯度变化区$\frac{\partial u}{\partial x}\neq 0$，略去式（6-1-7）中的高阶小量可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\Delta x a\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{6-1-9}$$

$$\mu=\Delta x^{k-1}\sigma\frac{\partial^{k}u}{\partial x^{k}}\Big/\frac{\partial u}{\partial x} \tag{6-1-10}$$

在以后的讨论中称式（6-1-9）为耗散比拟方程，μ 为耗散比拟系数。

（二）防止数值解振荡的一个启示性限制条件

在文献[32]中给出了为使格式是稳定的一个必要的限制条件。一般说来，稳定的差分格式对应的参数 $sign(a)\mu$ 不一定为正，例如，L-W格式所对应的这一参数在穿过N-S型激波时将改变自己的符号。为防止数值解中产生非物理振荡很自然要求 $sign(a)\mu>0$。这一参变量的符号依赖于具体的差分格式，也依赖于解的变化行为。为防止数值解中的振荡产生需对系数 μ 进行人工干予。现对几个具体情况作一简单讨论。

1. $k=1$ 情况

此时 $\mu=\sigma$。为消除数值振荡要求 $\tilde{\mu}=sign(a)|\sigma|$，$\tilde{\mu}$ 为经人工干予后的耗散比拟系数。该情况对应于两点迎风差分格式 $\left(\sigma=\frac{1}{2}\right)$。

2. $k=2$ 情况

$$\mu=\Delta x\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big/\frac{\partial u}{\partial x} \tag{6-1-11}$$

从对解的行为分析中可知，μ 在激波的两侧有着不同的符号，因而在激波的某一侧可能产生数值振荡。

3. $k=3$ 情况

$$\mu=\Delta x^2\sigma\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big/\frac{\partial u}{\partial x} \tag{6-1-12}$$

依解行为的启示性分析可知，在激波的每一侧都存在有 $\mu>0$ 和 $\mu<0$ 的区域，因而在激波的每一侧都可能有数值振荡产生。

上面是针对非守恒型方程（6-1-2）进行分析的。可针对守恒型方程（6-1-1）定义耗散比拟方程和耗散比拟系数。此时半离散的差分格式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\Delta x}F=0 \tag{6-1-13}$$

这里仍取F为$f(x+l\Delta x)$的线性组合

$$F(x)=\sum_{l}\alpha_{l}f(x+l\Delta x) \tag{6-1-14}$$

$$f=f[u(x,\ t)]=f(x,\ t)$$

这里的书写中略去了自变量t。计算中常将式(6-1-14)写为形式

$$F(x)=h_{\frac{1}{2}}-h_{-\frac{1}{2}}$$

$$h_{a}=\sum_{l}\beta_{l}\left[x+\left(l+\frac{1}{2}+\alpha\right)\Delta x\right],\quad \alpha=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \tag{6-1-15}$$

h_a为数值流通量。α_l和β_l应满足一定的相容关系。利用式(6-1-13)所得到的修正方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=\Delta x^{k}\frac{\partial^{k+1}}{\partial x^{k+1}}(\sigma f)+\cdots \tag{6-1-16}$$

σ的定义仍为式(6-1-8)。对应的耗散比拟方程和耗散比拟系数为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial u}{\partial x} \tag{6-1-17}$$

$$\mu=\Delta x^{k-1}\sigma\left(\frac{\partial^{k}f}{\partial x^{k}}\Big/\frac{\partial f}{\partial x}\right)a \tag{6-1-18}$$

为消除数值振荡需要对μ进行干予，使$\tilde{\mu}>0$。

三、耗散比拟法与TVD格式

从上面的讨论中可知，为消除数值解中的振荡需对耗散比拟系数μ进行人工控制。在进行人工控制时应注意不影响原格式的逼近精度。不难看出，一些TVD格式可参照耗散比拟思想进行构造。

在$k=2$情况下，对式(6-1-17)和(6-1-18)进行差分、

并取 $\sigma=\frac{1}{2}$，则对应于中心差分格式的数值流通量为

$$h_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(f_j+f_{j+1})-\mu_{j+\frac{1}{2}}\delta_x^+u_j \qquad (6\text{-}1\text{-}19)$$

这里取

$$\mu_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{\delta_x^+\delta_x^-f_j}{\delta_x^+f_j}\left|a_{j+\frac{1}{2}}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-r^-_{j+\frac{1}{2}}\right)\left|a_{j+\frac{1}{2}}\right| \qquad (6\text{-}1\text{-}20)$$

$$r^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{\delta_x^+f_{j\pm1}}{\delta_x^+f_j} \qquad (6\text{-}1\text{-}21)$$

δ_x^+ 和 δ_x^- 分别为两点前差和后差算子。$\mu_{j+\frac{1}{2}}$ 可取不同表达形式，以后还将进行讨论。到目前为止还不能保证耗散比拟系数为非负。为使 $\mu>0$ 对式（6-1-20)需要求 $r^-_{j+\frac{1}{2}}<1$，这可通过第五章定义的 minmod 函数来实现。下面给出构造TVD格式的例子。

（一）罗、斯韦伯、戴维斯和叶的 TVD 格式[35~37]

将式（6-1-20）中的 $r^{\pm}$ 以限量函数（Limiter)$Q_{j+\frac{1}{2}}$ 来代替[37]

$$\mu_{j+\frac{1}{2}}=\left(1-Q_{j+\frac{1}{2}}\right)\left|a_{j+\frac{1}{2}}\right|/2 \qquad (6\text{-}1\text{-}22)$$

对 $Q_{j+\frac{1}{2}}$ 可有不同的定义，在第五章第三节中给了不同表达形式。

（二）哈顿、叶和沃明的 TVD 格式[34]

当 $f=au$，a 为常数时，取修正数值流通量 g_j 对应的 $\nu_{j+\frac{1}{2}}$

$=0$，则他们的格式也可通过耗散比拟法得到。将他们的格式改写后可得到形式为式（6-1-22）的经修正了的耗散比拟系数，对应的限量函数为

$$Q_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left[\operatorname{minmod}\left(1,\ r^{-}_{j+\frac{1}{2}}\right)+\operatorname{minmod}\left(1,\ r^{+}_{j+\frac{1}{2}}\right)\right] \tag{6-1-23}$$

四、高分辨率格式的构造

参照对耗散比拟系数的限制条件给出几个逼近于单个守恒律方程的格式构造方法。

（一）取绝对值的方法

参照式（6-1-18）对应于 $k=2$ 取

$$\tilde{\mu}_{j+\frac{1}{2}}=\left(\left|\sigma\delta^{2}_{j+\frac{1}{2}}f\right|\Big/\left|\delta_{j+\frac{1}{2}}f\right|\right)\left|a_{j+\frac{1}{2}}\right| \tag{6-1-24}$$

这里 $a=f_u$，$\delta^2 f$ 为对 f 的二阶差分，δ_f 为一阶差分。在文献〔30〕中取

$$\left|\delta^{2}_{j+\frac{1}{2}}f\right|=\frac{1}{2}\left(|\delta^2_x f_j|+|\delta^2_x f_{j+1}|\right) \tag{6-1-25}$$

$$\left|\delta_{j+\frac{1}{2}}f\right|=\max\{|\delta^2_x f_{j-1}|,\ |\delta^2_x f_j|,\ |\delta^2_x f_{j+1}|\} \tag{6-1-26}$$

定义了 $\tilde{\mu}$ 后可得经修正了的数值流通量。在文献〔30〕中利用如此定义的 $\tilde{\mu}$ 计算了二维激波反射问题，得到了较好的计算结果。

（二）利用简单 minmod 函数法

关于这种方法在前面讨论耗散比拟法与 TVD 格式时已经提到，这里不再重述。在利用 minmod 函数构造格式时也可对式

(6-1-1) 中的流通量进行分裂，即 $f=f^{+}+f^{-}$，然后分别对 f^{+}和 f^{-} 构造耗散比拟系数。

（三）利用对数函数法

在 $k=2$ 时利用式（6-1-18）可形式地得到

$$\mu_{j+\frac{1}{2}}=\Delta x\sigma\left[\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)a\right]_{j+\frac{1}{2}}$$

$$\approx\sigma\ln\frac{\delta_{j+1}f}{\delta_j f}\cdot a_{j+\frac{1}{2}}$$

可定义经人工干予后的耗散比拟系数为

$$\tilde{\mu}_{j+\frac{1}{2}}=-|\sigma\ \ln\tilde{Q}_{j+\frac{1}{2}}|\left|a_{j+\frac{1}{2}}\right| \qquad (6\text{-}1\text{-}27)$$

$$\tilde{Q}_{j+\frac{1}{2}}=\max\left\{\varepsilon,\ Q_{j+\frac{1}{2}}\right\},\quad 0<\varepsilon<1 \qquad (6\text{-}1\text{-}28)$$

对限量函数 $Q_{j+\frac{1}{2}}$ 可取不同的表达形式。ε 的引入是为防止在零点上对数函数出现奇性。根据耗散比拟系数的定义可知，通常情况下耗散比拟系数 μ 为 Δx^k 的量级，在极值点上 μ 将降阶。

（四）色散误差系数符号控制法

如果空间导数取中心差，则对应于半离散化格式的修正方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+\cdots$$

引入一色散协调因子

$$R(u)=\sigma sign\left\{\frac{|\delta_x^+ f|-|\delta_x^- f|}{|\delta_x^+ f|+|\delta_x^- f|}\right\}sign(a),\quad \sigma>\frac{1}{6}$$

$$(6\text{-}1\text{-}29)$$

其中 $\delta_x^{\pm}f=\pm f(x\pm\Delta x,\ t)\mp f(x,\ t)$。构造如下之方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}=\Delta x^2\frac{\partial}{\partial x}\left(R\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \qquad (6\text{-}1\text{-}30)$$

不难看出，对应于式（6-1-30）的耗散比拟系数在激波之前后总是正的。可参照式（6-1-30）构造相应的差分格式，其中空间一

阶导数项取中心差分，三阶导数项当$R>0$时取左偏四点差分，当$R<0$取右偏四点差分。

五、逼近双曲型方程组的差分格式

（一）一维双曲型方程组的耗散比拟法

设有一双曲型方程组

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}=0,\quad A(\vec{U})=\frac{D(\vec{f})}{D(\vec{U})} \tag{6-1-31}$$

$\vec{U}$和$\vec{f}$为m维向量，雅可比矩阵A有实的特征根和完备的特征向量。取式（6-1-31）的半离散化形式

$$\frac{\partial \vec{U}_j}{\partial t}+\frac{1}{\Delta x}\left(\vec{H}_{j+\frac{1}{2}}-\vec{H}_{j-\frac{1}{2}}\right)=0 \tag{6-1-32}$$

$$\vec{H}_{j+\frac{1}{2}}=\vec{H}(\vec{U}_{j-l},\ \cdots,\ \vec{U}_j,\ \cdots,\ \vec{U}_{j+l+1})$$

如果$\vec{H}_{j+\frac{1}{2}}$简单地由f_{j+l}的线性组合构成，则对应于具有二阶逼近精度的半离散格式的修正方程为

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}=\Delta x^2\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sigma\vec{f})+\cdots \tag{6-1-33}$$

式中参量σ依赖于具体的差分格式。下面介绍两种耗散比拟方程的定义方法。

1. 间接构造方法

冻结雅可比系数矩阵A，将式（6-1-31）化为特征型

$$\frac{\partial v_l}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_l v_l)=0 \tag{6-1-34}$$

这里v_l为向量$\vec{V}$的分量，$\vec{V}=S\vec{U}$，$\Lambda=S^{-1}AS$。S^{-1}和S为相似变换矩阵，Λ为由A之特征值λ_l组成的对角矩阵。对应于式（6-1-34）的半离散化格式为

$$\frac{\partial v_l}{\partial t}+\frac{1}{\Delta x}\left(h^l_{j+\frac{1}{2}}-h^l_{j-\frac{1}{2}}\right)=0 \tag{6-1-35}$$

可参照前面的讨论构造经人工控制后的耗散比拟方程，如

$$\frac{\partial v_l}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_l v_l)=\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\mu}_l\frac{\partial v_l}{\partial x} \tag{6-1-36}$$

$$\tilde{\mu}_l=\left|\sigma\Delta x\left(\frac{\partial^2 v_l}{\partial x^2}\Big/\frac{\partial v_l}{\partial x}\right)\lambda_l\right| \tag{6-1-37}$$

将式（6-1-36）通过原物理量 $\vec{U}$ 表示，则有

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}=\Delta x\frac{\partial}{\partial x}\tilde{B}\frac{\partial\vec{U}}{\partial x} \tag{6-1-38}$$

$$\tilde{B}=S^{-1}\tilde{M}S \tag{6-1-39}$$

$\tilde{M}$ 为由 $\tilde{\mu}_l$ 构成的对角矩阵。

2. 直接构造方法

式（6-1-33）右端之主导项可改写为形式

$$\Delta x^2\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\sigma\vec{f})\equiv\Delta x\frac{\partial}{\partial x}B\frac{\partial\vec{U}}{\partial x} \tag{6-1-40}$$

其中 $B=\sigma DA$，D 为由元素

$$\mu_l=\Delta x\frac{\partial^2 f_l}{\partial x^2}\Big/\frac{\partial f_l}{\partial x} \tag{6-1-41}$$

组成的对角矩阵，f_l 为向量 $\vec{f}$ 的分量，经人工干予后的矩阵 B 表示为 $\tilde{B}$，其具体表达式为

$$\tilde{B}=|\sigma||D||A|,\quad |A|=S^{-1}|A|S \tag{6-1-42}$$

$|A|$ 为由 $|\lambda_l|$ 组成之对角矩阵，$|D|$ 为对角矩阵，其元素由式（6-1-41）的绝对值组成。

（二）差分格式的构造

对应于式（6-1-32）中之数值流通向量可写为

$$\vec{H}_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\vec{f}_l+\vec{f}_{j+\frac{1}{2}}-2\tilde{B}_{j+\frac{1}{2}}\delta_x^+\vec{U}_l\right) \tag{6-1-43}$$

对矩阵 $\tilde{B}$ 可采用直接方法或间接方法进行构造。

六、色散项的滤波作用

在第五章的讨论中曾指出，构造TVD格式利用了反扩散思想[11]。反扩散方法是将一阶精度差分方程中过多的扩散量（原差分方程中所固有的，或人工加入的）通过人工干予的方法消除一部分，使数值解中的非物理振荡有所抹平而又能保持数值解的精度。现考虑逼近于式（6-1-2）的两点迎风格式，略去高阶小量由修正方程可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial u}{\partial x},\quad \mu>0 \qquad (6-1-44)$$

所谓反扩散方法大致可分为如下三种情况。其一为将式(6-1-44)之右端写在 n 时间层上，而反扩散项也写在 n 时间层上，则经反扩散后的式（6-1-44）的右端变为

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n}_{\text{原扩散量}}-\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\mu}\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n}_{\text{反扩散量}}$$

这种方法仅改变了扩散量的大小。另一种反扩散方法是将原扩散量写在 $n+1$ 时间层上，反扩散量写在 n 时间层上，此时有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^{n+1}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\mu}\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n$$

用这种方法进行反扩散一方面改变了扩散量，另一方面引入了扩散量的时间导数项。实践表明，这两种反扩散方法对改进激波的分辨率都不令人满意。在上面提到的两种方法中扩散量和反扩散量都取在同一网格点上。第三种反扩方法是将扩散量与反扩散量取在同一时间层上，但取在不同网格点上，即

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{j-1}^n \qquad (6-1-45)$$

结果是将扩散量反掉了，从而提高了精度，但引入了三阶导数项。式（6-1-45）中反扩散量取在 $j-1$ 点上，也可取在 $j+1$ 点上，其结果导致三阶导数项系数之符号不同。参照本节第二部

分的讨论可知，修正方程中的三阶导数项会使激波之一侧数值解中产生振荡，如果相应地改变三阶导数项的符号，则可避免在数值解中产生振荡。从上面的讨论中可以看出差分方程中的色散误差项对控制数值振荡的作用。为了控制在激波附近色散项前系数的符号，在前面引入了色散协调因子。

分析一下 TVD 格式的修正方程是很有意思的。对应于第五章第二节中的半离散形式的 TVD 格式为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\Delta x}\left[\tilde{h}_{j+\frac{1}{2}}-\tilde{h}_{j-\frac{1}{2}}\right] \tag{6-1-46}$$

$$\tilde{h}=\frac{1}{2}\left[\tilde{f}_j+\tilde{f}_{j+1}-\psi\left(\tilde{c}_{j+\frac{1}{2}}\right)\Delta_{j+\frac{1}{2}}u\right] \tag{6-1-47}$$

修正后的流通量为

$$\tilde{f}_j=f_j+g_j,\quad f=cu,\quad c=\text{常数}$$

按定义 $\psi(z)=|z|$，$\sigma=\frac{1}{2}\psi(c)=$常数，因而流通量的修正量 g_j 可写为

$$g_j=\sigma\,\mathrm{minmod}\left\{\Delta_{j+\frac{1}{2}}u,\ \Delta_{j-\frac{1}{2}}u\right\}$$

$$\tilde{c}_{j+\frac{1}{2}}=c+\gamma_{j+\frac{1}{2}}$$

关于 $\nu_{j+\frac{1}{2}}$ 在第五章有定义。

现在来讨论一下近激波附近格式（6-1-46）之修正方程中主导误差项的变化情况。设在某时刻 t 函数 u 的变化如图 6-1 所示。设 s 为激波的中心位置，s 为拐点，在该点 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$。

首先来讨论 $c>0$ 的情况。根据定义

在激波之左方：

$$g_j=\sigma\Delta_{j-\frac{1}{2}}u,\quad \nu_{j+\frac{1}{2}}=\sigma\,\Delta x\tilde{a}_{j-\frac{1}{2}}$$

在激波之右方：

$$g_j = \sigma \Delta_{j+\frac{1}{2}} u, \quad \nu_{j+\frac{1}{2}} = \sigma \Delta x a_{j+\frac{1}{2}}$$

这里

$$\tilde{a}_{j\pm\frac{1}{2}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big/ \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x)$$

有了 g_j 的具体表达形式后可得到在激波前后对应于式（6-1-46）的修正方程为

在激波之左方：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{c}{3} \Delta x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots \qquad (6\text{-}1\text{-}48\text{a})$$

在激波之右方：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{c}{6} \Delta x^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \cdots \qquad (6\text{-}1\text{-}48\text{b})$$

从式（6-1-48）中可以看到，由于修正量 g_j 的引入使得带二阶导数的扩散项已经反掉，而起主导作用的是色散项。从式中还可以看到，穿过激波色散误差项自动调节着自己的符号，使对应的耗散比拟系数总为正。对系数 $c < 0$ 的情况可做类似的讨论。

在文献〔1〕中对一维N-S方程进行了分析，考查了人工引入三阶导数和四阶导数项在激波附近对解的影响，并根据分析情况构造了 NND 格式。

七、算　例

利用取对数函数的方法对耗散比拟系数进行了改造，计算了二维激波反射问题。计算中取来流马赫数 $M_\infty = 2.9$，激波之入射角为 29°。计算区域为 $0 \leqslant x \leqslant 4$，$0 \leqslant y \leqslant 1$。在图 6-3中给出了 $y = 0.5$ 处沿 x 方向的压力分布．在图 6-4 中给出的是等密度线。从图中可以看出，计算结果是比较好的。

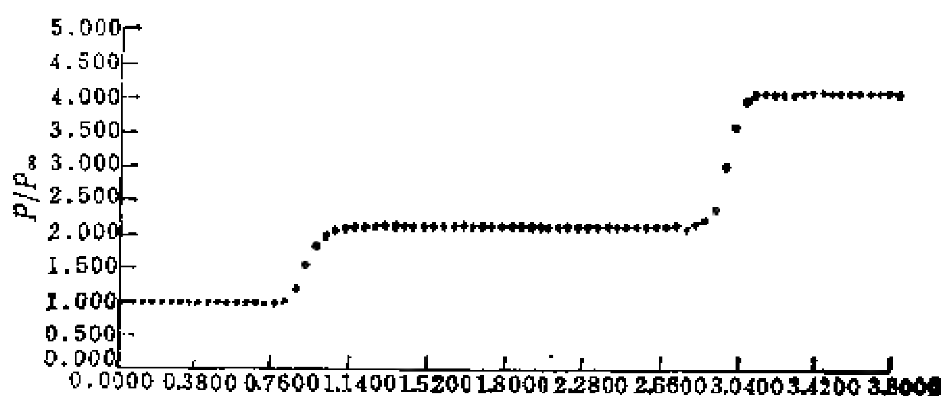


图6-3　$y=5$ 处之压力分布

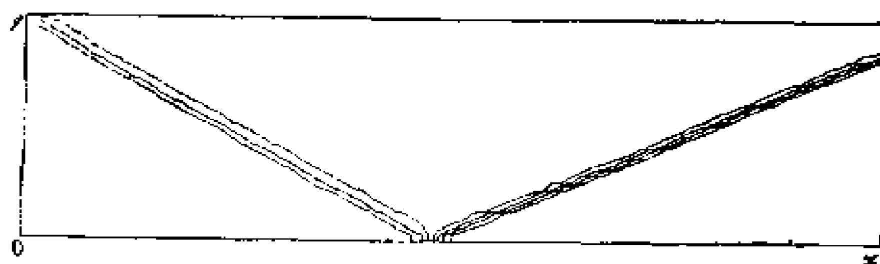


图6-4　等密度线

第二节　紧致格式、迎风紧致格式及色散可控的迎风紧致格式

一、高精度差分格式举例

人们曾试图构造高精度的差分格式来提高激波附近数值解的分辨率。下面将给出三个具体例子。

（一）鲁萨诺夫（Русанов）和伯斯坦-米林（Burstein-Mirin）格式[2,3]

$$\left.\begin{aligned}
u^{(1)}_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}(u^n_{j+1}+u^n_j)-\frac{1}{3}\nu\delta^+_x u^n_j \\
u^{(2)}_j &= u^n_j-\frac{2}{3}\nu\left(u^{(1)}_{j+\frac{1}{2}}-u^{(1)}_{j-\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned}
&u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\gamma}{24}\left(-2u_{j+2}^{(n)}+7u_{j+1}^{(n)}-7u_{j-1}^n+2u_{j-2}^n\right)\\
&\qquad-\frac{3}{8}\gamma\left(u_{j+1}^{(2)}-u_{j-1}^{(2)}\right)-\frac{\omega}{24}\delta_x^4u_j^n\\
&|\gamma|=|c|\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1
\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}2\text{-}1)$$

$$4\gamma^2-\gamma^4\leqslant\omega\leqslant 3$$

$$T\cdot E=O(\Delta t^3,\ \Delta x^3)$$

（二）沃明，库勒-朗马克士格式[4]

$$u_j^{(1)}=u_j^n-\frac{2}{3}\gamma\,\delta_x^+u_j^n$$

$$u_j^{(2)}=\frac{1}{2}\left(u_j^n+u_j^{(1)}-\frac{2}{3}\gamma\,\delta_x^-u_j^{(1)}\right)\qquad(6\text{-}2\text{-}2)$$

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\gamma}{24}\left(-u_{j+2}^n+7u_{j+1}^n-7u_{j-1}^n+2u_{j-2}^n\right)$$

$$-\frac{3}{4}\gamma\delta_x^0u_j^{(2)}-\frac{\omega}{24}\delta_x^4u_j^n$$

该格式的稳定条件及截断误差与鲁萨诺夫格式相同。它是鲁萨诺夫格式的改进，消除了半点上量的计算。

（三）赖纳德（Leonard）格式[5]

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\gamma\left[\delta_x^0u_j^n-\frac{1}{6}\delta_x^-(\delta_x^2u_j)\right]\quad c>0\qquad(6\text{-}2\text{-}3)$$

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\gamma\left[\delta_x^0u_j^n-\frac{1}{6}\delta_x^+(\delta_x^2u_j)\right]\quad c<0$$

$$T.E.=O(\Delta t,\ \Delta x^3)$$

上面给出了三个空间方向具有三阶精度的格式。无疑在解的光滑区对提高解的精度是有好处的。这类格式的解在激波附近仍有非物理振荡产生。

对这三个格式从形式上看每个网点上的计算量增加了，格式变得也较为复杂，且给边界点和近边界点的计算带来困难。

二、紧 致 格 式

逼近于式（6-1-2）的最简单的显式紧致格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}F_j^n$$

$$\frac{1}{6}F_{j+1}^n+\frac{2}{3}F_j^n+\frac{1}{6}F_{j-1}^n=\delta_x^0 f_j^n \qquad (6-2-4)$$

是不稳定的。在这一章中将以 F_j 表示一阶导数的紧致差分。可构造隐式的紧致格式

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}[\alpha F_j^{n+1}+(1-\alpha)F_j^n],\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

(6-2-5)

可利用式（6-2-4）和（6-2-5）将 F_j 消掉得

$$\frac{1}{6}\delta_t u_{j+1}^{n+1}+\frac{2}{3}\delta_t u_j^{n+1}+\frac{1}{6}\delta_t u_{j-1}^{n+1}$$

$$=-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\alpha\delta_x^0 f_j^{n+1}+(1-\alpha)\delta_x^0 f_j^n\right] \qquad (6-2-6)$$

在文献[6]中就是利用式（6-2-5）来求解二维不可压N-S方程。在空间方向上这种差分逼近具有四阶逼近精度。且相对来说这种方法计算量不大，方法简单。在第四章第七节中给出的紧致格式更为简单[7]，即

$$\{I+\tilde{\alpha}(\delta_x^- c^+\cdot+\delta_x^+ c^-\cdot)\}\delta_t u_j^{n+1}=-c\frac{\Delta t}{\Delta x}F_j^n \qquad (6-2-7)$$

三、迎风紧致格式[8]

在这里将假设系数 $c>0$，并取差分格式（4-7-6）中的 $\alpha=\gamma=0$，则得

$$\left(1+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^- c\ \cdot\right)\delta_t u_j^{n+1}=-c\frac{\Delta t}{\Delta x}F_j^n \qquad (6-2-8)$$

在对空间导数进行离散化时，通常人们采用如下之两种逼近形式：

$$\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \approx F_j = \sum_k a_k u_{j+k}$$

$$\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \approx F_j = \sum_k a_k (u_{j+k+1} - u_{j+k})$$

按这两种逼近式 F_j 可直接求出来 在这里称其为空间导数的显式逼近。笔者建议采用如下之逼近式：

$$\sum_k \alpha_k F_{j+k} = \sum_k a_k (u_{j+k+1} - u_{j+k}) \tag{6-2-9}$$

这里 $F_j/\Delta x$ 是一阶导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的逼近式。此时通常需解代数方程组才能求出 F_j 来，这里称式（6-2-9）为空间导数的隐式逼近。将上式在 j 点上对两端均进行泰勒级数展开，并取 $\Delta x \partial^k F/\partial x^k$ 与 $\partial^{k+1} f/\partial x^{k+1}$ 的系数相等，则可得关系式

$$\sum_k \alpha_k k^{m-1} = \frac{1}{m} \sum_k a_k [(k+1)^m - k^m]$$

$$m = 1, \ 2, \ \cdots, \ M \tag{6-2-10}$$

M 为逼近精度，它与进入式（6-2-10）中的点数有关。当取 $m=1$ 时则可得相容关系式

$$\sum_k \alpha_k = \sum_k a_k \tag{6-2-11}$$

利用式（6-2-9）的泰勒级数展开式和关系式（6-2-10），并消除对 F 的空间导数则得

$$F_j = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_{2n} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} + C_{2n+1} \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} \right) \tag{6-2-12}$$

设

$$n < l \qquad C_{2n} = 0$$

$$n = l \qquad C_{2n} \neq 0$$

如果 $(-1)^l C_{2l} > 0$，则称式（6-2-9）为迎风差分。这里在定义迎风差分时假设了方程（6-1-2）中的系数 $c > 0$。对 $c < 0$ 的情况，定义 $(-1)^l C_{2l} < 0$ 时式（6-2-9）为迎风差分。

为了不使计算过程复杂，仅取如下之与三个网格点相联系的差分逼近

$$\alpha_0 F_{j+1} + \beta_0 F_j + \gamma_0 F_{j-1} = (a_0 \delta_x^+ + b_0 \delta_x^-) u_j \qquad (6\text{-}2\text{-}13)$$

取泰勒级数展开式后对应系数相等，则有

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 &= a_0 + b_0 \\ \alpha_0 \qquad - \gamma_0 &= \frac{1}{2}(a_0 - b_0) \\ \alpha_0 \qquad + \gamma_0 &= \frac{1}{3}(a_0 + b_0) \\ \alpha_0 \qquad - \gamma_0 &= \frac{1}{4}(a_0 - b_0) \end{aligned} \qquad (6\text{-}2\text{-}14)$$

设 $a_0 + b_0 = 1$。如果使这四个等式都得到满足，则可得到具有四阶逼近精度的紧致差分。现引入新的参变量 ε_2，ε_3 和 ε_4，并设

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{6} + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\ \gamma_0 &= \frac{1}{6} - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \\ \beta_0 &= \frac{2}{3} + 2\varepsilon_3 \\ a_0 &= \frac{1}{2} - 2\varepsilon_4 \\ b_0 &= \frac{1}{2} + 2\varepsilon_4 \end{aligned} \qquad (6\text{-}2\text{-}15)$$

此时与式（6-2-12）的对应式为

$$F_j = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} - 2\varepsilon_2 \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_3 \Delta x^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \varepsilon_4 \frac{\Delta x^4}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \cdots$$

$$(6\text{-}2\text{-}15)$$

如果选取

$$\varepsilon_k \sim \Delta x^{M+1-K}, \quad M \leqslant 4$$

则可得具有M阶精度的逼近式。在选取 ε_k 时希望 α_0、β_0、γ_0、a_0 和 b_0 为有限量。式（6-2-13）可改写成如下之形式的差分表达式

$$F_j = \frac{\delta_x^0 - 2\varepsilon_4\delta_x^2}{1 + 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_4)\delta_x^0 + \left(\frac{1}{6} - \varepsilon_3\right)\delta_x^2} u_j \qquad (6\text{-}2\text{-}16)$$

迎风紧致差分要求

$$\begin{aligned} &\text{当} \quad c > 0, \quad \varepsilon_{2,4} \geqslant 0 \\ &\text{当} \quad c < 0, \quad \varepsilon_{2,4} \leqslant 0 \end{aligned} \qquad (4\text{-}2\text{-}17)$$

现在给出两个更为简单的迎风紧致差分（仍设 $c > 0$）．即

$$(1)\quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \frac{1}{6}, \quad \varepsilon_4 > 0 \qquad (6\text{-}2\text{-}18)$$

$$(2)\quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_4 = \frac{1}{6} \qquad (6\text{-}2\text{-}19)$$

对这两种情况式（6-2-13）简化为

$$\beta_0 F_j + \gamma_0 F_{j-1} = (a_0\delta_x^+ + b_0\delta_x^-)u_j \qquad (6\text{-}2\text{-}20)$$

对（1）情况$T.E. = O(\Delta x^2)$；对（2）情况 $T.E. = O(\Delta x^3)$。对这两种情况差分式都给出正的耗散特性。式（6-2-20）可很容易地自左向右进行求解。

四、格式的稳定性分析

仍设式（6-1-2）中之系统 $c > 0$，利用冯·诺伊曼稳定性分析方法可得对应于式（6-2-8）的放大因子

$$G = \frac{C + iD\sin\theta}{A + iB\sin\theta} \qquad (6\text{-}2\text{-}21)$$

式中

$$\begin{aligned} A = &\left[\frac{1}{3}(2 + \cos\theta) + 2\varepsilon_3(1 - \cos\theta)\right] \\ &\times\left[1 + \frac{\beta}{2} c \frac{\Delta t}{\Delta x}(1 - \cos\theta)\right] \\ &+ \beta(\varepsilon_4 - \varepsilon_2) c \frac{\Delta t}{\Delta x}\sin^2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = &\frac{\beta}{2} c \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{1}{3}(2 + \cos\theta) + 2\varepsilon_3(1 - \cos\theta)\right] \\ &+ 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_4)\left[1 + \frac{\beta}{2} c \frac{\Delta t}{\Delta x}(1 - \cos\theta)\right] \end{aligned}$$

$$C = A + 4\varepsilon_4 c \frac{\Delta t}{\Delta x}(\cos\theta - 1)$$

$$D = B - c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

在图 6-5 中给出了 $c \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = 100$，$\varepsilon_2 = 0.01$，$\varepsilon_2 = 0.1$，$\varepsilon_4 = 0.125$ 时 $|G|$ 的变化曲线。

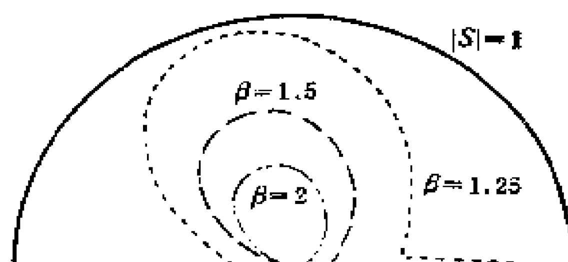


图6-5　紧致格式稳定性变化曲线

五、逼近于气动方程的色散误差可控的迎风紧致格式

现以一维欧拉方程为例进行讨论。逼近于一维欧拉方程（4-2-6）的迎风紧致差分格式为

$$\left(I + \frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x \mathbf{A}^{+} + \frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x \mathbf{A}^{-} \right)\delta_t \vec{U}^{n+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x}\vec{F}_i^n \tag{6-2-22}$$

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \delta_t \vec{U}^{n+1}$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{+} + \vec{F}_i^{-}$$

$$\vec{F}^{\pm} = \frac{\delta_x^0 - 2\varepsilon_4^{\pm}\delta_x^2}{1 + 2(\varepsilon_2^{\pm} - \varepsilon_4^{\pm})\delta_x^0 + \left(\frac{1}{6} - \varepsilon_4^{\pm}\right)\delta_x^2}\vec{f}^{\pm} \tag{6-2-23}$$

$$\varepsilon_{2,4}^{+} \geqslant 0, \quad \varepsilon_{2,4}^{-} \leqslant 0$$

$\mathbf{A}^{\pm}$为分裂后的雅可比矩阵，$\vec{f}^{\pm}$为分裂后的流通向量。当取 $\beta = 1$ 时时间方向之逼近精度为二阶，x 方向之逼近精度取决于对 $\varepsilon^{\pm}$ 的选取。在本章第一节曾引入一控制色散误差的协调因子(6-1-29)，可定义

$$\varepsilon_3^{\pm} = \pm R(e), \quad e = \rho, \quad p \qquad (6\text{-}2\text{-}24)$$

如此可使色散误差项的符号得到控制，有利于提高数值解在激波附近的分辨能力。计算时建议取 $\varepsilon_4^{+} > 0$，$\varepsilon_4^{-} < 0$ 以使格式具有耗散特性。

六、算　例

（一）一维激波管问题的计算

所计算之物理模型取自文献〔13〕（如图6-6所示）。激波管长 $L=1.$，隔膜位于 $x=0.5$处。在 $t=0$ 时刻膜之左方状态为 $\rho_L=1.$，$p_L=1.$，$u_L=0.$，右方状态为 $\rho_R=0.125$，$p_R=0.1$，$u_R=0$。计算中的网格点数为 $IN=101$。图6-7到图6-10中给出了在 $t=0.14$时刻的密度、速度、压力和内能分布。在计算中仅利用了迎风紧致差分，对色散项并未引入协调因子 $R(e_j)$。

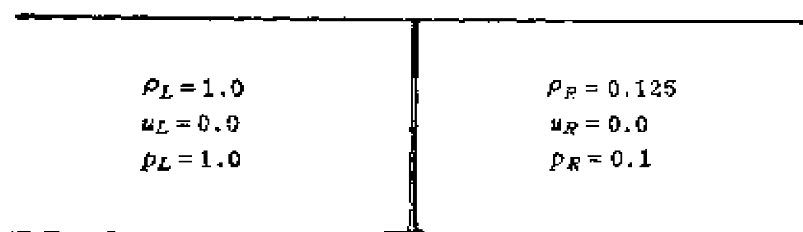


图6-6　一维激波管初始分布图

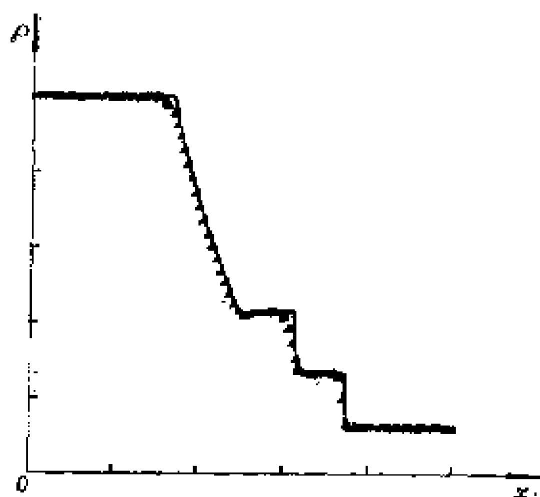


图6-7　$t=0.14$时之密度分布

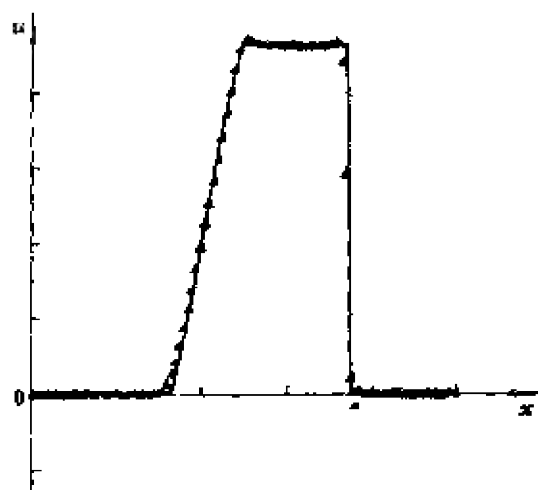


图6-8　$t=0.14$时之速度分布

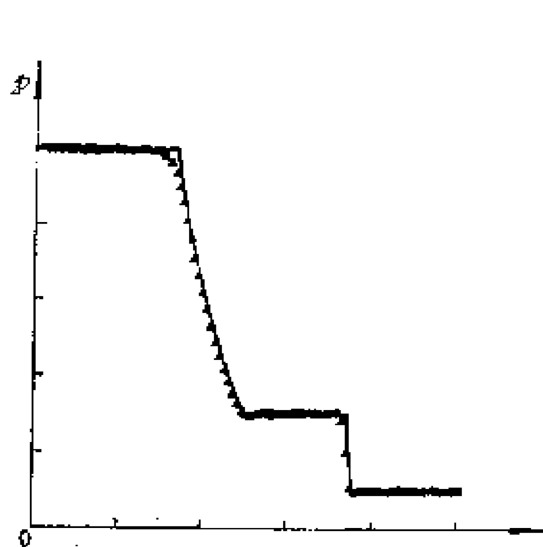


图6-9　$t=0.14$时之压力分布

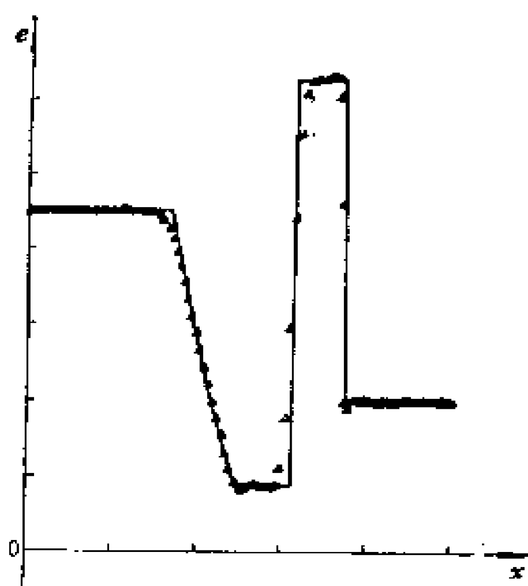


图6-10　$t=0.14$时之内能分布

（二）二维激波反射问题

在图 6-11 中给出了流动示意图。来流马赫数 $Ma_\infty=2.9$，激波的入射角 $\theta=29°$，计算区域为 $0\leqslant x\leqslant 4$，$0\leqslant y\leqslant 1$。计算中的网格点数为 $IN\times JN=81\times 41$。在图 6-12 中给出了 $J=21$时沿 x 方向之密度分布图，图 6-13 中给出的是等密度线。计算中利用了第四章第二节中的第（4）种系数矩阵分裂方法，并取$\varepsilon_2^\pm=0$，$\varepsilon_3^\pm\sim R(\rho_j)$，$\varepsilon_4^\pm=\pm 0.125$。计算结果十分令人满意。

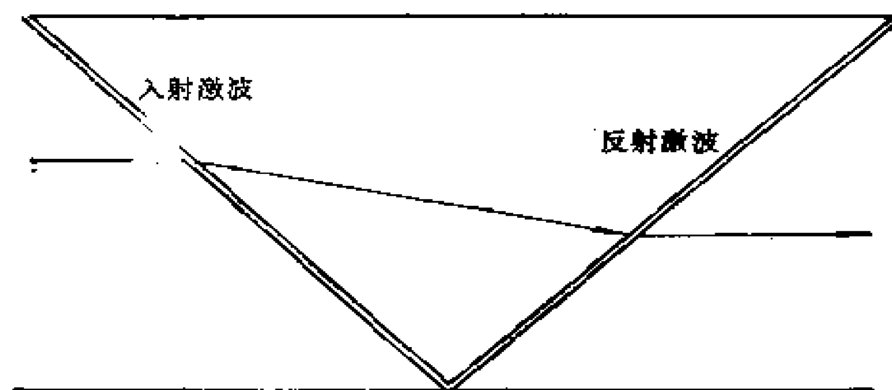


图6-11　激波反射示意图

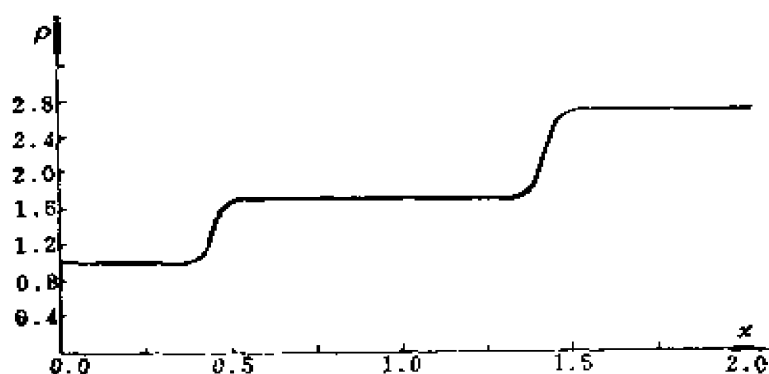


图6-12　$J=21$时之密度分布

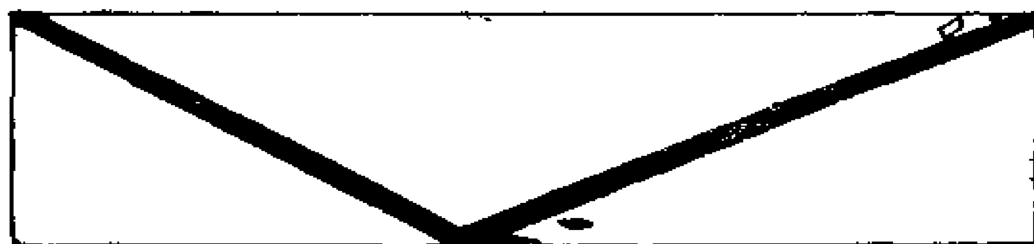


图6-13　等密度线

第三节　NND格式

在文献[1]中的作者通过小扰动分析的办法研究了色散项误差对改善数值解在激波附近行为的作用。在这一分析的基础上文献[9]中构造了NND格式（Non oscillatory, Containing no free parameters and dissipative scheme）。现仍以模型方程(6-1-2)为例进行讨论。对系数c进行分裂

$$c=c^{+}+c^{-},\quad c^{\pm}=\frac{c\pm|c|}{2}$$

$$f^{\pm}=c^{\pm}u\qquad f=f^{+}+f^{-}$$

于是式（6-1-2）可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f^{+}}{\partial x}+\frac{\partial f^{-}}{\partial x}=0\qquad(6\text{-}3\text{-}1)$$

对该式可构造半离散化的格式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\begin{cases}-\dfrac{\delta_x^b(f^+)_j}{\Delta x}-\dfrac{\delta_x^0(f^-)_j}{\Delta x} & \text{（激波上游）}\\ -\dfrac{\delta_x^f(f^-)}{\Delta x}-\dfrac{\delta_x^0(f^+)}{\Delta x} & \text{（激波下游）}\end{cases}\tag{6-3-2}$$

为便于讨论，设系数 $c>0$，不难看出，在激波的上游，含$\delta_x^b(f^+)$项在对应的修正方程中给出的三阶导数的系数为正，而四阶导数的系数为负。与此同时含 $\delta_x^0(f^-)$项在对应的修正方程中给出三阶导数项的系数为正，而四阶导数项的系数为零。由此可知，按这种方式对空间导数进行离散化，则色散误差项的系数将满足本章第一节中的要求。现再来分析一下在激波下游修正方程中色散项之系数的变化情况。经分析可知，在激波的下游含$\delta_x^f(f^-)$项在修正方程中给出的三阶导数的系数为负，四阶导数项的系数为负。与此同时，含 $\delta_x^0(f^+)$ 项在修正方程中给出的三阶导数的系数为负，四阶导数项的系数为零。

按上面的分析可知，格式（6-3-2）在修正方程中三阶导数项的系数将满足在第一节中提出的要求，这将有利于抑制数值解中的非物理振荡。

现对差分方程（6-3-2）中的各项进行重新组合，改写成更为紧凑的形式，即式（6-3-2）可写为

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}=-\frac{1}{\Delta x}\left(h_{j+\frac{1}{2}}-h_{j-\frac{1}{2}}\right)\tag{6-3-3}$$

这里

$$h_{j+\frac{1}{2}}=f^+_{j+\frac{1}{2},\ L}+f^-_{j+\frac{1}{2},\ R}$$

$$f^+_{j+\frac{1}{2},\ L}=\begin{cases}f_j^++\dfrac{1}{2}\,\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}} & \text{（激波上游）}\\ f_j^++\dfrac{1}{2}\,\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}} & \text{（激波下游）}\end{cases}$$

（6-3-4 a）

$$f^-_{j+\frac{1}{2},\ R}=\begin{cases} f^-_{j+1}-\frac{1}{2}\quad \Delta f^-_{j+\frac{1}{2}} & \text{（激波上游）}\\ f^-_{j+1}-\frac{1}{2}\quad \Delta f^-_{j+\frac{3}{2}} & \text{（激波下游）}\end{cases}$$

（6-3-4 b）

$$\Delta f^{\pm}_{j+\frac{1}{2}}=f^{\pm}_{j+1}-f^{\pm}_j$$

方程(6-3-4)表明，在激波上、下游需要在$\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}$和$\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}$之间作选择。对于单调变化的激波，$\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}$和$\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}$的符号是相同的，并且准确到二阶精度，在激波的上游$\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}$的绝对值小于$\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}$的绝对值。在激波的下游$\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}$的绝对值小于$\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}}$的绝对值。同样在激波上、下游，$\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}$和$\Delta f^-_{j+\frac{3}{2}}$的符号也是相同的，并且在激波上游，$\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}$的绝对值小于$\Delta f^-_{j+\frac{3}{2}}$的绝对值，在激波的下游$\Delta f^-_{j+\frac{3}{2}}$的绝对值小于$\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}}$的绝对值。如果引入在第五章中的minmod概念，则式(6-3-4 a)和(6-3-4 b)可写为

$$f^+_{j+\frac{1}{2},\ L}=f^+_j+\frac{1}{2}\,\mathrm{minmod}\left\{\Delta f^+_{j-\frac{1}{2}},\Delta f^+_{j+\frac{1}{2}}\right\}$$

（6-3-5）

$$f^-_{j+\frac{1}{2},\ R}=f^-_{j+1}-\frac{1}{2}\,\mathrm{minmod}\left\{\Delta f^-_{j+\frac{1}{2}},\Delta f^-_{j+\frac{3}{2}}\right\}$$

如此得到了最终的NND格式（6-3-3）和（6-3-5）。可以证明这一格式是TVD的。对时间导数项可以采用一阶精度的差分，或二阶精度的差分，也可采用龙克-库塔（Runge-Kutta）方法进行求解。

上面的讨论是针对模型方程（6-1-2）进行的。可很容易将这一方法推广来逼近气动方程。此时只要将量 u 以向量 $\vec{U}$ 代之，而量 f 和 $f^{\pm}$ 以流通向量及相应的分裂代之即可。

在NND格式的构造中利用中心型的差分 δ_x^0 和两点迎风差分 δ_x^b 和 δ_x^f。在文献〔10〕中利用对称的L-W格式和非对称的沃明和比姆迎风格式得到了另一种类型的NND格式。

第四节　MmB格式

在第五章讨论了TVD格式，指出，对单个守恒律方程其解随时间之推移不会出现新的极值点。在文献〔12〕中参照这一思想提出了MmB格式（Maximum and minimum Bounds Preserving）。现以一维标量守恒律方程进行讨论。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial x}=0,\quad g=g(u) \qquad (6\text{-}4\text{-}1)$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad c=c(u) \qquad (6\text{-}4\text{-}2)$$

这里 $c=g'_u$。参看图6-14，设在 t 时刻有一线段〔a，b〕，过 a 和 b 点作特征线分别交于 t_0 时刻的 c 和 d 点。设 $p(x, t)$ 为在〔a，b〕中间之任意一点，则有如下之不等式

$$\min_{x\in[c,\,d]} u(x,\ t_0)\leqslant \underset{x\in[a,\,b]}{u(x,\ t)}\leqslant \max_{x\in[c,\,d]} u(x,\ t_0) \qquad (6\text{-}4\text{-}3)$$

这是原微分方程所固有的特性，希望所构造之差分格式也能保持这种特性。

设离散化了的方程为

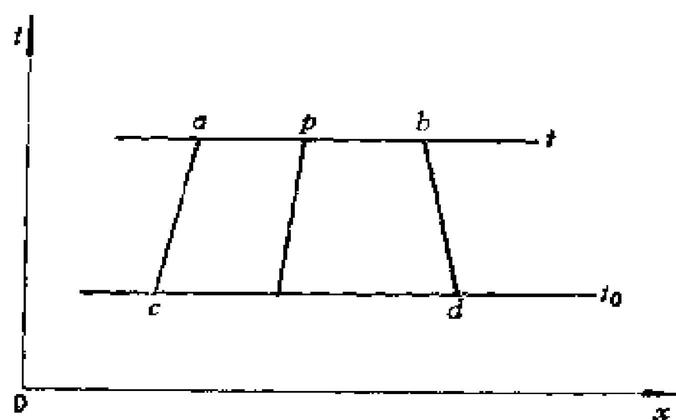


图6-14　MmB特性示意图

$$u_j^{n+1}=\sum_k \alpha_{j+k}^n u_{j+k}^n \tag{6-4-4}$$

这里右端是函数u^n在网格点上加权求和，由求和点所组成之线段，应当是包含原微分方程p点之依赖域的最少网格点所组成，如当$g_u'=c$不变号时由两个网点组成，当$g_u'=c$变号时由三个网点组成。后面将给出具体之格式。

很容易证明如下之关系式是与式（6-4-3）等价的。

$$\alpha_{j+k}^n \geqslant 0,\quad \sum_k \alpha_{j+k}^n=1 \tag{6-4-5}$$

应指出，这里α_{j+k}^n可能与未进入式（6-4-4）右端的值u_j^n有关。

一、一维MmB格式

设$\gamma=c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$，下面给出三个MmB格式。

（1）$u_j^{n+1}=u_j^n-\tilde{c}_{j-\frac{1}{2}}^n\delta_x^- u_j^n$　　(6-4-6)

$$0\leqslant\gamma\leqslant1,\quad 0\leqslant\tilde{c}_{j-\frac{1}{2}}\leqslant1$$

（2）$u_j^{n+1}=u_j^n+\tilde{d}_{j+\frac{1}{2}}^n\delta_x^+ u_j^n$　　(6-4-7)

$$-1\leqslant\gamma\leqslant0,\quad 0\leqslant\tilde{d}_{j+\frac{1}{2}}\leqslant1$$

（3）当ν改变符号时有

$$u_j^{n+1}=u_j^n-\tilde{c}_{j-\frac{1}{2}}^n\delta_x^- u_j^n+\tilde{d}_{j+\frac{1}{2}}^n\delta_x^+ u_j^n \qquad (6-4-8)$$

$$0\leqslant|\nu|\leqslant 1,\quad \tilde{c}_{j-\frac{1}{2}}^n\geqslant 0,\quad \tilde{d}_{j+\frac{1}{2}}^n\geqslant 0$$

$$0\leqslant\tilde{c}_{j-\frac{1}{2}}^n+\tilde{d}_{j+\frac{1}{2}}^n\leqslant 1$$

对应的TVD格式的条件为

$$\tilde{c}_{j-\frac{1}{2}}^n\geqslant 0,\quad \tilde{d}_{j+\frac{1}{2}}^n\geqslant 0$$

$$0\leqslant\tilde{c}_{j+\frac{1}{2}}^n+\tilde{d}_{j+\frac{1}{2}}^n\leqslant 1$$

因而MmB格式（6-4-6）和（6-4-7）是TVD．反之这种类型的TVD格式也是MmB格式。一般说来，式（6-4-8）类型的MmB格式可不是TVD．反之，这种类型的TVD格式不一定是MmB格式。

二、二维问题的MmB格式

现在来讨论二维标量方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad a>0,\ b>0 \qquad (6-4-9)$$

$$a=\text{常数},\quad b=\text{常数}$$

设

$$\nu=a\frac{\Delta t}{\Delta x},\quad \mu=b\frac{\Delta t}{\Delta y}$$

$$\nu+\mu\leqslant 1 \qquad (6-4-10)$$

则下面这一格式为MmB

$$u_{j,k}^{n+1}=u_{j,k}^n-\nu\delta_x u_{j,k}^n-\mu\delta_y u_{j,k}^n \qquad (6-4-11)$$

还可以证明，如果条件（6-4-10）得到满足，则下面这一格式也

是MmB

$$u^{n+1}_{j,k}=u^{n}_{j,k}-\nu\delta_x^- u^{n}_{j,k}-\mu\delta_y^- u^{n}_{j,k}$$
$$+\nu\mu(\delta_x^- u^{n}_{j,k}-\delta_x^- u_{j,k-1}) \qquad (6\text{-}4\text{-}12)$$

如果方程的系数 a 和 b 是常数，则可将式（6-4-12）看成是式（6-4-11）的分裂格式

$$\bar{u}_{j,k}=u^{n}_{j,k}-\nu\delta_x^- u^{n}_{j,k}$$
$$u^{n+1}_{j,k}=\bar{u}_{j,k}-\mu\delta_y^- \bar{u}_{j,k}$$

在文献〔14〕中指出，对标量二维守恒律方程任意守恒型TVD格式最多只能是一阶精度的。在文献〔12〕中指出，可以构造具有二阶逼近精度的二维MmB格式。

第五节　CSCM方法

该方法为通过一个变换序列来构造满足罗之U特性的矩阵，利用该矩阵的同族特征线而构造相应的迎风格式。边界上在这一方法中也利用了同族特征关系，对所构造的差分格式利用主对角占优势的DDADI方法进行求解。关于DDADI方法将在第七章中讨论。

一、满足罗的U特性矩阵的构造

在第四章中介绍了罗通过参变向量的方法所给出的平均矩阵。在这里将介绍另一种求这一平均矩阵的办法，即通过模仿气动参数微分变换关系来构造这一矩阵。

这里仍以一维欧拉方程(4-2-6)为例进行讨论。设$\vec{U}$为由守恒变量组成的向量(在第四章已有定义)，$\tilde{\vec{U}}$为非守恒变量，$\tilde{\tilde{\vec{U}}}$为特征变量。它们的微分表达形式为

$$\partial\vec{U}=\left|\begin{matrix}\partial\rho\\ \partial(\rho u)\\ \partial E\end{matrix}\right| \qquad \partial\tilde{\vec{U}}=\left|\begin{matrix}\partial\rho\\ \rho\partial u\\ \partial P\end{matrix}\right|$$

$$\partial\vec{\tilde{\tilde{U}}}=\begin{vmatrix}\partial\ln\dfrac{P^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho}\\ \dfrac{1}{c}\partial u+\partial\ln P^{\frac{1}{\gamma}}\\ -\dfrac{1}{c}\partial u+\partial\ln P^{\frac{1}{\gamma}}\end{vmatrix}\qquad(6\text{-}5\text{-}1)$$

式中

$$P=\frac{p}{\gamma-1}\qquad(6\text{-}5\text{-}2)$$

c 为声速。设M为将非守恒形式的微分关系转换为守恒形微分关系的转换矩阵，T为将特征形微分关系转换为非守恒形微分关系的转换矩阵，即

$$\partial\vec{U}=M\partial\vec{\tilde{U}},\quad \partial\vec{\tilde{U}}=T\partial\vec{\tilde{\tilde{U}}}\qquad(6\text{-}5\text{-}3)$$

以不同变量形式表达的微分方程为

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{f}}{\partial x}=0\qquad(6\text{-}5\text{-}4)$$

$$\frac{\partial\vec{\tilde{U}}}{\partial t}+A'\frac{\partial\vec{\tilde{U}}}{\partial x}=0\qquad(6\text{-}5\text{-}5)$$

$$\frac{\partial\vec{\tilde{\tilde{U}}}}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial\vec{\tilde{\tilde{U}}}}{\partial x}=0\qquad(6\text{-}5\text{-}6)$$

这里Λ为雅可比矩阵$D(\vec{f})/D(U)=A$的特征值组成的对角矩阵。各特征值分别为

$$\lambda_1=u,\quad \lambda_2=u+c,\quad \lambda_3=u-c$$

利用关系式（6-5-3)可得

$$\partial\vec{f}=A\partial\vec{U}=MT\Lambda T^{-1}M^{-1}\partial\vec{U}\qquad(6\text{-}5\text{-}7\text{a})$$

$$=MT\Lambda T^{-1}\partial\vec{\tilde{U}}=MA'\partial\vec{\tilde{U}}\qquad(6\text{-}5\text{-}7\text{b})$$

$$=MT\Lambda\partial\vec{\tilde{\tilde{U}}}\qquad(6\text{-}5\text{-}7\text{c})$$

各转换矩阵之间的关系为

$$A=MTAT^{-1}M^{-1}=MA'M^{-1}$$
$$A'=M^{-1}AM=TAT^{-1} \qquad (6-5-8)$$

CSCM方法的流通向量差分基础是一个离散形式的差分转换关系，它形式上模仿了微分关系的守恒形式与非守恒形式．非守恒形式与特征形式之间的转换。

设所考虑的区段为（j，$j+1$），仿照式（6-5-7 a），要求在这一区段上建立关系

$$\delta_x\vec{f}=\widetilde{A}\delta_x\vec{U} \qquad (6-5-9)$$

且$\widetilde{A}$满足罗的U特性。在文献[15 16]中定义

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{A}=\overline{M}\,\overline{T}\Lambda\overline{T}^{-1}\,\overline{M}^{-1}=\overline{M}\,\overline{T}\,\overline{D}\,\overline{T}^{-1}\,\widetilde{M}^{-1}\\&\overline{T}^{-1}\,\widetilde{M}^{-1}=\overline{\Lambda}\,T^{-1}\,\widetilde{M}^{-1}\end{aligned}\right\} \qquad (6-5-10)$$

$$\overline{A}'=\overline{T}\,D\overline{\Lambda}\,\overline{T}^{-1} \qquad (6-5-11)$$

$$\delta\tilde{\vec{U}}=\overline{M}^{-1}\delta\vec{U},\qquad \delta\tilde{\tilde{\vec{U}}}=\overline{T}^{-1}\delta\tilde{\vec{U}} \qquad (6-5-12)$$

式中之D为幺矩阵（或称单位矩阵），是为了后面进行符号分裂而引入的。矩阵上方之一横表示一种平均量。关于矩阵$\overline{M}$、$\overline{T}$以及他们的逆矩阵在下面将会给出。在利用$\overline{M}$、$\overline{M}^{-1}$、$\overline{T}$和$\overline{T}^{-1}$构成矩阵$\widetilde{A}$后则可给出如下之对应的差分方程：

$$\delta_t\vec{U}=-\widetilde{A}\delta_x\vec{U} \qquad (6-5-13)$$

利用关系式（6-5-10）、（6-5-12）和（6-5-13）可得到

$$\delta\tilde{\tilde{\vec{U}}}=-D\overline{T}^{-1}\,\widetilde{M}^{-1}\delta_x\vec{U} \qquad (6-5-14)$$

矩阵$\overline{M}^{-1}$、$\overline{M}$、$\overline{T}$、$\overline{T}^{-1}$和$\overline{\Lambda}$的具体表达形式为

$$\overline{M}^{-1}=\begin{bmatrix}1, & 0, & 0\\ -\bar{u}, & 1, & 0\\ \bar{u}^2-\dfrac{\overline{u^2}}{2}, & -\bar{u}, & 1\end{bmatrix}$$

$$\overline{M}=\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ \bar{u}, & 1, & 0 \\ \dfrac{\overline{u^2}}{2}, & \bar{u}, & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overline{T}=\begin{vmatrix} -\bar{\rho}, & \dfrac{\bar{\rho}}{2}, & \dfrac{\bar{\rho}}{2} \\ 0, & \dfrac{\bar{\rho}\bar{c}}{2}, & -\dfrac{\bar{\rho}\bar{c}}{2} \\ 0, & \dfrac{\overline{\gamma P}}{2}, & \dfrac{\overline{\gamma P}}{2} \end{vmatrix}$$

$$\overline{T}^{-1}=\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{\bar{\rho}}, & 0, & \dfrac{1}{\overline{\gamma P}} \\ 0, & \dfrac{1}{\bar{\rho}\bar{c}}, & \dfrac{1}{\overline{\gamma P}} \\ 0, & -\dfrac{1}{\bar{\rho}\bar{c}}, & \dfrac{1}{\overline{\gamma P}} \end{vmatrix}$$

$$\overline{\Lambda}=\begin{vmatrix} \bar{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\omega}+\bar{c} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\omega}-\bar{c} \end{vmatrix}$$

$\bar{c}$为平均声速。在矩阵元素中字符及其组合量上方之一横表示该相应量的算术平均值。应对一些细节加以注意，如$\bar{u}^2$表示平均量的平方，而$\overline{u^2}$表示平方以后量的平均。这里平均声速的定义为

$$\bar{c}=\sqrt{\frac{\overline{\gamma P}}{\bar{\rho}}} \tag{6-5-15}$$

$\overline{\Lambda}$矩阵中之$\overline{\omega}$可有不同的定义方法，例如

$$\overline{\omega}=\bar{u} \tag{6-5-16}$$

$$\overline{\omega}=\frac{\overline{\rho u}}{\bar{\rho}} \tag{6-5-17}$$

在上面只给出了一个求平均矩阵的方法，但并未验证等式

(6-5-13) 是否成立。在对其进行验证的时候需要利用第四章第五节中的关系式 (4-5-7)。可首先模仿式 (6-5-7 b) 建立并验证关系式

$$\delta_x \vec{f} = \overline{M} \left(\overline{A}' \delta_x \vec{\widetilde{U}} \right) \tag{6-5-18}$$

然后模仿式 (6-5-7 c) 建立并验证关系式

$$\overline{T}^{-1} \overline{A}' \delta_x \vec{\widetilde{U}} = \overline{\Lambda} \delta_x \vec{\widetilde{\widetilde{U}}} \tag{6-5-19}$$

通过验证可知，在式 (6-5-18) 和 (6-5-19) 中都有一个小量的误差。

二、CSCM格式的构造

CSCM (Conservative Supra Characteristics Method) 实际上是一种特殊形式的系数矩阵分裂方法。上面介绍了具有U特性矩阵的建立，现利用符号分裂的办法[17]来构造同族特征方程 (Supra (Akin)-Characteristic Eguation)[18]。定义

$$\boldsymbol{D}^{\pm} = \frac{|\boldsymbol{\Lambda}| \pm \boldsymbol{\Lambda}}{2|\boldsymbol{\Lambda}|} \tag{6-5-20}$$

这是一种形式上的写法。根据定义，$\boldsymbol{D}^{+}$为对角矩阵，对应于特征值λ_k为正的地方其元素为1，其余元素皆为零。$\boldsymbol{D}^{-}$同样为对角矩阵，在对应于特征值为负的位置上为1，其余为零。可把矩阵$\boldsymbol{D}$分裂为两阵和的形式

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{+} + \boldsymbol{D}^{-}$$

依此可得对应的分裂矩阵$\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\pm}$和分裂流通向量的差分

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\pm} = \widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{D}^{\pm}), \quad \widetilde{\boldsymbol{A}}^{+} + \widetilde{\boldsymbol{A}}^{-} = \widetilde{\boldsymbol{A}}$$

$$\delta_x \vec{f}^{\pm} = \widetilde{\boldsymbol{A}}^{\pm} \delta_x \vec{U}, \quad \delta_x \vec{f}^{+} + \delta_x \vec{f}^{-} = \delta_x \vec{f} \tag{6-5-21}$$

在第 j 个区段 (j, $j+1$) 可建立迎风差分格式

$$\boldsymbol{D}^{-} \delta_t \vec{\widetilde{\widetilde{U}}}_j = -(\boldsymbol{D}^{-} \overline{\boldsymbol{T}}^{-1} \overline{\boldsymbol{M}}^{-1} \delta_x^{+} \vec{U})_j = -(\overline{\boldsymbol{T}}^{-1} \overline{\boldsymbol{M}}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{A}}^{-} \delta_x^{+} \vec{U})_j$$

$$= -(\boldsymbol{D}^{-} \overline{\boldsymbol{\Lambda}} \delta_x^{+} \vec{\widetilde{\widetilde{U}}})_j \tag{6-5-22}$$

$$\boldsymbol{D}^{+}\delta_t\overset{\approx}{\tilde{U}}_{j-1}=-(\boldsymbol{D}^{+}\overline{\boldsymbol{T}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{M}}^{-1}\delta_x^{+}\vec{U})_j$$

$$=-(\overline{\boldsymbol{T}}^{-1}\overline{\boldsymbol{M}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{A}}^{+}\delta_x^{+}\vec{U})_j$$

$$=-(\boldsymbol{D}^{+}\overline{A}\,\delta_x^{+}\overset{\approx}{\tilde{U}})_j \tag{6-5-23}$$

注意到

$$\delta_x^{+}U_j=\delta_x^{-}U_{j+1}$$

希望得到关于守恒变量的差分关系式。利用式（6-5-22）、（6-5-23）及关系式$\delta\vec{U}=\overline{M}\overline{T}\,\delta\,\overset{\approx}{\tilde{U}}$可以得到对于守恒变量的差分关系式

$$(\overset{\approx}{\boldsymbol{A}}^{-}\delta_t\vec{U})_j=-(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{-}\delta_x^{+}\vec{U})_j$$

$$(\overset{\approx}{\boldsymbol{A}}^{+}\delta_t\vec{U})_{j+1}=-(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{+}\delta_x^{+}\vec{U})_j \tag{6-5-24}$$

这里

$$\overset{\approx}{\boldsymbol{A}}^{\pm}=\overline{\boldsymbol{M}}\overline{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}^{\pm}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1},\quad \overset{\approx}{\boldsymbol{A}}^{+}+\overset{\approx}{\boldsymbol{A}}^{-}=\boldsymbol{I}$$

式（6-5-24）中之右端和即为$\delta_x\vec{f}$。如此在区段（j，$j+1$）上建立了区段方程，即所谓同族特征方程。

在j点上之一阶差分方程由两个部分组成，其一为在第j区段上对应于负特征值的流通量差分，另一为在第$j-1$区段上对应于正特征值的流通量差分，即

$$\delta_t\vec{U}_j=-(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{+}\delta_x^{+}\vec{U})_{j-1}-(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{-}\delta_x^{+}\vec{U})_j \tag{6-5-25}$$

由于有了同族特征方程，很容易在边界$j=1$和$j=N$上得到边界方程

$$\overset{\approx}{\boldsymbol{A}}_1^{-}\delta\vec{U}_1=-(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{-}\delta_x^{+}\vec{U})_1 \tag{6-5-26}$$

$$\overset{\approx}{\boldsymbol{A}}_N^{+}\delta\vec{U}_N=-(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{+}\delta_x^{+}\vec{U})_{N-1} \tag{6-5-27}$$

在下游边界$j=N$上如果不是超声速流，即不是所有特征线都是指向边界，则对应的矩阵$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{N-1}^{+}$将是奇异的。此时需要补充边界条件。所需补充的边界条件的个数与由计算区外部指向下游边界之特征线个数相等。在入口边界$j=1$处有类似情况。

可用类似于上面的讨论方法构造隐式格式。对所得到的隐式格式需要进行线化处理。在区段（j，$j+1$）上$n+1$时间层上流通量差分可近似写成

$$\delta_x \vec{f}^{n+1} = \widetilde{\boldsymbol{A}}^{n+1}\delta_x \vec{U}^{n+1} \approx \widetilde{\boldsymbol{A}}^{n}\delta_x \vec{U}^{n+1}$$

$$= \widetilde{\boldsymbol{A}}^{n}\delta_x \vec{U}^{n} + \widetilde{\boldsymbol{A}}^{n}\delta_x(\delta_t \vec{U}) \qquad (6\text{-}5\text{-}28)$$

对$\widetilde{\boldsymbol{A}}^{n}$进行分裂即可得到对应于式（6-5-25）的隐式格式

$$(\boldsymbol{I} + \widetilde{\boldsymbol{A}}^{+}_{j-1}\delta_x^{-} + \widetilde{\boldsymbol{A}}^{-}_{j}\delta_x^{+})\delta_t \vec{U}_j = -(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{+}\delta_x^{-}\vec{U})_{j-1} - (\widetilde{\boldsymbol{A}}^{-}\delta_x^{+}\vec{U})_j$$

$$(6\text{-}5\text{-}29)$$

该式具有一阶逼近精度。空间具有二阶逼近精度的迎风格式为

$$(\boldsymbol{I} + \widetilde{\boldsymbol{A}}^{+}_{j-1}\delta_x^{-} + \widetilde{\boldsymbol{A}}^{-}_{j}\delta_x^{+})\delta_t \vec{U}_j$$

$$= -\frac{1}{2}[3(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{+}\delta_x^{-}\vec{U})_{j-1} - (\widetilde{\boldsymbol{A}}^{+}\delta_x^{-}\vec{U})_{j-2}]$$

$$-\frac{1}{2}[3(\widetilde{\boldsymbol{A}}^{-}\delta_x^{+}U)_j - (\widetilde{\boldsymbol{A}}^{-}\delta_x^{+}\vec{U})_{j+1}] \qquad (6\text{-}5\text{-}30)$$

应当注意，在上面的格式讨论中网格比 $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ 没有在方程中出现，这主要是为了便于讨论将其隐含在矩阵$\widetilde{A}$中去了。

可参照对一维问题的讨论构造逼近于多维问题的CSCM方法。对隐式方法最后都归结为对线性代数方程组的求解。郎巴德（Lambard）等人[18~21]是利用所谓DDADI方法进行求解的。有关求解方法将在第七章进行讨论。

三、特征边界处理

式（6-5-26）和（6-5-27）给出了在边界点上的差分关系式。为了便于讨论，将矩阵$\widetilde{\widetilde{A}}^{\pm}$的右上标略去，用更为一般的形式表示为

$$\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{A}}} = \overline{\boldsymbol{M}}\overline{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1} \qquad (6\text{-}5\text{-}31)$$

在左边界取$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{-}$，在右边界取$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{+}$。参照式（6-5-22）和

式（6-5-23）可得对应于D的第 i 个分量d_i的特征方程

$$\delta\tilde{\tilde{U}}_i=T_{i,k}^{-1}M_{k,l}^{-1}\delta U_l=-\overline{T}_{i,k}^{-1}M_{k,l}^{-1}\delta_x U_l$$

从式（6-5-22）和（6-5-23）中可以看到，d_i是乘到方程之左右两侧的。为使边界条件矩阵为非奇异的，需给附加边界条件

$$g_i(\vec{\tilde{\tilde{U}}},\ \vec{U})=0 \tag{6-5-32}$$

对其进行微分可得

$$\delta g_i=\left(\frac{\partial g_i}{\partial U_l}+\frac{\partial g_i}{\partial \tilde{U}_k}\frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial U_l}\right)\delta U_l \tag{6-5-33}$$

以式（6-5-33）之系数，即括号中的量来代替矩阵 $DT^{-1}M^{-1}$ 中由于$d_i=0$ 而消失的那一行。

加上了附加边界条件后的矩阵$\tilde{\tilde{A}}'$现在变为

$$\tilde{\tilde{A}}'=(\overline{M}\overline{T})(DT^{-1}M^{-1}+T'^{-1}M'^{-1})$$
$$=\tilde{\tilde{A}}+(\overline{M}\overline{T})(T'^{-1}M'^{-1}) \tag{6-5-34}$$

该式表明，为了考虑附加边界条件的作用，具体作法只需将矩阵$T'^{-1}M'^{-1}$ 左乘以矩阵 $\overline{M}\overline{T}$，并加到式（6-5-31）中去即可。其中$T'^{-1}M'^{-1}$的第 i 行为式（6-5-33）中的系数，而其余所有行的元素皆为零。

对很多可通过原始变量（非守恒变量）来表示的辅助边界条件，式（6-5-34）变得更为简单

$$g_i(\vec{\tilde{U}})=0 \tag{6-5-35}$$

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial \tilde{U}_k}\right)\cdot\left(\frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial U_l}\delta U_l\right)=0 \tag{6-5-36}$$

根据式（6-5-12）有

$$T_{i,k}^{-1}=\frac{\partial \tilde{\tilde{U}}_i}{\partial \tilde{U}_k},\qquad M_{k,l}^{-1}=\frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial U_l}$$

此时式（6-5-34）变成

$$\tilde{\tilde{A}}'=\overline{M}\,\overline{T}(DT^{-1}+T'^{-1})\,\overline{M}^{-1} \tag{6-5-37}$$

T'^{-1}为这样的矩阵，其第 i 行为由式（6-5-36）中之系数组成，而其余元素皆为零。式（6-5-37）表明，为了求得矩阵$\tilde{\tilde{A}}'$，需要将矩阵对应于d_i的那一行以边界条件（6-5-36）对应的系数来填充。

上面的讨论是针对显式格式而进行的。对隐式格式对应的两个边界点方程为

$$(\tilde{\tilde{A}}'_1 + \tilde{A}^-_1 \delta^+_x)\delta_t \vec{U}_1 = -(\tilde{A}^- \delta^+_x \vec{U})_1 \tag{6-5-38}$$

$$(\tilde{\tilde{A}}'_N + \tilde{A}^+_{N-1} \delta^-_x)\delta_t \vec{U}_N = -(\tilde{A}^+ \delta^+_x \vec{U})_{N-1} \tag{6-5-39}$$

现在给出两个辅助边界条件微分表达式的例子，一为对应于等熵条件，另一为对应于等焓条件。对等熵条件有关系式

$$S = \ln \frac{P^{\frac{1}{\gamma}}}{\rho} = 常数$$

$$\delta S = 0$$

$$-\frac{1}{\rho}\delta\rho + \frac{1}{\gamma P}\delta P = 0$$

对应的系数为

$$\left[-\frac{1}{\rho}, \quad 0, \quad \frac{1}{\gamma P}\right] \tag{6-5-40}$$

对等焓条件有关系式

$$H = \gamma \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} = 常数$$

$$\delta H = -\gamma \frac{P}{\rho^2}\delta\rho + u\delta u + \frac{\gamma}{\rho}\delta P = 0$$

对应的系数为

$$\left[-\frac{1}{\rho}, \quad \frac{u}{\gamma P}, \quad \frac{1}{P}\right] \tag{6-5-41}$$

对更复杂的辅助边界条件可参看文献[15]。

在引入辅助边界条件之差分表达式（6-5-33)和(6-5-36)时，只取了展开级数之一阶项，因而利用内点方程和边界点方程耦合

所求得之解将不会准确地满足方程（6-5-32）和（6-5-35）的。郎巴德、奥里格，杨和达里（Lombard，Oliger，Yang和Dary）等人给出了牛顿-拉夫森（Newton Raphson）修正方法。

设由边界点和内点方程耦合计算所得之量为$\vec{\tilde{\tilde{U}}}^{n+1}$，它并不准确满足辅助边界条件，取对$\vec{\tilde{\tilde{U}}}^{n+1}$以量$\delta\vec{\tilde{\tilde{U}}}$进行修正后之$\vec{\tilde{U}}^{n+1}$为最后所需之量，

$$\vec{\tilde{U}}^{n+1}=\vec{\tilde{\tilde{U}}}^{n+1}+\delta\vec{\tilde{\tilde{U}}} \tag{6-5-42}$$

考虑矩阵$\boldsymbol{T}^{-1}$中对应于$d_i\neq 0$的那一行，对应于这一行的特征变量应当是不变的，即

$$\delta\tilde{\tilde{U}}_i=\boldsymbol{T}_{i,k}^{-1}\delta\hat{\tilde{U}}_k \tag{6-5-43}$$

对应于$\tilde{\tilde{A}}$中$d_i=0$的那一行是由辅助边界条件$g(\vec{\tilde{U}})=0$所决定的，由此可得到方程

$$\delta\hat{g}_i=\boldsymbol{T}_{i,k}^{-1}\delta\tilde{U}_k=g_i(\vec{\tilde{U}}^n)-g_i(\vec{\tilde{\tilde{U}}}^{n+1}) \tag{6-5-44}$$

式（6-5-43）之右端为已知，代数方程（6-5-43）和（6-5-44）构成了牛顿-拉夫森迭代的基础。可用这种方法逐次减小辅助条件中的误差。

第六节　人工滤波技术

一、开关函数法

在第四章曾指出，具有一阶逼近精度的迎风格式在激波附近数值解受到抹平，而具有二阶逼近精度的格式在激波附近数值解中存在有非物理的振荡。一般说来，粘性项可使数值解在激波附近趋于平缓。格式中的这种粘性效应一种是格式本身所固有的，另一种可以人工加入。前者通常被称为差分粘性，后者被称为人

工粘性。

由于粘性可使数值解趋于平缓，因而人们长期在二阶精度的格式上加一人工粘性，使格式在光滑区具有二阶逼近精度，而在激波附近数值解又可得到适当抹平。关于引入人工粘性的方法是由冯·诺伊曼和里希特迈尔（1950）[22]提出的。长期来人们是采用这种方法来捕捉激波的。激波装配法要求将间断面分离开来做为内边界来进行处理[28]，在这一内边界上需利用跳跃关系式和相应的特征关系式。而激波捕捉法不要求将间断面分离开来，从而可使计算大为简化。近年来发展的TVD类型格式使对激波的捕捉能力大为提高。

尽管近年TVD类型格式发展很快，但人工粘性的方法仍被经常采用。长期来为改善激波附近数值解的行为，人们在方程中加入耗散项，即人工加入二阶或四阶导数项。通过第一节中对色散误差的分析笔者认为，人工加入色散项也将有助于改善数值解在激波附近的行为。此时需对色散项的附号加以控制。

由于二阶精度格式精度较高，而一阶精度格式数值解在激波附近没有振荡，这很自然的促使人们将这两种格式混合起来使用。设L_1为具有一阶逼近精度的差分算子，L_2为具有二阶逼近精度的算子，则所谓开关函数法即为构造一个新的算子$\boldsymbol{L}$，

$$\boldsymbol{L}=\theta \boldsymbol{L}_1+(1-\theta)\boldsymbol{L}_2,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1 \qquad (6\text{-}6\text{-}1)$$

使在光滑区$\theta\sim 0$，在激波附近$\theta\sim 1$。

二、人工滤波技术

这里所说的人工滤波法是通常之人工粘性方法的扩充，它既包含了通常的粘性平滑作用，也包含通过色散项的平滑。

在第四章曾给出了一类单步差分格式的表达式。一般格式可写成形式

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})(U^{n+1}-U^{n})=\boldsymbol{L}U^{*} \qquad (6\text{-}6\text{-}2)$$

如果取$\boldsymbol{B}=0$，则为显式法。

（一）同步滤波和后延滤波

在文献〔24〕中将平滑分为同步平滑（Co-Smoothing）和后延平滑（Post-Smoothing）两类。在那里只是通过人工引入耗散项（偶次导数项）来进行的。这里将其扩大到可引入色散项（奇次导数项）.

设 S 为滤波算子。所谓同步滤波即为

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})(\vec{U}_i^{n+1}-\vec{U}_i^n)=\boldsymbol{L}\vec{U}_i^n+\boldsymbol{S}\vec{U}_i^n \qquad (6\text{-}6\text{-}3)$$

所谓后延平滑即为

$$\vec{U}^*=[\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{L}]\vec{U}^n$$

$$\vec{U}^{n+1}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\vec{U}^* \qquad (6\text{-}6\text{-}4)$$

对二维问题，$\boldsymbol{S}$为由两个方向上的滤波算子组成。对二维问题也可以这样来进行滤波

$$\vec{U}^*=[\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{L}]\vec{U}^n$$

$$\vec{U}^{**}=[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}_x]\vec{U}^* \qquad (6\text{-}6\text{-}5)$$

$$\vec{U}^{n+1}=[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}_y]\vec{U}^{**}$$

在文献〔24〕中称这种平滑为后延分裂式平滑。

（二）耗散滤波与色散滤波

滤波技术从方式上分为同步和后延两种，从性质上可分为耗散滤波和色散滤波。这里以一维欧拉方程为例进行讨论。先引入二阶耗散滤波S_2和三阶色散滤波S_3，

$$\boldsymbol{S}_2(\vec{U}_i)=\varepsilon_2\Delta t|G_i|\Delta x\lambda\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2} \qquad (6\text{-}6\text{-}6)$$

$$\tilde{\boldsymbol{S}}_3(\vec{U}_i)=\varepsilon_3\Delta t\Delta x^2G_i\left[\frac{\partial^3\vec{f}^+}{\partial x^3}-\frac{\partial^3\vec{f}^-}{\partial x^3}\right]$$

$$=\varepsilon_3\Delta t\Delta x^2G_i\frac{\partial^3\tilde{\vec{f}}}{\partial x^3} \qquad (6\text{-}6\text{-}7)$$

其中

$$\lambda=|u|+c$$

$$\tilde{\vec{f}}=\vec{f}^+-\vec{f}^-$$

$\vec{f}^\pm$为分裂后的流通向量，G_i 为第二节中所定义的协调因子。

为了照顾到对三阶导数项差分逼近式的稳定性，当其系数为正时应采用后差，当其系数为负时应当采用前差。可将这种逼近

写成一般形式

$$\tilde{S}_3(\vec{U}_j)=\varepsilon_3\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[G_j\delta_x^0(\delta_x^2\vec{\tilde{f}}_j)-|G_j|\delta_x^2(\delta_x^2\vec{\tilde{f}}_j)\right]$$

此式当$G_j>0$为后差，$G_j<0$为前差。参照该式给出以下三种滤波函数：

$$S_2(\vec{U}_j)=\varepsilon_2\frac{\Delta t}{\Delta x}|G_j|\lambda\delta_x^2\vec{U}_j \qquad \varepsilon_2\geqslant 0 \qquad (6\text{-}6\text{-}8)$$

$$S_3(\vec{U}_j)=\varepsilon_3\frac{\Delta t}{\Delta x}G_j\delta_x^0(\delta_x^2\vec{\tilde{f}}_j) \qquad \varepsilon_3\geqslant 0 \qquad (6\text{-}6\text{-}9)$$

$$S_4(\vec{U}_j)=-\varepsilon_4\frac{\Delta t}{\Delta x}|G_j|\delta_x^2(\delta_x^2\vec{\tilde{f}}_j) \qquad \varepsilon_4\geqslant\varepsilon_3 \qquad (6\text{-}6\text{-}10)$$

这里要求$\varepsilon_4\geqslant\varepsilon_3$，目的在于使$S_4$中的部分用来照顾三阶差分项的稳定性，其余部分本身为耗散项，有利于滤波。

三、几个具体的滤波方法

冯·诺伊曼和里希特迈尔对欧拉方程引入的人工粘性项为

$$S_2(\vec{U})=\Delta t\rho(b_1\Delta x)^2 I\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\frac{\partial}{\partial x}u\right) \qquad (6\text{-}6\text{-}11)$$

其中b_1为常数，I为三阶的单位矩阵。

1961年鲁萨诺夫把一般形式的人工粘性项$\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\frac{\partial U}{\partial x}\right)$加入到方程（4-2-6)中去，此时之同步滤波算子$S_2$为

$$S_2(\vec{U}_j)=\frac{1}{2}\left(\alpha_{j+\frac{1}{2}}\delta_x^+\vec{U}_j^n-\alpha_{j-\frac{1}{2}}\delta_x^-\vec{U}_j^n\right) \qquad (6\text{-}6\text{-}12)$$

$$\alpha=\omega\frac{\Delta t}{\Delta x}(|u|+c)$$

$$\sigma\leqslant\omega\leqslant\frac{1}{\sigma}, \qquad \sigma=\max(|u|+c)\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

后来麦科马克引入的算子为[25~27]

$$S_2(\vec{U}_j)=\alpha_2\Delta t\Delta x^3\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\left(\frac{|u|+c}{4p}\right)\left|\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|\right]\frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\right\}_j$$

(6-6-13)

a_1为常数。

詹姆生在文献〔28〕中同时引入了二阶和四阶滤波

$$S_2(\vec{U}_j)=\delta_x^-[(\sigma_j+\sigma_{j+1})\varepsilon_j^2\delta_x^+\vec{U}_j] \quad (6-6-14)$$

$$S_4(\vec{U}_j)=-\delta_x^-[(\sigma_j+\sigma_{j+1})\varepsilon_j^4\delta_x^-\delta_x^-\delta_x^+\vec{U}_j] \quad (6-6-15)$$

$$\varepsilon_j^2=k_2\Delta t g(\gamma_{j+1},\ \gamma_j,\ \gamma_{j-1})$$

$$\varepsilon_j^4=\max\{0,\ k_4\Delta t-\varepsilon_j^2\}$$

$$\gamma_j=\frac{|\delta_x^2 p_j|}{p_{j+1}+2p_j+p_{j-1}},\quad \sigma=|u|+a$$

$$k_2=\frac{1}{4},\quad k_4=\frac{1}{100}$$

式中 g 为光滑函数。

在文献〔29〕中为构造耗散型格式给出了几种平滑修正的方法，其中之一为

$$S_2(U_j)=\frac{1}{2}\left[q_{j+\frac{1}{2}}\delta_x^+-q_{j-\frac{1}{2}}\delta_x^-\right]U_j$$

$$q_j=|\lambda_j|\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(1-|\lambda_j|\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$$

$$q_{j+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(q_j+q_{j+1})$$

λ 为绝对值最大的特征值。

参 考 文 献

1 张函信．差分计算中激波上、下游解出现波动的探讨．空气动力学学报，1984(1)．

2 Rusanov V V. On Difference Schemes of Third Order Accuracy for Nonlinear Hyperbolic Systems. J. Comp. Phys. 1970, 5: 507～516

3 Burstein S Z and Mirin A A. Third Order Difference Methods for Hyperbolic Equations. J. Comp. Phys. 1970, 5, 547～571

4 Warming R F Kutler P and Lomax H. Second and Third Order Noncentr Difference Schemes for Nonlinear Hyperbolic Equations. AIAA J. 1973, 11, 189～196

5 Leonard B P. A Stable and Accurate Convective Modeling Procedure

Based on Quadratic Upstream Interpolation. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1979, 19, 59~98

6 Rubin S G and Graves R A Jr. Viscous Flow Solutions with a Cubic Spline Approximation. Computers & Fluids, 1975, 3(1)

7 Ma Yanwen and Fu Dexun. Numerical Solutions of Compressible Flow with Compact Scheme. AIAA paper No. 87-1123

8 Fu Dexun and Ma Yanwen. On Efficiency and Accuracy of Numerical Methods for Solving the Aerodynamic Equations. A Collection of Technical Papers ISCFD Nagoya, 1989.

9 Zhang Hanxin and Zhuang Fenggan. NND Schemes and it's Application to Numerical Simulation of Two and Three Dimensional Flow. A Collection of Technical Papers ISCFD Nagoya, 1989

10 吴望一. 新型无波动无自由参数的二阶TVD差分格式. 全国第五届计算流体力学会议文集, 太平, 1990.

11 Boris J P and Book D L. J. computational Phys. 1973, 11(38)

12 Wu Huamo. New Accurate High Resolution TVD Schemes, Analysis and Applications. International Symposium on Computational Fluid Dynamics, Nagoya, 1989

13 Sod G A. A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Non Linear Hyperbolic Conservation Laws J. Comput. Phys. 1978. 27(1).

14 Goodman J B and Le veque R J. Math. Anal., 1985, 45(15)

15 Lombard C K, Oliger J, Yang J Y and Davy W C. Conservative Supra-Characteristics Method for Splitting the Hyperbolic Systems of Gasdynamics with Computed Boundaries for Real and Perfect Gases AIAA Paper No. 82-0973

16 Lombard C K, Bardina J and Venkatapathy E. Multi-Dimensional Formulation of CSCM An Upwind Flux Difference Engenvector Split Method for the Compressible Navier-Stokes Equations. AIAA 83-1895

17 Huang L C Pseudo-Unsteady Difference Scheme for Discontinuous Solutions of Steady State One-Dimensional Fluid Dynamics Equations. J. Comput Phys. 1981, 42, 195~211

18 Lombard, C. K., Venkatapathy, E and Bardina, J Universal Single Level Implicit Algorithm for Gasdynamics. AIAA 84~1533.

19 Bardina J and Lambard C K. Three Dimensional CSCM Method for the Compressible Navier-Stokes Equations with Application to a Multi-Nozzle Exhaust Flow Field. AIAA 85~1193.

20 Stookesherry D C and Tannehill J C. Computation of Separated Flow Using the Space-Marching Conservative Supra-Chasacteristics Method. AIAA J. 1987, 25(8).

21 Bardina J. and Lombard C K. Three Dimensional Hypersonic Flow Simulatons with the CSCM Implicit Upwind Navier-Stokes Method. AIAA 87～1114.

22 Von Neumann J and Richtmyer R. D. A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamical Shocks J. Appl Phys, 1950, 21; 232.

23 朱幼兰、钟锡昌、陈炳木等 初边值问题差分方法及绕流. 北京：科学出版社，1980.

24 Tong SS. The Impact of Smoothing Formulations on the Stability and Accuracy of Various time Marching Schemes. AIAA 87～1106.

25 MacCormack R W Numerical Solutions of the Interactions of a Shock wave with a Laminar Boundary Layer. Lecture Notes in Physics, Springer Verlag, New York, 1971, 8.

26 Hung C M and MacCormack R W. Numerical Solution of Supersonic Laminar Flow Over a Three-Dimensional Compression Corner. AIAA 77～694.

27 Hung C M and MacCormack R W. Numerical Solution of Three-Dimensional Shock-wave and Turbulent Boundary Layer Interaction. AIAA 78～161.

28 Jameson A, Schmidt W and Turkel E. Numevical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Method Using Runge-kutta Time Stepping Schemes. AIAA 81～1259.

29 李松波. 拟线性双曲型守恒律方程组的对称耗散格式. 中国空气动力研究与发展中心报告，1987.

30 Fu Dexun and Ma Yanwen. Diffusion Analogy and Shock Capturing for Solving the Aerodynamic Equations, Proceedings of 4 th International Symposium on Computational Fluid Dynamics. Davis, 1991.

31 Hirt C W. J. Comp. Phys. 1968, 2, 339.

32 Warming R F and Hyett B J. J. Comp. Phys. 1974, 14, 159～179.

33 Яненко Н Н and Шокин Ю И. ДАН СССР, Том 182, 1968.

34 Yee H C. Warming R F and Harten A. AIAA 83～1902.

35 Roe P L. ICASE Report No. 84～53.

36 Davis S F ICASE Report No. 84～20.

37 Sweby P K. SIAM J. Num. Anal., 1984, 21(5).

第七章　差分方程的求解

第一节　直 接 解 法

在第四章中讨论了一些差分逼近方法。对于显式格式，利用已知 n 时间层上的各物理量是很容易得 $n+1$ 层上的量。对隐式格式的求解要复杂得多。如何提高数值解的求解效率是气动计算中的一个重要课题。一般是通过网格的合理布局、合理的边界条件处理、有效的差分逼近方法以及有效的差分方程求解方法等来提高求解效率。应该指出，自适应网格方法对提高数值解的精度和求解效率都是有益的。

从第四章的讨论中可以看出，一般隐式法可以写为

{隐式部分}＝{显式部分}

麦科马克指出，现代一些隐式法可写为形式

{数值部分}$\delta_t U$＝{物理部分}

其中{物理部分}主要反映了物理量横向（空间方向)的变化规律，{数值部分}主要反映了物理量在纵向（时间方向）的变化趋势。当求解定常问题时，逼近精度将由{物理部分}所决定。当差分格式取定后，求解效率将依赖于{数值部分}的求解方法。

对隐式法最后都归结为求解一线性代数方程组

$$\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{b} \tag{7-1-1}$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 为常数矩阵，$\vec{x}$ 和 $\vec{b}$ 为向量。形式上最为简单的方法为克拉默（Cramer）法则。如果代数方程有 N 个未知数，则按克拉默法则求解所需之运算量大约为（$n+1$)!。罗奇（1972）指出[1]，如果有 26 个未知数，按克拉默方法在 CDC6600 机上需求解 10^{16} 年。

高斯（Gauss）消去法是在数值计算中有效的经常被采用的方法。通常为了减小误差的积累，可将式（7-1-1）中的未知数

进行重新排列，使得对应 A 矩阵之主对角元素占优势。此时的高斯消去法被称为主元消去法。关于高斯消去法可在一般教科书中找到，这里不做介绍。

利用差分方法来逼近微分方程时所得到的对应矩阵往往具有特殊性质，如远离主对角线的地方皆为零元素。针对这种特殊情况往往可以找到更为简单的直接求解方法。本节将介绍两种求解方法，一为标量追赶法，一为矩阵追赶法。

一、标量追赶法

对于单个标量方程通常三点隐式格式都归结为对如下之代数方程的求解

$$a_j f_{j-1} + b_j f_j + c_j f_{j+1} = d_j, \quad j = 1, 2, \cdots N \qquad (7\text{-}1\text{-}2)$$

$$f_0 = U_0, \quad f_{N+1} = U_1 \qquad (7\text{-}1\text{-}3)$$

这里两边之条件给定。设方程（7-1-2)的解满足如下之递推关系

$$f_j = X_j f_{j+1} + Y_j \qquad (7\text{-}1\text{-}4)$$

将式（7-1-2）中之 f_{j-1} 以式（7-1-4）代之，则可得到式(7-1-4)中的 X_j 和 Y_j 满足如下之递推关系

$$X_j = -\frac{c_j}{b_j + a_j X_{j-1}}, \qquad Y_j = \frac{d_j - a_j Y_{j-1}}{b_j + a_j X_{j-1}} \qquad (7\text{-}1\text{-}5)$$

由式（7-1-3）可知

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = U_1$$

可按式（7-1-5）沿 j 之增长方向求出所有的追赶系数 X_j 和 Y_j（$j = 1, 2, \cdots, N$)。此求解过程通常称为正追赶过程。当所有之系数 X_j 和 Y_j 求出以后，可利用已知的 f_{N+1} 和刚刚求出的 X_j 和 Y_j 按式（7-1-4）沿 j 的减小方向求出所有的 f_j。这一求解过程通常称为反追赶过程。

在利用追赶法时应注意追赶过程的稳定性，要求在求 X_j 和 Y_j 的正追赶过程中和在求 f_j 的反追赶过程中误差的积累有界。可以证明，如果式（7-1-2）中的系数满足条件

$$|b_j| \geq |a_j| + |c_j|, \quad j = 2, \cdots, N-1$$
$$|b_1| > |c_1|, \quad |b_N| > |a_N| \tag{7-1-6}$$

则追赶过程是稳定的，即这里要求主对角元素占优势。

上面介绍了在边界条件为式（7-1-3）的情况下利用追赶法求解式（7-1-2），也可以给另一种形式的边界条件，例如

$$f_0 = f_1, \quad f_{N+1} = f_N \tag{7-1-7}$$

此时 $X_0 = 1$，$Y_0 = 0$。根据式（7-1-4）可得关系

$$f_N = X_N f_{N+1} + Y_N \tag{7-1-8}$$

由式（7-1-7）和（7-1-8)利用在正追赶过程已求得的 X_N 和 Y_N 可得出

$$f_{N+1} = \frac{Y_N}{1 - X_N} \tag{7-1-9}$$

然后利用反追赶过程的公式（7-1-4）可求出所有的 f_i 来。

这里介绍的追赶法有时也称为托马斯（Thomas）算法。

二、交替方向法（ADI）

在实践中人们通常把多维问题的求解化为一系列类似一维问题的求解，在每个空间方向上利用追赶法进行求解。通常把这种交替地在不同方向上的追赶法称为交替方向追赶法（Alternating Direction Implicit）。有时人们把正反两个扫描过程也称为交替方向法（ADI）。现通过实例将 ADI 法做一简单介绍。设有方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{7-1-10}$$

该方程可通过下列差分方程组来逼近

$$\frac{u_{i,j}^{n+(1/2)} - u_{i,j}^{n}}{\frac{\Delta t}{2}} = \mu\left(\frac{\delta_x^2 u_{i,j}^{n+(1/2)}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_y^2 u_{i,j}^{n}}{\Delta y^2}\right) \tag{7-1-11}$$

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+(1/2)}}{\frac{\Delta t}{2}} = \mu\left(\frac{\delta_x^2 u_{i,j}^{n+(1/2)}}{\Delta x^2} + \frac{\delta_y^2 u_{i,j}^{n+1}}{\Delta y^2}\right) \tag{7-1-12}$$

利用已知的在 n 时间层上的 $u_{i,j}^n$ 及 x 方向两端的边界条件可由式(7-1-11)中利用 x 方向上的追赶法求出所有的 $u_{i,j}^{n+(1/2)}$ 来，然后利用 y 方向上之两端的条件可由式(7-1-12)中利用 y 方向上的追赶法求出所有的 $u_{i,j}^{n+1}$ 来。可以证明，逼近于式(7-1-10)的式(7-1-11)和(7-1-12)具有二阶逼近精度 $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$，且按时间方向的推进过程是无条件稳定的。

如果将上面介绍的方法简单地推广到三维问题的求解中去，则方法的截断误差为 $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2)$，但方法将不再是无条件稳定的，而是条件稳定的。道格拉斯和冈恩(Douglas 和 Gunn)[4] 在 1964 年给出了如下之求解三维问题绝对稳定的 ADI 方法

$$1.\quad u^{*}-u^{n}=\frac{\mu_x}{2}\,\delta_x^2(u^{*}+u^{n})+\mu_y\delta_y^2u^{n}+\mu_z\delta_z^2u^{n}$$

$$2.\quad u^{**}-u^{n}=\frac{\mu_x}{2}\,\delta_x^2(u^{*}+u^{n})+\frac{\mu_y}{2}\,\delta_y^2(u^{**}+u^{n})+\mu_z\delta_z^2u^{n}$$

$$3.\quad u^{n+1}-u^{n}=\frac{\mu_x}{2}\,\delta_x^2(u^{*}+u^{n})+\frac{\mu_y}{2}\,\delta_y^2(u^{**}+u^{n})+\frac{\mu_z}{2}\,\delta_z^2(u^{n+1}+u^{n}) \qquad (7\text{-}1\text{-}13)$$

式中

$$\mu_x=\mu\frac{\Delta t}{\Delta x^2},\quad \mu_y=\mu\frac{\Delta t}{\Delta y^2},\quad \mu_z=\mu\frac{\Delta t}{\Delta z^2}$$

三、矩阵追赶法

对气动方程组经差分化后常常可以得到如下之对应于三对角块矩阵的代数方程组

$$\boldsymbol{A}_j\vec{F}_{j-1}+\boldsymbol{B}_j\vec{F}_j+\boldsymbol{C}_j\vec{F}_{j+1}=\vec{D}_j,\quad j=1,\cdots,N \qquad (7\text{-}1\text{-}14)$$

$$\vec{F}_0=\vec{U}_0,\quad \vec{F}_{N+1}=\vec{U}_1$$

这里 $\boldsymbol{A}_j$，$\boldsymbol{B}_j$ 和 $\boldsymbol{C}_j$ 为矩阵，$\vec{F}_j$、$\vec{D}_j$ 和 $\vec{U}_k$ 为向量。重复前部分中的讨论可得到如下之递推求解过程

$$\boldsymbol{X}_j=-[\boldsymbol{B}_j+\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{X}_{j-1}]^{-1}\boldsymbol{C}_j$$

$$\vec{Y}_j = [B_j + A_j X_{j-1}]^{-1} [\vec{D}_j - A_j \vec{Y}_j] \qquad (7\text{-}1\text{-}15)$$

$$\vec{F}_j = X_j \vec{F}_{j+1} + \vec{Y}_j \qquad (7\text{-}1\text{-}16)$$

这里 X_j 为矩阵，$\vec{Y}_j$ 为向量。利用两端的边界条件沿 j 之增长方向可先求出所有的系数 X_j 和 $\vec{Y}_j$ 来，然后可依式（7-1-16）求出所有的 $\vec{F}_j$ 来。

第二节　近似因式分解法

在这一节中将给出两种近似因式分解法（Approximate Factorization），一种是简单的近似因式分解法，一种是利用雅可比系数矩阵分裂技术的近似因式分解法。同时还将指出，如果采用特殊形式的系数矩阵分裂法，则可使求解过程大为简化。还应指出的是，对三维问题进行近似因式分解时原稳定的格式可能变得不稳定了。

一、简单近似因式分解法

对最简单的二维隐式方法的求解将对应于五对角块矩阵的求逆，对三维问题的最简单隐式法将对应于七对角块矩阵的求逆。到目前为止还没有很好的方法来求解这类问题，现对这类多维问题的求解多采用 ADI 方法、近似因式分解法和迭代方法等。这些方法最后都导致一个简单的求解序列，然后对序列中的每项采用简单的方法进行求解。

在第四章中曾给出了一个对二维问题的一般差分逼近式（$r=0$ 情况）

$$(I + \alpha_1 \delta_x A_1 \cdot + \alpha_2 \delta_y A_2 \cdot) \delta_t \vec{U}^{n+1}_{i,j} = \Delta \vec{U}^n_{i,j} \qquad (7\text{-}2\text{-}1)$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \alpha_2 = \frac{\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta y}$$

式（7-2-1）右端项 $\Delta\vec{U}_{i,j}$ 为已知。沃明和比姆[5]给出了一个近似因式分解的方法。在该方法中以如下之式代替对式（7-2-1)的求解

$$(I+\alpha_1\delta_x A_1\cdot)(I+\alpha_2\delta_y A_2\cdot)\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\Delta\vec{U}_{i,j}^n \qquad (7-2-2)$$

可将此式改写成如下之求解序列

$$(I+\alpha_1\delta_x A_1\cdot)\delta_t\vec{U}_{i,j}^*=\Delta\vec{U}_{i,j}^n \qquad (7-2-3)$$

$$(I+\alpha_2\delta_y A_2\cdot)\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\delta_t\vec{U}_{i,j}^* \qquad (7-2-4)$$

现已将对二维问题（7-2-1）的求解化为对两个一维问题(7-2-3)和（7-2-4）的求解。

如果对差分算子 δ_x 和 δ_y 都采用中心差，则近似因式分解法将对应于五对角块矩阵的求逆化成了对应于式(7-2-3)和(7-2-4)的两个三对角块矩阵的求逆。可由式（7-2-3)中利用已知的右端项 $\Delta\vec{U}_{i,j}^n$ 对任意取定的 j 在所有 i 点上求出 $\delta_t\vec{U}_{i,j}^*$ 来。同样利用已求得的 $\delta\vec{U}^*$ 在 j 方向上求出所有的 $\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}$ 来。对式(7-2-3)和（7-2-4）可用普通的三对角块矩阵求逆方法来进行求解。如此将对二维问题的求解化成了类似于一维问题的求解序列，从而简化了求解过程。

现比较一下式（7-2-1）和（7-2-2），以考查近似因式分解方法带来的新的截断误差。将式（7-2-2）之左端展开可得

$$(I+\alpha_1\delta_x A_1\cdot+\alpha_2\delta_y A_2\cdot+\alpha_1\alpha_2\delta_x A_1\cdot\delta_y A_2\cdot)\delta_t U^{(n+1)}=\Delta\vec{U}_{i,j}^n \qquad (7-2-5)$$

对照式(7-2-1)和(7-2-5)可知，由近似因式分解而引入的误差为

$$\begin{aligned}&\alpha_1\alpha_2\delta_x\{A_1\delta_y[A_2\delta_t\vec{U}_{i,j}]\}\\&\approx\alpha_1\alpha_2\Delta t\Delta x\Delta y\ \frac{\partial}{\partial x}\left[A_1\frac{\partial}{\partial y}\left(A_2\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\right)\right]\\&=O(\Delta t\cdot\Delta x\cdot\Delta y)\end{aligned}$$

因而在时间步长不是很大的情况下近似因式分解法一般不会破坏原格式的逼近精度。

从形式上看，对三维问题也可采用类似的近似因式分解法。在对三维问题进行近似因式分解时应倍加小心。在本章第一节中

曾指出，对二维问题是绝对稳定的 ADI 方法简单地推广到三维问题中去所得到的算法将是条件稳定的。在采用近似因式分解法时也存在类似情况，原绝对稳定的三维隐式法经近似因式分解所得到的格式可能是条件稳定的，也可能是不稳定的。现通过模型方程对二维和三维问题的稳定性做一简单的分析。

（一）二维格式的稳定性分析

设有模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{7-2-6}$$

其中系数为常数。取对应的差分逼近式为

$$\left[1 + \frac{\beta}{2}(a_1\delta_x^0 + a_2\delta_y^0)\right]\delta_t u_{i,j}^{n+1} = -(a_1\delta_x^0 + a_2\delta_y^0)u_{i,j}^n \tag{7-2-7}$$

其中

$$a_1 = a\frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad a_2 = b\frac{\Delta t}{\Delta y}$$

式（7-2-7）中当取 $\beta = 2$ 时为欧拉时间向后差分格式，当取 $\beta =$ 1 时为时间中心差分格式。当取 $\beta \geqslant 1$ 时格式是绝对稳定的。对应于式（7-2-7）的普通近似因式分解格式为

$$\left[1 + \frac{\beta}{2}a_1\delta_x^0\right]\left[1 + \frac{\beta}{2}a_2\delta_y^0\right]\delta_t u_{i,j}^{n+1}$$
$$= -(a_1\delta_x^0 + a_2\delta_y^0)u_{i,j}^n \tag{7-2-8}$$

通过冯·诺伊曼稳定性分析，可知式（7-2-7）和（7-2-8）有着共同形式的放大因子

$$G = \frac{A + \left(\frac{\beta}{2} - 1\right)(a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2)i}{A + \frac{\beta}{2}(a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2)i} \tag{7-2-9}$$

对于式（7-2-7）

$$A = 1$$

对于式（7-2-8）

$$A = 1 - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 a_1 a_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2$$

不难看出，当$\beta \geqslant 1$时格式（7-2-7）和（7-2-8）对任意步长比都是稳定的。

（二）三维格式的稳定性分析

设有模型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad (7\text{-}2\text{-}10)$$

式中之系数a、b和c皆为常数。为了书写简便起见做如下定义

$$a_1=a\frac{\Delta t}{\Delta x},\quad a_2=b\frac{\Delta t}{\Delta y},\quad a_3=c\frac{\Delta t}{\Delta z}$$

$$B=a_1\sin\alpha_1+a_2\sin\alpha_2+a_3\sin\alpha_3 \qquad (7\text{-}2\text{-}11)$$

$$C=a_1a_2a_3\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3$$

对应于式（7-2-7）的隐式格式为

$$\left[1+\frac{\beta}{2}(a_1\delta_x^0+a_2\delta_y^0+a_3\delta_z^0)\right]\delta_t u_{i,j,k}^{n+1}$$

$$=-(a_1\delta_x^0+a_2\delta_y^0+a_3\delta_z^0)u_{i,j,k}^n \qquad (7\text{-}2\text{-}12)$$

该格式的放大因子为

$$G=\frac{1+\left(\frac{\beta}{2}-1\right)B_i}{1+\frac{\beta}{2}B_i} \qquad (7\text{-}2\text{-}13)$$

由此式可知，当$\beta \geqslant 1$时格式对任意步长比都是稳定的。

对应于式（7-2-12）的普通近似因式分解格式为

$$\left[1+\frac{\beta}{2}a_1\delta_x^0\right]\left[1+\frac{\beta}{2}a_2\delta_y^0\right]\left[1+\frac{\beta}{2}a_3\delta_z^0\right]\delta_t u_{i,j,k}^{n+1}$$

$$=-(a_1\delta_x^0+a_2\delta_y^0+a_3\delta_z^0)u_{i,j,k}^n \qquad (7\text{-}2\text{-}14)$$

这一近似因式分解格式的放大因子为

$$G=\frac{A+\left[\left(\frac{\beta}{2}-1\right)B-\left(\frac{\beta}{2}\right)^3C\right]i}{A+\left[\frac{\beta}{2}B-\left(\frac{\beta}{2}\right)^3C\right]i} \qquad (7\text{-}2\text{-}15)$$

式中的A、B和C为实数，B和C由式（7-2-11）所定义。现分

别来讨论 $\beta=1$ 和 $\beta=2$ 时，式（7-2-14）的稳定性。

当 $\beta=1$ 时为使格式稳定，要求 $|G|\leqslant 1$，由此可由式（7-2-15）中得出不等式

$$BC\leqslant 0$$

然而这一条件是难以得到满足的。例如，由式（7-2-11）中可知，当 $a>0$，$b>0$，$c>0$ 和 $0<\alpha_k<\pi$ 时 B 和 C 总是正的。由此可知，原稳定的时间中心型（$\beta=1$）差分格式经近似因式分解后所得到的格式是不稳定的。

当 $\beta=2$ 时由式（7-2-15）可知，稳定性要求满足条件

$$2BC\leqslant B^2$$

根据 B 和 C 的定义由式（7-2-11）可知，通过适当选取的步长比，这一不等式是可以得到满足的。由此得出，原绝对稳定的时间两点向后欧拉格式经近似因式分解后变成条件稳定的了。

上面对普通近似因式分解法进行了讨论。利用近似因式分解法可以简化求解过程，减少计算工作量。在将近似因式分解法推广到三维问题的计算时应倍加小心，原稳定的三维格式经近似因式分解后可能是条件稳定的，也可能变为不稳定的。

二、利用系数矩阵分裂技术的近似因式分解法

上面讨论了普通的近似因式分解法。应当指出，普通的按维数进行近似因式分解不能保证主对角元素占优势，这将可能引起误差的积累。利用雅可比系数矩阵分裂技术可使这一缺点得到克服。这里将讨论一维问题的近似因式分解法和两种多维问题的近似因式分解法。

（一）一维问题的近似因式分解

在第四章中的式（4-7-12）可用下面的近似因式分解法来逼近（$\gamma=0$ 情况）：

$$[\boldsymbol{I}+\tilde{\alpha}\delta_x^- \boldsymbol{A}^+\cdot][\boldsymbol{I}+\tilde{\alpha}\delta_x^+ \boldsymbol{A}^-\cdot]\delta_t\vec{U}_i^{n+1}=\Delta\vec{U}_i^n \qquad (7\text{-}2\text{-}16)$$

其中右端可采用不同的方法来逼近，对矩阵 $\mathbf{A}$ 也可以采用不同的分裂技术。对照式（4-7-12）和（7-2-16）可知，由于近似因

式分解而引入的新的截断误差为

$$\alpha_1^2\delta_x^-[\boldsymbol{A}^+\delta_x^+(\boldsymbol{A}^-\delta_t\vec{U}_j^{n+1})]$$

在一般情况下所引入的新的截断误差的量级为$O[\Delta t\Delta x^2]$。当$\boldsymbol{A}$为常数矩阵，且利用第四章第二节中的第（2）种分裂时，由$\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}^-=0$可知，近似因式分解式（7-2-16）不引入任何新的截断误差。式（7-2-16）可改写成等价的求解序列

$$[\boldsymbol{I}+\tilde{\alpha}\boldsymbol{A}_j^+\cdot]\delta_t\vec{U}_j^*=\Delta\vec{U}_j^n+\tilde{\alpha}\boldsymbol{A}_{j-1}^+\delta_t\vec{U}_{j-1}^*=\vec{G}_1 \quad (7\text{-}2\text{-}17)$$

$$[\boldsymbol{I}-\tilde{\alpha}\boldsymbol{A}_j^-\cdot]\delta_t\vec{U}^{n+1}=\delta_t\vec{U}_j^*-\tilde{\alpha}\boldsymbol{A}_{j+1}^-\delta_t\vec{U}_{j+1}^{n+1}=\vec{G}_2 \quad (7\text{-}2\text{-}18)$$

式（7-2-17）的求解对应于下二对角块矩阵的求逆，可很容易地按j之增长方向求出$\delta_t\vec{U}_j^*$来。式（7-2-18）对应于上二对角块矩阵的求逆，可沿j之递减方向求出$\delta_t\vec{U}_j^{n+1}$来。

由于矩阵$\boldsymbol{A}^\pm$的特殊构造，使得方程（7-2-17）和(7-2-18)左端的系数矩阵是很容易求逆的，如对式（7-2-17）其解可写为

$$\delta_t\vec{U}_j^*=\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{I}+\tilde{\alpha}\boldsymbol{A}^+)^{-1}\boldsymbol{S}\vec{G}^*$$

（二）二维问题的近似因式分解法

上面讨论的近似因式分解法很容易推广到对二维问题的求解中去。利用雅可比系数矩阵分裂技术逼近于二维问题的较为一般的差分表达式为

$$[\boldsymbol{I}+\alpha_1(\delta_x^-\boldsymbol{A}_1^+\cdot+\delta_x^+\boldsymbol{A}_1^-\cdot)+\alpha_2(\delta_y^-\boldsymbol{A}_2^+\cdot+\delta_y^+\boldsymbol{A}_2^-\cdot)]\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\Delta\vec{U}_{i,j}^n \quad (7\text{-}2\text{-}19)$$

现介绍两种对式（7-2-19）的近似因式分解法。

第一种方法为利用$\boldsymbol{A}_k^+$和$\boldsymbol{A}_k^-$将式（7-2-19）近似地化为两个因子连乘的形式，即

$$[\boldsymbol{I}+\alpha_1\delta_x^-\boldsymbol{A}_1^+\cdot+\alpha_2\delta_y^-\boldsymbol{A}_2^+\cdot][\boldsymbol{I}+\alpha_1\delta_x^+\boldsymbol{A}_1^-\cdot+\alpha_2\delta_y^+\boldsymbol{A}_2^-\cdot]\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\Delta\vec{U}_{i,j}^n \quad (7\text{-}2\text{-}20)$$

此式可改写成如下之求解序列

$$[\boldsymbol{I}+\alpha_1\boldsymbol{A}_1^++\alpha_2\boldsymbol{A}_2^+]_{i,j}\delta_t\vec{U}_{i,j}^*=\Delta\vec{U}_{i,j}^n+\alpha_1(\boldsymbol{A}_1^+\delta_t\vec{U}^*)_{i-1,j}+\alpha_2(\boldsymbol{A}_2^+\delta_t\vec{U}^*)_{i,j-1} \quad (7\text{-}2\text{-}21)$$

$$[\boldsymbol{I}-\alpha_1\boldsymbol{A}_1^--\alpha_2\boldsymbol{A}_2^-]_{i,j}\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\delta_t\vec{U}_{i,j}^*-\alpha_1(\boldsymbol{A}_1^-\delta_t\vec{U}^{n+1})_{i+1,j}-\alpha_2(\boldsymbol{A}_2^-\delta_t\vec{U}^{n+1})_{i,j+1} \quad (7\text{-}2\text{-}22)$$

式（7-2-21）可很容易地自左下方（$i\uparrow$，$j\uparrow$）向右上方进行求解，式（7-2-22）可由右上方至左下方（$i\downarrow$，$j\downarrow$）进行求解。在每一个网格点上对它们的求解只需进行一个对四阶矩阵的求逆。由于系数矩阵分裂技术的采用保证了主对角元素的优势地位。这种近似因式分解法原则上不破坏原格式的逼近精度，简化了求解过程，且在求解过程中误差不会急骤积累。该方法可很容易推广到对三维问题的求解中去。

对式（7-2-19）还可以采用另一种形式的近似因式分解，即四个因子连乘的形式

$$[\boldsymbol{I}+\alpha_1\delta_x^-\boldsymbol{A}_1^+\cdot][\boldsymbol{I}+\alpha\delta_x^+\boldsymbol{A}_1^-\cdot][\boldsymbol{I}+\alpha_2\delta_y^-\boldsymbol{A}_2^+\cdot][\boldsymbol{I}+\alpha_2\delta_y^-\boldsymbol{A}_2^-\cdot]$$
$$\times\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\Delta\vec{U}_{i,j}^n \qquad (7\text{-}2\text{-}23)$$

这种近似因式分解可很容易推广到对三维问题的求解中去。

三、利用特殊系数矩阵分裂法的近似因式分解法

在上一部分中介绍了近似因式分解法，并可看到，利用雅可比系数矩阵分裂技术有助于改善对代数方程的求解。一般说来，采用第四章第二节介绍的第（2）种分裂方法为佳，此时是考虑到物理上信息的传播方向而进行分裂的，因而差分方程应能更好地反映物理特性。其他的系数矩阵分裂形式不是完全按物理特性进行分裂的，但往往可以使求解过程进一步简化。

现将式（7-2-17）和（7-2-18）改写成如下形式

$$[\boldsymbol{I}+\tilde{\alpha}_1\boldsymbol{A}_j^+]\delta_t\vec{U}_j^*=\vec{G}_1 \qquad (7\text{-}2\text{-}24)$$

$$[\boldsymbol{I}-\tilde{\alpha}_1\boldsymbol{A}_j^-]\delta_t\vec{U}_j^{n+1}=\vec{G}_2 \qquad (7\text{-}2\text{-}25)$$

在沿着 j 之增长方向求解式（7-2-24）时 $\vec{G}_1$ 为已知，随 j 之减小方向求解式（7-2-25）时 $\vec{G}_2$ 为已知。它们的解为

$$\delta_t\vec{U}_j^*=\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{I}+\tilde{\alpha}_1\boldsymbol{\Lambda}^+)^{-1}\boldsymbol{S}\vec{G}_1 \qquad (7\text{-}2\text{-}26)$$

$$\delta_t\vec{U}_j^{n+1}=\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{I}-\tilde{\alpha}_1\boldsymbol{\Lambda}^-)^{-1}\boldsymbol{S}\vec{G}_2 \qquad (7\text{-}2\text{-}27)$$

由于 $\boldsymbol{\Lambda}^\pm$ 为由 $\lambda_k^\pm$ 组成的对角矩阵，$\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{S}^{-1}$ 矩阵的元素已知，因而式（7-2-26）、（7-2-27）的解是很容易求出的。这里不再需要矩阵的数值求逆，而只需简单的矩阵运算。

本书作者在文献〔7〕中利用第四章第二节中的第（3）种矩阵分裂法使得计算工作量得到了进一步的减少。在采用第（3）种分裂形式时有关系式

$$[I+\alpha_1 A^+]^{-1}=[(1+\alpha_1 u^+)I+\alpha_1 c I_3]^{-1}$$

$$[I+\alpha_1 A^+]^{-1}=\frac{1}{1+\alpha_1 u^+}\left[I-\frac{\alpha_1 c}{1+\alpha_1(c+u^+)}I_3\right] \quad (7\text{-}2\text{-}28)$$

$$[I-\alpha_1 A^-]^{-1}=\frac{1}{1-\alpha_1 u^-}\left[I-\frac{\alpha_1 c}{1+\alpha_1(c-u^-)}I_2\right] \quad (7\text{-}2\text{-}29)$$

其中

$$I_2=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{vmatrix} \qquad I_3=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}$$

上两式中的 $u^\pm=(u\pm|u|)/2$，c 为无量纲化后的声速。此时之差分方程（7-2-26）和（7-2-27）可分别写成如下之形式

$$\delta_t\vec{U}_i^*=\frac{1}{1+\alpha_1 u^+}\left\{\vec{G}_1-\frac{\alpha_1 c\eta_3}{1+\alpha_1(c+u^+)}\begin{vmatrix}(S^{-1})_{1,3}\\(S^{-1})_{2,3}\\(S^{-1})_{3,3}\end{vmatrix}\right\}_i \quad (7\text{-}2\text{-}30)$$

$$\delta_t\vec{U}_i^{n+1}=\frac{1}{1-\alpha_1 u^-}\left\{\vec{G}_2-\frac{\alpha_1 c\eta_2}{1+\alpha_1(c-u^-)}\begin{bmatrix}(S^{-1})_{1,2}\\(S^{-1})_{2,2}\\(S^{-1})_{3,2}\end{bmatrix}\right\}_i \quad (7\text{-}2\text{-}31)$$

式中

$$\eta_i=\sum_k(S)_{i,k}X_k \qquad i=2,\ 3$$

对式（7-2-30） $\vec{X}=\vec{G}_1$

对式（7-2-31） $\vec{X}=\vec{G}_2$

X_k 为向量 $\vec{X}$ 的分量，$(S)_{i,j}$ 和 $(S^{-1})_{i,j}$ 分别为矩阵 S 和 S^{-1} 的元素。

从上面的讨论中可以看出，选用第四章第二节中的第（3）种分裂技术使得在计算过程中不仅消除了大量的矩阵数值求逆，也基本消除了大量的矩阵运算。此时方法有着隐式法时间步长不受限制和显式法计算量小的双重优点。

这种方法可很容易推广到二维和三维问题中去。

四、DDADI 求解法

郎巴德，巴戴拉和文卡泰帕特（Lombard，Bardina 和 Venkatapathy）等人在文献[8]中利用 DDADI 方法成功地求解了一系列流体力学问题。所谓 DDADI 即为主对角元素占优势的交替方向法（Diagonal Dominant Alternating Direction Implicit）。实际上利用雅可比系数矩阵分裂技术所得到的格式多为主对角元素占优势的。这里所说的 DDADI 方法是特指郎巴德等人所发展的方法。

DDADI 方法是郎巴德等人针对 CSCM 方法构造的一种近似因式分解法。

（一）一维 DDADI 方法

在第六章构造了如下之 CSCM 方法：

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{+}\delta_x^{-}+\boldsymbol{A}^{-}\delta_x^{+})\delta_t\vec{U}_j=-\boldsymbol{A}^{+}\delta_x^{-}\vec{U}_j-\boldsymbol{A}^{-}\delta_x^{+}\vec{U}_j=\mathrm{RHS} \tag{7-2-32}$$

这里 $\boldsymbol{A}^{\pm}$ 是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分裂而得，而矩阵 A 不是雅可比系数矩阵，而是一种满足罗的 U 特性的平均意义下的矩阵。在式（7-2-32）中将步长比 $\Delta t/\Delta x$ 也都隐含到矩阵 $\boldsymbol{A}^{\pm}$ 中去了。在算子 δ_x^{-} 之前的矩阵 $\boldsymbol{A}^{+}$ 是（$j-1$，j）两点间的某种平均，δ_x^{+} 前之 $\boldsymbol{A}^{-}$ 是（j，$j+1$）两点间的某种平均。现定义

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{+}-\boldsymbol{A}^{-} \tag{7-2-33}$$

可将式（7-2-32）近似地改写为如下之形式

$$[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{-}+\boldsymbol{A}^{+}\delta_x^{-}]\boldsymbol{D}^{-1}[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{+}+\boldsymbol{A}^{-}\delta_x^{+}]\delta_t\vec{U}=\mathrm{RHS} \tag{7-2-34}$$

或将其改写成如下之求解序列

$$D\delta_t\vec{U}_j^* = \text{RHS} + A^+\delta_t\vec{U}_{j-1}^* \qquad (7\text{-}2\text{-}35)$$

$$D\delta_t\vec{U}_j = D\delta_t\vec{U}_j^* - A^-\delta_t\vec{U}_{j+1} \qquad (7\text{-}2\text{-}36)$$

$$\vec{U}^{n+1} = \vec{U}^n + \delta_t\vec{U} \qquad (7\text{-}2\text{-}37)$$

将式（7-2-32）之两端经过整理可写为如下形式

$$D\delta_t\vec{U}_j = \underbrace{\text{RHS} + A^+\delta_t\vec{U}_{j-1}}_{D\delta_t\vec{U}_j^*} - A^-\delta_t\vec{U}_{j+1} \qquad (7\text{-}2\text{-}38)$$

对照式（7-2-35）和（7-2-38）可以看出，随 j 之增长求解式（7-2-38）时 $A^+\delta_t\vec{U}_{j-1}$ 项为已求得量，而 $A^-\delta_t\vec{U}_{j+1}$ 为未知量。式（7-2-35）意味着在按 j 之增长求解式(7-2-38)时，将刚刚求得之 $\delta_t\vec{U}_{j-1}$ 立即代入式（7-2-38）中去，而未知的 $\delta_t\vec{U}_{j+1}$ 则以零代之。对照式（7-2-36）和式（7-2-38）可知，在负向之求解过程中意味着新求得的 $\delta_t\vec{U}_{j+1}$ 立即用于式(7-2-38)中，而未知的 $\delta_t\vec{U}_{j-1}$ 以正向扫描时求解的 $\delta_t\vec{U}_{j-1}^*$ 代之。

现将利用普通系数矩阵分裂的近似因式分解法和 DDADI 方法做一比较。如果将式（7-2-17）和式（7-2-18）中出现的系数隐含到 $A^\pm$ 中去，并与式（7-2-35）和式（7-2-36）进行比较可以看出，DDADI 方法更加突出了主对角元素的优势地位。

现对两种近似因式分解法的形式逼近精度做一简单分析。将式（7-2-34）之左端写成展开形式，取其主导项与式（7-2-32）进行比较，可得到主对角元素之差为

$$[O,\ -A^+D^{-1}A^-,\ O]$$

如果将比姆和沃明之近似因式分解式与式（7-2-32）进行比较，则可得二者之差的主导项为

$$[A^+A^-,\ -2A^-A^-,\ A^+A^-]$$

不难看出，DDADI 方法引入的截断误差的主导项为

$$A^+D^-A^-\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}$$

而比姆和沃明方法所引入的截断误差之主导项为

$$\Delta x^2A^+A^-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\right)$$

严格地说，在一般情况下 DDADI 方法不逼近于原非定常偏微分方程，而比姆利沃明的方法是逼近于原非定常偏微分方程的。这两种方法都可以做为求解定常问题的迭代法。郎巴德等人在文献〔9〕中利用 CSCM 方法计算喷管问题，计算表明 DDADI 方法有着很快的收敛速度。

（二）二维问题的 DDADI 方法

关于二维和三维问题的 DDADI 方法可参阅文献〔9～11〕。设二维问题的逼近方程为

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{L})\delta_t\vec{U}=-\boldsymbol{L}\vec{U} \tag{7-2-39}$$

其中

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2$$

$$\boldsymbol{L}_1=\boldsymbol{A}_1^+\delta_x^-+\boldsymbol{A}_1^-\delta_x^+$$

$$\boldsymbol{L}_2=\boldsymbol{A}_2^+\delta_y^-+\boldsymbol{A}_2^-\delta_y^+$$

$$|\boldsymbol{A}_k|=\boldsymbol{A}_k^+-\boldsymbol{A}_k^-$$

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}+|\boldsymbol{A}_1|+|\boldsymbol{A}_2|$$

对应于式（7-2-39）的 DDADI 方法为

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}_1-|\boldsymbol{A}_1|)\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}_2-|\boldsymbol{A}_2|)\delta_t\vec{U}=-\boldsymbol{L}\vec{U} \tag{7-2-40}$$

或写成求解序列形式

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}_1-|\boldsymbol{A}_1|)\delta_t\vec{U}^*=-\boldsymbol{L}\vec{U} \tag{7-2-41}$$

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}_2-|\boldsymbol{A}_2|)\delta_t\vec{U}^{n+1}=\boldsymbol{D}\delta_t\vec{U}^* \tag{7-2-42}$$

$$\vec{U}^{n+1}=\vec{U}^n+\delta_t\vec{U}^{n+1} \tag{7-2-43}$$

（三）三维问题的 DDADI 方法

对三维问题[11]设式（7-2-39）中的 $\boldsymbol{L}$ 为

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_1+\boldsymbol{L}_2+\boldsymbol{L}_3$$

关于 $\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 的定义同二维情况，$\boldsymbol{L}_3$ 和 $\boldsymbol{D}$ 定义为

$$\boldsymbol{L}_3=\boldsymbol{A}_3^+\delta_z^-+\boldsymbol{A}_3^-\delta_z^+$$

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}+|\boldsymbol{A}_1|+|\boldsymbol{A}_2|+|\boldsymbol{A}_3|$$

在文献〔11〕中给出的求解方法为

$$(\boldsymbol{I}+|\boldsymbol{A}_1|+\boldsymbol{L}_2+\boldsymbol{L}_3)\delta_t\vec{U}^{n+1}=-\boldsymbol{L}^{n,n+1}\vec{U} \tag{7-2-44}$$

或写成求解序列形式

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}_2-|\boldsymbol{A}_2|)\delta_t\vec{U}^*=-\boldsymbol{L}^{n,n+1}\vec{U} \tag{7-2-45}$$

$$(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L}_3-|\boldsymbol{A}_3|)\delta_t\vec{U}^{n+1}=-\boldsymbol{D}\delta_t\vec{U}^{*}\qquad(7\text{-}2\text{-}46)$$

算子 $\boldsymbol{L}^{n,n+1}$ 表示在按 x 的正反两个求解过程中将已经求得的量立即代入算子 $\boldsymbol{L}$ 中去。

第三节 迭代方法

在本章第一节中讨论了直接解法。对一维问题，数值计算在很多情况下对差分逼近方程的求解最后都导致为三对角块矩阵求逆。对多维问题的计算极为复杂。在本章第二节中介绍的近似因式分解法可以简化求解过程和节省计算工作量，因而这一方法在实践中得到了广泛的应用。在对差分逼近式进行近似因式分解时人为地引入了新的截断误差。一般说来，这一新引入的截断误差不会改变原差分格式的形式逼近精度，因而对求解非定常问题这是一个很可取的方法。人们常常采用时间关系法求解定常问题，希望时间步长尽可能地放大以达到更快地收敛到定常解的目的。近似因式分解法虽然简单，但由于引入了新的误差而限制了时间步长的放大[12]。采用迭代方法克服了这一不足。

本节中将主要介绍几个迭代方法，如高斯-塞德尔（Gauss-Seidel）迭代法、线高斯-塞德尔迭代法、嵌套式迭代法、推进迭代法等。

一、高斯-塞德尔迭代法

高斯-塞德尔迭代法是一个比较简单而行之有效的方法，这一方法在实际计算中被广泛应用。在第四章中讨论气动方程的差分逼近时可以看到，在用隐式方法逼近微分方程时最后都导至对如下之线性代数方程的求解：

$$\boldsymbol{M}\vec{x}=\vec{f}\qquad(7\text{-}3\text{-}1)$$

这里 $\vec{f}$ 为已知的 N 维向量，$\boldsymbol{M}$ 为 $N\times N$ 的常数矩阵，$\vec{x}$ 为未知向量。方程式（7-3-1）可用消去法进行求解，但常常采用迭代法更为有效。现将矩阵 $\boldsymbol{M}$ 分成两个矩阵和的形式

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U} \qquad (7\text{-}3\text{-}2)$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 为下三角形矩阵，其主对角元素不为零，$\boldsymbol{U}$ 为上三角形矩阵，该矩阵内包括主对角元素在内的下三角形矩阵之元素皆为零。高斯-塞德尔迭代法为

$$\boldsymbol{L}\vec{X}^{q+1}=\boldsymbol{U}\vec{X}^{q}+\vec{f} \qquad (7\text{-}3\text{-}3)$$

其中 q 为迭代数。设代数方程组（7-3-1）不能进一步化成阶次更小的可独立进行求解的子代数方程组。如果矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的元素满足条件

$$|a_{i,i}|\geqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} |a_{i,j}| \qquad (7\text{-}3\text{-}4)$$

且至少存在一个 i 满足不等式

$$|a_{i,i}|> \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} |a_{i,j}| \qquad (7\text{-}3\text{-}5)$$

则高斯-塞德尔迭代式（7-3-3）是收敛的。还可以针对代数方程组(7-3-1)构造松弛方法。有关一般的迭代法可参看文献[13，14]。

二、气动方程的线高斯-塞德尔迭代法

查克拉瓦特[15](Chakravarthy）和麦科马克[12]在自己的工作中用线高斯-塞德尔迭代法求解了气动方程的差分逼近式。现通过二维问题对此方法给以介绍。通常逼近于二维气动方程的隐式法可写成如下形式

$$\boldsymbol{B}^{*}\delta_t\vec{U}_{i,j+1}+\boldsymbol{A}^{*}\delta_t\vec{U}_{i,j}+\boldsymbol{C}^{*}\delta_t\vec{U}_{i,j-1}+\boldsymbol{D}^{*}\delta_t\vec{U}_{i+1,j}$$
$$+\boldsymbol{E}^{*}\delta_t\vec{U}_{i-1,j}=\Delta\vec{U}_{i,j} \qquad (7\text{-}3\text{-}6)$$

其中

$$\boldsymbol{B}^{*}=\alpha_2(\boldsymbol{A}_2^{-})_{i,j+1},\quad \boldsymbol{D}^{*}=\alpha_1(\boldsymbol{A}_1^{-})_{i+1,j}$$
$$\boldsymbol{C}^{*}=-\alpha_2(\boldsymbol{A}_2^{+})_{i,j-1},\quad \boldsymbol{E}^{*}=-\alpha_1(\boldsymbol{A}_1^{+})_{i-1,j}$$
$$\boldsymbol{A}^{*}=\boldsymbol{I}+\alpha_1(\boldsymbol{A}_1^{+}-\boldsymbol{A}_1^{-})+\alpha_2(\boldsymbol{A}_2^{+}-\boldsymbol{A}_2^{-})$$

$$\alpha_1=\frac{\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}\qquad \alpha_2=\frac{\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta y}$$

式（7-3-6）之右端为在 n 时间层上已求得量，$A_1^{\pm}$ 和 $A_2^{\pm}$ 分别为由雅可比矩阵 A_1 和 A_2 经系数矩阵分裂后所得到的矩阵。为了清楚起见，在上列各项中略去了系数矩阵的下标和向量 $\delta_t\vec{U}$ 的上标。设 p 为迭代数

$$p=1,\ 3,\ 5,\ \cdots$$

在文献[12]中每个线高斯-塞德尔迭代过程由向后（i 递减）和向前（i 递增）两个扫描过程组成

向后扫描（$i\downarrow$）：

$$\begin{aligned}&B^*\delta_t\vec{U}_{i,j+1}^{(p)}+A^*\delta_t\vec{U}_{i,j}^{(p)}+C^*\delta_t\vec{U}_{i,j-1}^{(p)}-D^*\delta_t\vec{U}_{i+1,j}^{(p)}\\&\quad+E^*\delta_t\vec{U}_{i-1,j}^{(p-1)}=\Delta\vec{U}_{i,j}\end{aligned}\tag{7-3-7}$$

向前扫描（$i\uparrow$）：

$$\begin{aligned}&B^*\delta_t\vec{U}_{i,j+1}^{(p+1)}+A^*\delta_t\vec{U}_{i,j}^{(p+1)}+C^*\delta_t\vec{U}_{i,j-1}^{(p+1)}+D^*\delta_t\vec{U}_{i+1,j}^{(p)}\\&\quad+E^*\delta_t\vec{U}_{i-1,j}^{(p+1)}=\Delta\vec{U}_{ij}\end{aligned}\tag{7-3-8}$$

在向后扫描时在 $i+1$ 排上的量 $\delta_t\vec{U}_{i+1,j}$ 为已知，并将其立即代入到方程（7-3-7）中去，而在 $i-1$ 排上的相应量为未知量，因而在向后扫描时仍用前一次的迭代量 $\delta_t\vec{U}_{i-1,j}^{(p-1)}$（参看图7-1）。在向前扫描过程中 $i-1$ 排上的量为已知，可用新求出的 $p+1$ 次迭代值代替（7-3-8）中的 $\delta_t\vec{U}_{i-1,j}$，而式中 $i+1$ 排上的值仍采用 p 次迭代值。

按这种求解方法在向后和向前两个扫描过程中，最后都归结为在每个取定的 $i=\text{const.}$ 线上对 j 方向上的三对角块矩阵求逆。当这种正反扫描过程收敛到一定程度时，可以得到渐近量 $\delta_t\vec{U}^{n+1}$，从而可得到

$$\vec{U}^{n+1}=\vec{U}^{n}+\delta_t\vec{U}^{n-1}$$

当得到所有 $n+1$ 时间层上的量 $\vec{U}^{n+1}$ 后，可以求出在 $n+1$ 时间层上的余量 $\Delta\vec{U}_{i,j}^{n+1}$。不断重复上述求解过程最后可以得到所需

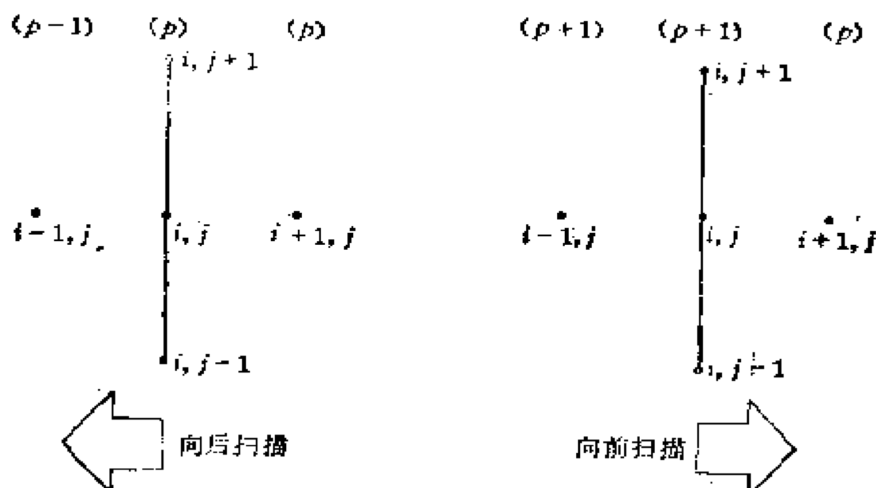


图7-1 线高斯-塞德尔迭代示意图

要的定常状态的解$\vec{U}_{i,j}$。由于采用了雅可比系数矩阵分裂法，这将保证对应于由隐式法得到的代数方程之矩阵主对角元素占优势。这一特性有助于迭代过程的收敛。麦科马克利用线高斯-塞德尔迭代法数值求解了球-锥超声速粘性绕流问题。在该计算中为了求得$\delta_t\vec{U}^{n+1}$只用了一个正反扫描过程。

三、嵌套式迭代法

本文作者在文献〔6〕中采用嵌套式迭代法数值求解了烧蚀外形钝锥超声速粘性绕流问题。在求解二维问题时利用线高斯-塞德尔迭代法在正反两个扫描过程中都归结为在i=const.线上在j方向上的三对角块矩阵求逆。在文献〔6〕中不是直接对这一三对角块矩阵求逆，而是采取迭代方法进行求解。所谓嵌套式的迭代是由内外两层迭代构成的，外层迭代即为线高斯-塞德尔迭代，它将原二维问题的求解通过迭代的办法化为对三对角块矩阵的求逆。内层迭代是再次通过迭代的方法化三对角块矩阵求逆为三对角线矩阵求逆。引入嵌套式迭代法的目的是为了进一步减少计算工作量。

关于外层迭代（线高斯-塞德尔迭代），在前面已做了比较

细致的讨论。这种办法最终化为对三对角块矩阵的求逆。现在讨论内层迭代过程，即化三对角块矩阵的求逆为三对角线矩阵求逆。现通过对逼近于一维气动方程（4-2-6）的差分方程的求解来讨论这一转化过程。逼近于一维问题的差分方程可写为如下形式

$$B^* \delta_t \vec{U}_{j+1} + A^* \delta_t \vec{U}_j + C^* \delta_t \vec{U}_{j-1} = \Delta \vec{U}_j \qquad (7\text{-}3\text{-}9)$$

其中

$$B^* = \alpha_1 A^-_{j+1}, \quad A^* = I + \alpha_1 (A^+ - A^-),$$

$$C^* = -\alpha_1 A^-_{j-1}, \quad \alpha_1 = \frac{\frac{\beta}{2}}{1 - \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

通常可用标准的矩阵追赶法由式（7-3-9）中求出增量$\delta_t \vec{U}$来。这里希望通过更为简单的迭代法来进行求解。高斯-塞德尔迭代法是将式（7-3-1）中之矩阵M分裂为两个矩阵和的形式，其一为下三角形矩阵，另一为上三角形矩阵，然后采用式(7-3-3)进行迭代求解。更为一般的情况是分裂矩阵M为

$$M = N - P$$

而迭代过程为

$$N \vec{X}^{q+1} = P \vec{X}^q + \vec{f}$$

这里N和P不一定是上或下三角形矩阵，但希望易于对矩阵N进行求逆。如对式（7-3-8）可将系数矩阵分裂为

$$B^* = B_0 + \overline{B}, \quad A^* = A_0 + \overline{A}, \quad C^* = C_0 + \overline{C}$$

迭代过程为

$$B_0 \delta_t \vec{U}^{(q+1)}_{j+1} + A_0 \delta_t \vec{U}^{(q+1)}_j + C_0 \delta_t \vec{U}^{(q+1)}_{j-1} = \Delta \vec{U}_j \qquad (7\text{-}3\text{-}10)$$
$$- [\overline{B} \delta_t \vec{U}^{(q)}_{j+1} + \overline{A} \delta_t \vec{U}^{(q)}_j + \overline{C} \delta_t \vec{U}^{(q)}_{j-1}]$$

式中q为迭代数。希望B_0、A_0和C_0的选择既可简化式(7-3-9)的求解过程，又能保证迭代过程收敛。在文献[6]中给出一个简单的方法、利用第四章第二节中的第（3）种分裂得到了矩阵$A^{\pm}$，而B_0、A_0和C_0的具体形式为

$$B_0=\alpha_1 u^- I, \qquad A_0=[1+\alpha_1(|u|+c)]I$$
$$C_0=-\alpha_1 u^+ I$$

这里 I 为单位矩阵，c 为声速，$u^\pm$在第四章已定义。利用上面选定的 A_0、B_0 和 C_0 可求出 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 和 $\overline{C}$来

$$\overline{B}=-\alpha_1 c S^{-1} I_2 S, \qquad \overline{A}=-\alpha_1 c S^{-1} I_1 S$$
$$\overline{C}=-\alpha_1 c S^{-1} I_3 S$$

式中 I_k 为对角矩阵，除对角线上第 k 个元素为 1 外其余元素皆为零。考虑到矩阵 I_k 的特殊形式很容易得到 $S^{-1}I_kS\delta_t\vec{U}$ 的表达式

$$S^{-1}I_kS\delta_t\vec{U}=\xi_k\begin{bmatrix}(S^{-1})_{1,k}\\(S^{-1})_{2,k}\\(S^{-1})_{3,k}\end{bmatrix}$$

其中

$$\xi_k=\sum_{j=1}^{3}(S)_{k,j}(\delta_t\vec{U})_j$$

$(S)_{k,j}$ 和 $(S^{-1})_{k,j}$ 分别为相似变换矩阵 S 和 S^{-1} 的元素，$(\delta_t\vec{U})_j$ 为向量 $\delta_t\vec{U}$ 的分量。此时迭代过程（7-3-10）可写成如下之形式

$$\begin{aligned}\alpha_1 u^-\delta_t\vec{U}_{j+1}^{(q+1)}&+[1+\alpha_1(|u|+c)]\delta_t\vec{U}_j^{(q+1)}-\alpha_1 u^+\delta_t\vec{U}_{j-1}^{(q+1)}\\&=\Delta\vec{U}_j+[cS^{-1}I_2S\delta_t\vec{U}^{(q)}]_{j+1}+[cS^{-1}I_3S\delta_t\vec{U}^{(q)}]_{j-1}\\&\quad+[cS^{-1}I_1S\delta_t\vec{U}^{(q)}]_j \qquad (7\text{-}3\text{-}11)\end{aligned}$$

该式之左端的系数皆为标量，它可很容易地利用标量追赶法进行求解。

现对这一迭代过程的收敛性做一简单分析。利用冻结系数的方法取式（7-3-11）中各系数为不依赖于结点 j 的常数，并注意到式之右端项 $\Delta\vec{U}$ 不依赖于迭代数 q。将该式之 $q+1$ 次迭代量与 q 次迭代量相减，然后左乘以矩阵S，则可以得到关于迭代增量向量为

$$\vec{V}_j^{(q+1)}=\delta_t[S\vec{U}^{(q+1)}]_j-\delta_t[S\vec{U}^{(q)}]$$

的齐次方程如下：

$$\alpha_1 u^- \vec{V}_{j+1}^{(q+1)} + [1+\alpha_1(|u|+c)]\vec{V}_j^{(q+1)} - \alpha_1 u^+ \vec{V}_{j-1}^{(q+1)}$$
$$= \alpha_1 c I_2 \vec{V}_{j+1}^{(q)} + \alpha_1 c I_1 \vec{V}_j^{(q)} + \alpha_1 c I_3 \vec{V}_{j-1}^{(q)}$$

该式为三个互不相关的方程。参照对初值问题稳定性分析的办法可得到如下之三个不同的收敛系数（放大因子）

$$G_1 = \frac{\alpha_1 c}{1+\alpha_1 c+\alpha_1|u|(1-\cos\theta)+i\alpha_1 u\sin\theta}$$

$$G_2 = \frac{\alpha_1 c(\cos\theta+i\sin\theta)}{1+\alpha_1 c+\alpha_1|u|(1-\cos\theta)+i\alpha_1 u\sin\theta}$$

$$G_3 = \frac{\alpha_1 c(\cos\theta-i\sin\theta)}{1+\alpha_1 c+\alpha_1|u|(1-\cos\theta)+i\alpha_1 u\sin\theta}$$

很显然$|G_k|<1$，即迭代过程是收敛的。这里只是给了一种启示性的分析。对于非线性的实际问题数值实验表明，这种迭代方法确实是收敛的。

对二维问题分内外两个迭代过程。外层迭代即为高斯-塞德尔迭代，它导至对下面方程的求解

$$B^* \delta_t \vec{U}_{i,j+1} + A^* \delta_t \vec{U}_{i,j} + C^* \delta_t \vec{U}_{i,j-1} = \Delta \vec{\tilde{U}}_{i,j} \qquad (7\text{-}3\text{-}12)$$
$$\Delta \vec{\tilde{U}}_{i,j} = \Delta \vec{U}_{i,j} - D^* \delta_t \vec{U}_{i+1,j} - E^* \delta_t \vec{U}_{i-1,j}$$

在正反两个扫描过程中式（7-3-12）之右端皆为已知，式中把迭代参数p省略了，内层迭代为

$$b_0 \delta_t \vec{U}_{i,j+1}^{(q+1)} + a_0 \delta_t \vec{U}_{i,j}^{(q+1)} + c_0 \delta_t \vec{U}_{i,j-1}^{(q+1)} = \vec{d}(q) \qquad (7\text{-}3\text{-}13)$$

其中

$$b_0 = \alpha_2 v^-, \qquad c_0 = -\alpha_2 v^+$$
$$a_0 = [1+\alpha_1(|u|+c)+\alpha_2(|v|+c)]$$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \qquad \alpha_2 = \frac{\frac{\beta}{2}}{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\Delta t}{\Delta y}$$

$$\vec{d}^{(q)} = \Delta \vec{U}_{i,j} + \alpha_1\{c[I - S_1^{-1} I_3 S_1 - S_1^{-1} I_4 S_1]\delta_t \vec{U}^{(q)}\}_{i,j}$$
$$+ \alpha_2\{[c S_2^{-1} I_3 S_2 \delta_t \vec{U}^{(q)}]_{i,j+1} + [c S_2^{-1} I_4 S_2 \vec{U}^{(q)}]_{i,j-1}\}$$
$$+ \alpha_2\{c[I - S_2^{-1} I_3 S_2 - S_2^{-1} I_4 S_2]\delta_t \vec{U}^{(q)}\}_{i,j}$$

文献〔6〕指出，对二维问题如果内层迭代次数小于5，对三维问题如果内层迭代次数小于10，则在每个时间层上内层的迭代计算工作量将小于对三对角块矩阵求逆的计算工作量。在文献〔6〕中对轴对称钝体的绕流计算中只用了一次内层迭代。

四、牛顿迭代方法

众所周知，在对非线性代数方程求根时，牛顿迭代法是一个被广泛采用的方法。这种迭代法有着方法简单、收敛速度快的优点。设需对非线性代数方程

$$f(x)=0 \tag{7-3-14}$$

求根。设x_n为已知的某一近似根，它不能准确地满足方程（7-3-14）。引入修正量δx^{n+1}，希望对x^n进行修正后所得到的$x^{n+1}=x^n+\delta x^{n+1}$满足方程

$$f(x^{n+1})=f(x^n+\delta x^{n+1})=0$$

对此式在x^n点上进行泰勒级数展开得

$$f(x^{n+1})=f(x^n)+f'(x^n)\delta x^{n+1}+\cdots$$

取其主要项得

$$\delta x^{n+1}=-\frac{f(x^n)}{f'(x^n)} \tag{7-3-15}$$

反复这一过程，对每次所得到的x^n按式（7-3-15）进行修正即可得到预期的近似解。

牛顿迭代法具有二阶收敛速度，且方法比较简单。这一方法的缺点是要求具有比较准确的初始迭代值，否则有可能迭代过程不收敛。

近年来很多人采用牛顿迭代法求解定常气动问题[12]。现以二维问题为例对该方法加以讨论。设所需求解的为如下之定常问题

$$-\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{f}_1(\vec{U})+\frac{\partial}{\partial y}\vec{f}_2(\vec{U})=0 \tag{7-3-16}$$

希望通过迭代的方法来求解这一问题。设第n次迭代量$\vec{U}^n$为已

知，现以量 $\delta_t\vec{U}$ 对其进行修正，希望修正后的量 $\vec{U}^{n+1}=\vec{U}^n-\delta_t\vec{U}$ 为更为精确的解。将 $\vec{U}^{n+1}$ 代入式（7-3-16）后得

$$\frac{\partial}{\partial x}[\vec{f}_1(\vec{U}^n+\delta_t\vec{U})]+\frac{\partial}{\partial y}[\vec{f}_2(\vec{U}^n+\delta_t\vec{U})]=0$$

在 $\vec{U}^n$ 点上进行泰勒级数展开，并略去高阶小量则可得

$$\frac{\partial}{\partial x}[\vec{f}_1(\vec{U}^n)+\boldsymbol{A}_1^{(n)}\delta_t\vec{U}]+\frac{\partial}{\partial y}[\vec{f}_2(\vec{U}^n)+\boldsymbol{A}_2^{(n)}\delta_t\vec{U}]=0$$

这里 $\boldsymbol{A}_k$ 为雅可比矩阵 $D(\vec{f}_k)/D(\vec{U})$。上式可改写成如下之形式

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{A}_1\cdot+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{A}_2\cdot\right]\delta_t\vec{U}=-\frac{\partial}{\partial x}\vec{f}_1^n-\frac{\partial}{\partial y}\vec{f}_2^n \qquad (7-3-17)$$

可利用适当的雅可比系数矩阵分裂法将式（7-3-17）两端之系数矩阵和流通向量进行分裂，然后进行相应的差分化，即可得到最后的迭代方程。例如可采用如下之具体形式

$$\left[\frac{1}{\Delta x}\delta_x^-\boldsymbol{A}_1^+\cdot+\frac{1}{\Delta x}\delta_x^+\boldsymbol{A}_1^-\cdot+\frac{1}{\Delta y}\delta_y^-\boldsymbol{A}_2^+\cdot+\frac{1}{\Delta y}\delta_y^+\boldsymbol{A}_2^-\cdot\right]\delta_t\vec{U}_{i,j}$$

$$=-\left[\frac{1}{\Delta x}\delta_x^0\vec{f}_1+\frac{1}{\Delta y}\delta_y^0\vec{f}_2\right]_{i,j} \qquad (7-3-18)$$

$$\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\vec{U}_{i,j}^n+\delta_t\vec{U}_{i,j}$$

取第四章式（4-8-21）和（4-8-22）中之参数 $\alpha=0$，$\beta=2$，且式之两端皆除以 Δt，并与式（7-3-18）进行比较，则可知当时间步长足够大时式（4-8-21）和（4-8-22）近似地相当于牛顿迭代。

上面曾指出，牛顿迭代法有着很快的收敛速度，然而往往要求更为准确的初始迭代值。在具体的求解过程中可以这样来进行处理，先用式（4-8-21）和（4-8-22）进行迭代求解，然后逐渐加大时间步长以加快收敛过程。

五、推进迭代法

这里将介绍两种迭代方法，一种是文献[29]中采用的方法，另一种是文献[9]中采用的 CSCM-S 方法。这两种方法都是空间推进迭代法，是为提高求解效率而设计的。这里称前者为推进

迭代法（1），后者为推进迭代法（2）。实际上在前面介绍的高斯-塞德尔迭代法、嵌套式迭代法以及牛顿迭代法都是推进迭代法的一种形式。为了便于叙述，仍针对二维欧拉方程的差分逼近式进行讨论。这种方法也可用来求解 N-S 方程和 PNS 方程。

（一）推进迭代法（1）

取第四章式（4-8-21）和（4-8-22）中之$\alpha=0$，$\beta=2$，且式之两端皆除以 Δt 得

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\boldsymbol{I}+\frac{1}{\Delta x}\delta_x^-\boldsymbol{A}_1^+\cdot+\frac{1}{\Delta x}\delta_x^+\boldsymbol{A}_1^-\cdot+\frac{1}{\Delta y}\delta_y^-\boldsymbol{A}_2^+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Delta y}\delta_y^+\boldsymbol{A}_2^-\right)\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\Delta\vec{U}_{i,j}^{n} \tag{7-3-19}$$

$$\Delta\vec{U}_{i,j}=-\left[\frac{1}{\Delta x}(\delta_x\vec{F}_1^++\delta_x\vec{F}_1^-)+\frac{1}{\Delta y}(\delta_y\vec{F}_2^++\delta_y\vec{F}_2^-)\right] \tag{7-3-20}$$

将式（7-3-19）改写成如下之两种形式

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\boldsymbol{I}+\frac{1}{\Delta x}\delta_x^-\boldsymbol{A}_1^+\cdot+\frac{1}{\Delta y}\delta_y^-\boldsymbol{A}_2^+\cdot+\frac{1}{\Delta y}\delta_y^+\boldsymbol{A}_2^-\cdot\right)\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}$$

$$=\Delta\vec{U}_{i,j}^{n}-\frac{1}{\Delta x}\delta_x^+\boldsymbol{A}_1^-\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1} \tag{7-3-21}$$

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\boldsymbol{I}+\frac{1}{\Delta x}\delta_x^+\boldsymbol{A}_1^-\cdot+\frac{1}{\Delta y}\delta_y^-\boldsymbol{A}_2^+\cdot+\frac{1}{\Delta y}\delta_y^+\boldsymbol{A}_2^-\cdot\right)\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}$$

$$=\Delta\vec{U}_{i,j}^{n}-\frac{1}{\Delta x}\delta_x^-\boldsymbol{A}_1^+\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1} \tag{7-3-22}$$

如果将式（7-3-21）右端之 $\delta_t\vec{U}^{n+1}$ 以 $\delta_t\vec{U}^{n}$ 代之，则该式右端全为已知，因而可对式（7-3-21）沿 x 方向推进求解。在每个取定 $i=\text{const.}$ 线上需在 j 方向上进行三对角块矩阵求逆。如果式（7-3-22）中之右端 $\delta_t\vec{U}^{n+1}$ 以 $\delta_t\vec{U}^{n}$ 代之，则该式可沿 x 之负方向进行推进求解。在文献[29]中每一推进过程是由两步组成。对式（7-3-21）的两个步骤是

预测步：

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\boldsymbol{I}+\frac{1}{\Delta x}\delta_x^-\boldsymbol{A}_1^+\cdot+\frac{1}{\Delta y}\delta_y^-\boldsymbol{A}_2^+\cdot+\frac{1}{\Delta y}\delta_y^+\boldsymbol{A}_2^-\cdot\right)^n\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}$$

$$= \Delta \vec{U}_{i,j}^{n} - \frac{1}{\Delta x} \delta_x^{+} (A_1^{-} \delta_t \vec{U})_{i,j}^{n} \qquad (7\text{-}3\text{-}23)$$

在 $\Delta U_{i,j}^{n}$ 中

$$\left. \begin{aligned} \delta_x(\vec{f}_1^{\pm})_{i,j} &= \delta_x^{\mp}(\vec{f}_1^{\pm})_{i,j} \\ \delta_y(\vec{f}_2^{\pm})_{i,j} &= \delta_y^{\mp}(\vec{f}_2^{\pm})_{i,j} \end{aligned} \right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}24)$$

校正步：

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t} I + \frac{1}{\Delta x} \delta_x^{-} A_1^{+} \cdot + \frac{1}{\Delta y} \delta_y^{-} A_2^{+} \cdot + \frac{1}{\Delta y} \delta_y^{+} A_2^{-} \cdot \right)^{\overline{n+1}} \delta_t \vec{U}_{i,j}^{\overline{n+1}}$$

$$= \Delta \tilde{\vec{U}}_{i,j}^{\overline{n+1}} - \frac{1}{\Delta x} \delta_x^{+} (A_1^{-} \delta_t U)_{i,j}^{\overline{n+1}} \qquad (7\text{-}3\text{-}25)$$

其中
$$\Delta \tilde{\vec{U}}_{i,j}^{\overline{n+1}} = \frac{1}{2} (\Delta \vec{U}_{i,j}^{n} + \Delta \vec{U}_{i,j}^{\overline{n+1}}) \qquad (7\text{-}3\text{-}26)$$

在式（7-3-26）的 $\Delta \vec{U}^{\overline{n+1}}$ 中出现的导数取式（7-3-24），$\Delta \vec{U}^{n}$ 中出现的导数取

$$\left. \begin{aligned} \delta_x \vec{f}_1^{+} &= 2\delta_x^{-}(\vec{f}_1^{+})_{i,j} - \delta_x^{-}(\vec{f}_1^{+})_{i-1,j} \\ \delta_x \vec{f}_1^{-} &= 2\delta_x^{+}(\vec{f}_1^{-})_{i,j} - \delta_x^{+}(\vec{f}_1^{-})_{i+1,j} \\ \delta_y \vec{f}_2^{+} &= 2\delta_y^{-}(\vec{f}_2^{+})_{i,j} - \delta_y^{-}(\vec{f}_2^{+})_{i,j-1} \\ \delta_y \vec{f}_2^{-} &= 2\delta_y^{+}(\vec{f}_2^{-})_{i,j} - \delta_y^{+}(\vec{f}_2^{-})_{i,j+1} \end{aligned} \right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}27)$$

同样可以构造针对式（7-3-22）的差分格式。

很显然如果沿 x 之正方向为超声速流，则 $A_1^{-} = 0$。如果取 $\sigma = 0$，则可根据式（7-3-21）沿 x 之正方向只推进一次即可得到定常解。此时只需在 i = const 线上在 j 方向上进行反复迭代使 $\delta_t \vec{U}^{n+1} \longrightarrow \vec{0}$ 即可。

（二）推进迭代法（2）——CSCM-S方法

将第六章利用 CSCM 方法所构造的格式（6-6-29）改写成如下形式

$$\delta_t \vec{U}_j^{*} + A_{j-1}^{+}(\delta_t \vec{U}_j^{*} - \delta_t \vec{U}_{j-1}^{*}) + A_j^{-}(\delta_t \vec{U}_{j+1}^{*} - \delta_t \vec{U}_j^{*})$$

$$= -A_{j-1}^{+}(\vec{U}_j^{n} - \vec{U}_{j-1}^{n}) - A_j^{-}(\vec{U}_{j+1}^{n} - \vec{U}_j^{n}) \qquad (7\text{-}3\text{-}28)$$

为了简便起见，这里将矩阵 $\widetilde{A}_j^{\pm}$ 上方之“～”去掉了，且定义

$$\delta_t \vec{U}_j^{*} = \vec{U}_j^{*} - \vec{U}_j^{n}$$

CSCM-S 中最后之 S 表示空间推进之意（Space Marching），是郎巴德等人于 1984 年提出的[9]。该方法由两个推进过程组成。在正向推进过程中取

$$\delta_t\vec{U}^*_{j-1}=\vec{U}^*_{j-1}-\vec{U}^n_{j-1}$$

$$\delta_t\vec{U}^*_{j+1}=0$$

据此由式（7-3-28）中可得到

$$(I+A^+_{j-1}-A^-_j)\delta_t\vec{U}^*=-A^+_{j-1}(\vec{U}^n_j-\vec{U}^*_{j-1})-A^-_j\delta^+_x\vec{U}^n_j \quad (7\text{-}3\text{-}29)$$

类似可得到反向推进方程

$$(I+A^+_{j-1}-A^-_j)\delta_t\vec{U}^{n+1}_j=-(A^+\delta^-_x\vec{U}^*_j)-A^-_j\cdot(\vec{U}^{n+1}_{j+1}-\vec{U}^*_j)$$

(7-3-30)

可以看出，式（7-3-29）和（7-3-30）与文献〔22〕中提出的加矩阵形式的调节因子算法极为相似。在本章第四节中将讨论这一方法。

为了提高精度在文献〔30〕中利用了如下之三点差分求解方法：

$$(I+A^+_{j-1}-A^-_j)\delta_t\vec{U}$$

$$=\frac{1}{2}[-3A^+\delta^-_x\vec{U}_j+A^+\delta^-_x\vec{U}_{j-1}-3A^-\delta^+_x\vec{U}_j+A^-\delta^+_x\vec{U}_{j+1}]$$

(7-3-31)

对二维问题具有一阶精度的正向推进方程为

$$(I+A^+-A^-+B^+\delta_y+B^-\delta_y)\delta_t\vec{U}^*$$

$$=-A^+_{j-1}(\vec{U}_i-\vec{U}^*_{j-1})-A^-\delta^+_x\vec{U}_i-B^+\delta^-_y\vec{U}_j-B^-\delta^+_y\vec{U}_j$$

(7-3-32)

也可构造具有二阶精度的求解方法。对二维问题在正反两个推进过程中在每个 i =const. 线上需对三对角块矩阵求逆，并且需在这一线上进行几次迭代以使系数矩阵与在“新时间层”上的量更加适应。这种推进方法失掉了时间方向上的精度，但可用于求解定常问题，且在求解过程中只需单片内存储量。对超声速问题只需一次正向推进。在文献〔30〕中利用该方法求解了 PNS 方程。

第四节 几个简单的提高求解效率的方法

人们希望逼近于气动方程的差分方法简单、精度高和节省机时。由显式法到隐式法使得计算效率有了很大提高。为了更有效地求解由隐式法所组成的代数方程组人们做了大量的工作，如发展了不同的近似因式分解法和各种迭代法。本节将介绍几个简单的提高求解效率的方法。关于多重网格技术，将在第五节中讲述。

一、对角化算法

为了减少隐式部分的计算工作量，普利艾姆（Pulliam）和乔希（Chaussee）在文献〔16〕中利用了对角化的算法。这种算法主要用于求解定常问题。现以二维问题为例对方法做一简单介绍。将式（7-2-1）近似因式分解后可得式（7-2-2）。将该式中的雅可比矩阵通过对角阵来表示，则有

$$[\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{S}_1+\alpha_1\delta_x(\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{S}_1)][\boldsymbol{S}_2^{-1}\boldsymbol{S}_2+\alpha_2\delta_y(\boldsymbol{S}_2^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{S}_2)]\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\Delta\vec{U}_{i,j}^{n} \tag{7-4-1}$$

此式与式（7-2-2）是等价的。现将差分算子 δ_x 和 δ_y 作用下的 $\boldsymbol{S}_k^{-1}$ 和 S_k 提到方括号外来，则可得

$$\boldsymbol{S}_1^{-1}[\boldsymbol{I}+\alpha_1\delta_x\boldsymbol{\Lambda}_1]\boldsymbol{N}[\boldsymbol{I}+\alpha_2\delta_y\boldsymbol{\Lambda}_2]\boldsymbol{S}_2\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\Delta\vec{U}_{i,j}^{n} \tag{7-4-2}$$

这里

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2^{-1}$$

可将式（7-4-1）写成与式（7-2-3）和（7-2-4）类似的求解序列，但此时所需要的是三对角线矩阵求逆，而不再是三对角块矩阵求逆。在文献〔31〕中利用这一方法提高了求解效率。

这种对角化的过程使逼近方程在 t 方向上只有一阶精度，且破坏了隐式部分的守恒特性。在求解定常问题时将保持格式的守恒特性，而在空间方向上仍保持原格式的精度。这种方法也可用于求解三维问题。

对角化算法主要用于对欧拉方程的求解，它可以减少隐式部分的计算量。当有粘性项存在时，与粘性有关的隐式部分将难以对角化。此时可用下面将介绍的算子附加修正的方法来改善粘性项对稳定性的限制。经算子附加修正后的隐式部分仍可进行对角化处理。

二、算子附加修正方法

在第六章中曾提到算子附加修正算法。当时的目的在于改善数值解在激波附近的行为，即压制激波附近数值解中的非物理振荡。也可用这种方法来提高求解效率[17]。

设有抛物型方程组

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \boldsymbol{B}\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial x^2} \tag{7-4-3}$$

其中 $\boldsymbol{B}$为正定对称矩阵。最简单的显式格式为

$$\vec{U}_j^{n+1} = \vec{U}_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\boldsymbol{B}\delta_x^2\vec{U}_j^n \tag{7-4-4}$$

稳定性要求满足条件

$$\lambda_k(\boldsymbol{B})\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leqslant \frac{1}{2} \tag{7-4-5}$$

式中 $\lambda_k(\boldsymbol{B})$ 为矩阵$\boldsymbol{B}$的特征值。由于这一显式法对时间步长的限制太严，人们多采用隐式格式来逼近式（7-4-3)。最简单的隐式格式为

$$\vec{U}_j^{n+1} = \vec{U}_j^n + \theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\boldsymbol{B}\delta_x^2\vec{U}_j^{n+1} + (1-\theta)\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\boldsymbol{B}\delta_x^2\vec{U}_j^n \tag{7-4-6}$$

当$\theta \geqslant \frac{1}{2}$时该格式是绝对稳定的。可将其改写成如下形式：

$$\left[I - \theta\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\boldsymbol{B}\delta_x^2\right]\delta_t\vec{U}_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\boldsymbol{B}\delta_x^2\vec{U}_j^n \tag{7-4-7}$$

此时的求解需要进行三对角块矩阵的求逆。采用算子附加修正的方法可使这一求解过程进一步简化。在条件稳定的显式格式(7-4-4）中的右端加入一附加项

$$L_{ad}(\vec{U}^{*})=\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^2(\delta_t\vec{U}^{n+1}), \qquad (7-4-8)$$

式中之β为一标量函数。此时所需求解的方程为

$$\left[I-\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^2\right]\delta_t\vec{U}_j^{n+1}=\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\boldsymbol{B}\delta_x^2\vec{U}_j^{n+1} \qquad (7-4-9)$$

对式（7-4-9）的求解只需对三对角线矩阵求逆。很容易指出，如果参数β满足条件

$$\beta\geqslant\left\{0,\ \frac{\lambda_k(\boldsymbol{B})}{\Delta x}-\frac{1}{2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right\} \qquad (7-4-10)$$

则对任意步长比$\Delta t/\Delta x$差分方程（7-4-9）都是稳定的。不难看出，如果显式格式的稳定条件得到满足，则条件（7-4-10）中可取$\beta=0$。原显式格式的截断误差为$O(\Delta t,\ \Delta x^2)$，引入附加修正项后并不破坏原格式的逼近精度。

可把式（7-4-9）改写成如下形式

$$\left[I+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(\beta^{+}\delta_x^{-}+\beta^{-}\delta_x^{+})\right]\delta_t\vec{U}_j^{n+1}=\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\boldsymbol{B}\delta_x^2\vec{U}_j^{n} \qquad (7-4-11)$$

其中

$$\beta^{+}=\beta\geqslant 0,\quad \beta^{-}=-\beta\leqslant 0$$

式（7-4-11）的左端隐式部分与欧拉方程差分逼近式（4-7-12）的隐式部分极为相似。由于$\beta^{\pm}$是标量函数，这样在求解N-S方程时可以很容易地将隐式部分中控制无粘项稳定性的部分和控制粘性项稳定性的部分很好地结合起来。在第四章中曾介绍了对N-S方程粘性项的差分逼近。为了保证稳定性的要求，在差分方程的隐式部分需引入复杂的与粘性系数有关的矩阵。采用本节介绍的算子附加修正的方法可使计算大为简化。

三、时间相关法及算子放大型修正方法

前面介绍了一些差分逼近方法和数值求解方法。这些方法主要用来逼近依赖于时间的非定常方程。在很多情况下人们只对定常状态的解感兴趣。利用非定常方程在满足一定边界条件情况下

可取时间足够大时的渐近解做为定常问题的解。此时原则上可给任意初值，但实际上初值的选取对求解过程影响很大。这就是通常所说的时间相关法。

这里主要讨论求解定常问题的方法。由于所感兴趣的是定常解，因而求解过程并非一定要准确地对应于真实的物理上的非定常发展过程。放松数值求解过程准确模拟真实物理过程的要求，人为地改变求解过程可适当地加速收敛速度。现在通常采用的局部时间法[18~21]就是根据这种思想设计的。本书作者在文献〔22〕中称这种方法为人工不定常方法或算子放大型修正方法[17]。现通过模型方程对这一方法加以讨论。设有线性伯格斯方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}=\gamma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7-4-12}$$

逼近于该方程的差分方程为

$$u_j^{n+1}=u_j^n+L(u_j^n) \tag{7-4-13}$$

式（7-4-12）中的系数 $a(x)$ 和 $\gamma(x)$ 在计算区域内往往变化很大（参看图 7-2）。假设只考虑式（7-4-12）中的无粘项，并设 $a(x)$ 的变化如图 7-2 所示。尽管在大部分计算区域中 $a(x)$

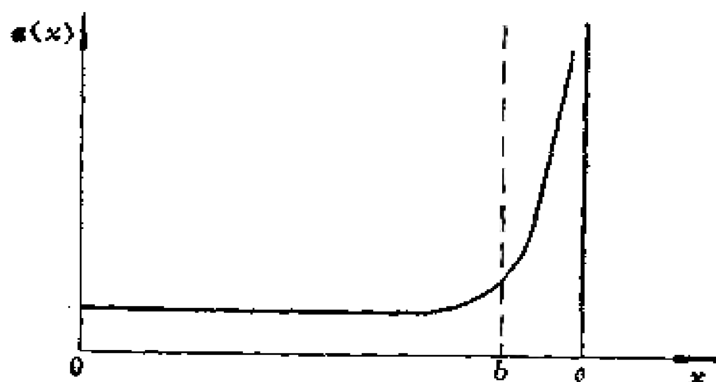


图7-2　系数 $a(x)$ 的变化

的数值比较小，可用较大的时间步长来进行计算，但在一个很小的区域〔b，c〕中 $a(x)$ 的峰值决定了整个计算区间〔0，c〕内的时间步长。在实际计算中可用下式来代替对方程（7-4-13）的求解

$$u_j^{n+1} = u_j^n + H_j L(u_j^n) \tag{7-4-14}$$

例如经过修正了的麦科马克格式为

$$u_j^{\overline{n+1}} = u_j^n + H_j\left(\gamma_j \frac{\delta_x^2 u_j^n}{\Delta x} - a_j \delta_x^+ u_j^n\right) \tag{7-4-15}$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_j^n + u_j^{\overline{n+1}}\right) + \frac{1}{2} H_j\left(\gamma_j \frac{\delta_x^2 u_j^{\overline{n+1}}}{\Delta x} - a\delta_x^- u_j^{\overline{n+1}}\right)$$

$$H_j = \frac{l}{1 + l\left(|a_j| + \frac{2\nu_j}{\Delta x}\right)} \qquad l > 0 \tag{7-4-16}$$

式中 l 为一正的自由参量。在式（7-4-14）中相当于取时间步长为 $\Delta t_j = \Delta x H_j$。在计算过程中通过 H_j 自动地调节着当地的时间步长。调节因子或放大型因子 H 的引入使得实际求解的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left[a(x)\frac{\partial u}{\partial x} - \gamma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = 0 \tag{7-4-17}$$

如果方程（7-4-12）和（7-4-17）有着共同的边界条件，则可望它们有着共同的定常解。

在第四章中曾提到，对无粘流模型方程（$\gamma(x) = 0$ 时），麦科马克格式当 $a(x)\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$ 时满足平移条件[28]。由于方程的系数在计算区域内是变化的，这将使平移条件难以处处得到满足。当 $a(x) \neq 0$ 和 $\gamma(x) = 0$ 时，且取参数 l 足够大时从式（7-4-15）中可以得到

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{|a|}\right)u_{j+1}^n + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{|a|}\right)u_{j-1}^n + O\left(\frac{\Delta x}{l}\right)$$

即平移条件可以处处近似地得到满足

$$u_j^{n+1} \approx u_{j\pm 1}^n$$

很明显，当平移条件得到完全满足时，则解将保持单调性。因而对一维问题当取库朗数接近于1时，在激波附近麦科马克格式解中的振荡将减小。

可将这一算子放大型修正方法推广到对方程组的求解中去。

将一维 N－S 方程改写为

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{B}\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \tag{7-4-18}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{A}_0^{-1}。$$

关于 $\vec{U}$，$\vec{f}$，$\boldsymbol{B}_0$ 和 $\boldsymbol{A}_0$ 在第四章第二节已有定义。参照式(7-4-17)可构造逼近于式（7-4-18）的麦科马克格式的放大型因子[22]

$$\boldsymbol{H}=l\left[\boldsymbol{I}+l\left((\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}|\boldsymbol{S}+\frac{2}{\Delta x}\boldsymbol{B}\right)\right]^{-1} \tag{7-4-19}$$

式中$|\boldsymbol{A}|$为由雅可比矩阵 $\boldsymbol{A}=D(\vec{f})/D(\vec{U})$ 之特征值的绝对值组成的对角矩阵，$\boldsymbol{S}$ 为对应的左特征行向量组成的矩阵。如果选用第四章第二节中的第（2）种系数矩阵分裂法，则式（7-4-19）可写为

$$H=l\left[\boldsymbol{I}+l\left(\boldsymbol{A}^{+}-\boldsymbol{A}^{-}+\frac{2}{\Delta x}\boldsymbol{B}\right)\right]^{-1}$$

对无粘流情况，这意味着对每一个式（7-4-18）的特征型方程取自己的时间步长。不难看出，对无粘流情况，矩阵形式的放大型因子的引入与本章第三节中 CSCM-S 方法中 $\delta_t U^{n+1}$ 的系数类似。如果将式（7-4-19）中的矩阵$\boldsymbol{B}$以 $\lambda(\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}$ 来代替，则有

$$\boldsymbol{H}=l\boldsymbol{S}^{-1}\left\{\boldsymbol{I}+l\left[|\mathbf{A}|+\frac{2\lambda(\boldsymbol{B})}{\Delta x}\boldsymbol{I}\right]\right\}^{-1}\boldsymbol{S} \tag{7-4-20}$$

式中

$$\lambda(\boldsymbol{B})=\max_k\{\lambda_k(\boldsymbol{B})\}$$

$\lambda_k(\boldsymbol{B})$ 为矩阵$\boldsymbol{B}$的特征值

$$\lambda_1(\boldsymbol{B})=0\,,\quad \lambda_2(\boldsymbol{B})=\frac{4}{3}\frac{\mu}{\rho Re},\quad \lambda_3(\boldsymbol{B})=\frac{c_p\mu}{\rho pr Re}$$

如果式（7-4-20）中之对角阵$|A|$以 $\lambda(A)I$ 代之则有（$\lambda(\boldsymbol{A})$ 为矩阵$\mathbf{A}$特征值的绝对值的最大值）

$$H=\frac{l}{1+l\left[\lambda(\mathbf{A})+\dfrac{2\lambda(\boldsymbol{B})}{\Delta x}\right]}\boldsymbol{I} \tag{7-4-21}$$

实践表明，这里介绍的方法对提高求解效率是有益的。

四、余量平滑法

为了加大时间步长和改善收敛速度詹姆生[24]利用了余量平滑技术。这里对这一方法做一简单介绍。设所求解的方程为式(4-7-6)。式（4-7-6）的右端为余量。在实际计算中不是直接将由式（4-7-5）所得之余量$\Delta\vec{U}_j$代入式（4-7-6）中进行求解，而是以平均量$\Delta\bar{\vec{U}}_j$代之

$$\Delta\bar{\vec{U}}_j=\varepsilon\Delta\vec{U}_{j-1}+(1-2\varepsilon)\Delta\vec{U}_j+\varepsilon\Delta\vec{U}_{j+1} \qquad (7-4-22)$$

当$\varepsilon>\frac{1}{4}$时尽管$\Delta\vec{U}_j\neq 0$，但平滑的结果可能导致$\Delta\bar{\vec{U}}_j=0$。詹姆生建议采用隐式的余量平滑

$$-\varepsilon\Delta\bar{\vec{U}}_{j-1}+(1+2\varepsilon)\Delta\bar{\vec{U}}_j-\varepsilon\Delta\bar{\vec{U}}_{j+1}=\Delta\vec{U}_j \qquad (7-4-23)$$

由于方程的系数皆为标量，因而该式是很容易求解的。

五、网格序列法

采用时间关系法求解定常问题时区域内的网格可以由粗逐渐向密过渡以减少总的计算工作量。因为在迭代的初期初始值很不好，且与差分方程也很不适应，因而不必要从一开始就采用细的网格进行计算。为了使扰动量较快地从计算区域内消失，在迭代初期可用粗网格来进行计算，然后逐渐加密网格。普利艾姆和斯蒂格尔（Pulliam 和 Steger）在文献[25]中指出，与一直采用密网格相比，按这种网格序列法可节省一半计算机时。

第五节　多层网格技术

多层网格技术是提高求解效率的一个有效方法。早期布朗特(Brandt) 等人在文献[32]中对压力项进行迭代求解时利用了多层网格法。后来尼（Ni）利用多层网格技术求解了欧拉方程[27]。近年来詹姆生等人在这方面做了很多工作[26,28]。这里将针对椭

圆型方程和双曲型（欧拉）方程的多层网格法进行简单的讨论。

一、椭圆型方程的多层网格法

设有方程

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=F \tag{7-5-1}$$

最简单的差分逼近式为

$$A\delta_x^2 u_{i,j}+B\delta_y^2 u_{i,j}=F_{i,j} \tag{7-5-2}$$

其中

$$A=\frac{a}{\Delta x^2},\quad B=\frac{b}{\Delta y^2}$$

求解式（7-5-2）的高斯-塞德尔迭代法为

$$A[u_{i-1,j}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n}]+B[u_{i,j-1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n}]=F_{i,j} \tag{7-5-3}$$

其中 n 为迭代次数。该迭代式的收敛因子为

$$G=\frac{Ae^{i\alpha}+Be^{i\beta}}{2(A+B)-Ae^{-i\alpha}-Be^{-i\beta}}$$

当取 $A=B$ 时对误差的高频分量 $\alpha=\beta=\pi$ 有

$$|G|=\frac{1}{3}$$

如果利用线高斯-塞德尔迭代来求解

$$A[u_{i-1,j}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i+1,j}^{n}]+B[u_{i,j-1}^{n+1}-2u_{i,j}^{n+1}+u_{i,j+1}^{n+1}]=F_{i,j} \tag{7-5-4}$$

则收敛因子为

$$G=\frac{A}{2(A+B-B\cos\beta)-Ae^{-i\alpha}}$$

当取 $A=B$ 时对高频误差分量 $\alpha=\beta=\pi$ 有

$$|G|=\frac{1}{7}$$

对低频误差分量 $\alpha\to 0$， $\beta\to 0$ 时这两种迭代的收敛因子 $|G|\to$

1．通常的迭代法一般都能很快地衰减误差的高频分量，但对减小低频误差都不够好。采用多层网格技术是利用细的网格来减少误差的高频分量，利用计算量更小的粗网格来降低低频误差。

为了简单起见，现只考虑两层网格，例如选粗网格之间距为h_c，细网格之间距为$h_f=h_c/2$。首先利用高斯－塞德尔迭代法在细网格上求解方程

$$\Delta_{h_f}\vec{U}^f=\vec{F} \qquad (7\text{-}5\text{-}5)$$

这里左端的表达式与方程（7-5-2）之左端相同，f表示对应于细网格的参数。当迭代到一定次数，收敛速度明显减慢。这表明误差的高频分量已得到很大衰减。如果继续迭代下去，虽然花费了很多的计算工作量，但低频误差的衰减却不明显。这部分工作可放在计算量少的粗网格上来完成。设$\vec{u}^f$为方程（7-5-5）的近似解，$\vec{V}^f=\vec{U}^f-\vec{u}^f$为解的误差。收敛速度减慢表明$\vec{V}^f$已变得比较光滑，它可用粗网格上的$\vec{V}^c$来逼近。此时可在粗网格上求解方程

$$\Delta_{h_c}\vec{V}^c=I_f^c(\vec{F}-\Delta_{h_f}\vec{u}^f) \qquad (7\text{-}5\text{-}6)$$

这里上标和下标c表示对应于粗网格的参数，I_f^c表示为由细网格到粗网格的插值算子。由于

$$\Delta_{h_f}\vec{V}^f=\vec{F}-\Delta_{h_f}\vec{u}^f \qquad (7\text{-}5\text{-}7)$$

所以方程（7-5-6）是在细网格上关于$\vec{V}^f$的方程在粗网格上的逼近。

设$\vec{v}^c$为迭代到一定次数的方程（7-5-6）的近似解，则可得到经过修正了的在细网格上的解为

$$\vec{u}^f_{new}=\vec{u}^f_{old}+I_c^f\vec{v}^c \qquad (7\text{-}5\text{-}8)$$

I_c^f为由粗网格到细网格的插值算子，$I_c^f\vec{v}^c$是$\vec{V}^f$的近似值。可以重复这一过程，最后得到需要的解。

这种多层网格技术可以由细网格到粗网格，再到更粗网格，然后逐次反回到细网格上去，也可以先从粗网格到细网格。

前面是针对线性算子Δ_h进行讨论的。现讨论更为一般的非线性情况。设有一非线性方程

$$L\vec{U}=\vec{F} \qquad (7-5-9)$$

在细网格上的差分逼近式为

$$L_{h_f}\vec{U}'=\vec{F} \qquad (7-5-10)$$

此时对应于式（7-5-6）和（7-5-8）的方程为

$$L_{h_c}\vec{U}^c=I_f^c(\vec{F}-L_{h_f}\vec{u}^f)+L_{h_c}(I_f^c\vec{u}^f) \qquad (7-5-11)$$

$$\vec{u}_{New}^f=\vec{u}_{old}^f+I_c^f(\vec{u}^c-I_f^c\vec{u}^f)$$

这里 $\vec{u}^c$ 是式（7-5-11）的近似解。

二、欧拉方程的多层网格法

多层网格法的有关理论是针对椭圆型方程的。假设在粗的网格上利用大的时间步长有可能加速逼近于双曲型方程的差分方程解达到稳定状态，使得扰动量能更快地在粗网格上被驱出境外。为了提高精度，需要将粗网格解插到细网格上并在细网格上求解。在这一插值过程中将引入误差，然而它们不可能很快地在细网格上被驱出境外，因而要求此误差在局部点上能很快的被衰减掉。在采用多层网格技术时要求格式有着很快使误差之高频分量衰减的能力。这里将通过在文献〔27〕中给出的具体计算格式来进行讨论。

（一）分配式（Distribution formulae）

首先通过一维欧拉方程（4-2-6）进行讨论。将 U^{n+1} 在 n 点按泰勒级数展开，并利用原方程得

$$\delta\vec{U}=\frac{\Delta t}{2\Delta x}(\vec{f}_{i-1}^n-\vec{f}_{i+1}^n)-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left\{A_{i+1/2}^n(\vec{f}_i^n-\vec{f}_{i+1}^n)\frac{\Delta t}{\Delta x}\right.$$

$$\left.-A_{i-1/2}(\vec{f}_{i-1}^n-\vec{f}_i^n)\frac{\Delta t}{\Delta x}\right\} \qquad (7-5-12)$$

定义

$$\Delta\vec{U}_B=\frac{\Delta t}{\Delta x}(\vec{f}_{i-1}^n-\vec{f}_i^n)$$

$$\Delta\vec{U}_c=\frac{\Delta t}{\Delta x}(\vec{f}_i^n-\vec{f}_{i+1}^n)$$

$$\Delta\vec{F}=A\Delta\vec{U}$$

这里 A 为雅可比矩阵 $D(\vec{f})/D(\vec{U})$，B 和 C 为控制元（参看图

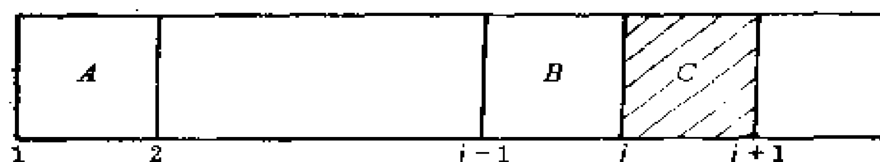


图7-3 控制元与网格点

7-3)。此时方程(7-5-12)可写成

$$\delta \vec{U}_j = \frac{1}{2}\left[\Delta \vec{U}_B + \frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta \vec{F}_B\right] + \frac{1}{2}\left[\Delta \vec{U}_C - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta \vec{F}_C\right] \quad (7\text{-}5\text{-}13)$$

该式表明，在 j 点的修正量由两部分组成，其一为在控制元 B 上由"变化量" $\Delta \vec{U}_B$ 引入的修正量

$$(\delta \vec{U}_j)_B \equiv \frac{1}{2}\left[\Delta \vec{U}_B + \frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta \vec{F}_B\right]$$

另一为在控制元 C 上由"变化量" $\Delta \vec{U}_C$ 引入的修正量

$$(\delta \vec{U}_j)_C \equiv \frac{1}{2}\left[\Delta \vec{U}_C - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta \vec{F}_C\right]$$

用同样办法可以建立在控制元 C 上由"变化量" $\Delta \vec{U}$ 引入的对 $j+1$ 点的修正量

$$(\delta \vec{U}_{j+1})_C \equiv \frac{1}{2}\left[\Delta \vec{U}_C + \frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta \vec{F}_C\right]$$

根据上面的讨论可得到如下三个计算步骤：

（1）计算"变化量"

$$\Delta \vec{U}_C = \frac{\Delta t}{\Delta x}(\vec{f}_j^n - \vec{f}_{j+1}^n) \quad (7\text{-}5\text{-}14)$$

（2）利用"分配式"

$$(\delta \vec{U}_j)_C = \frac{1}{2}\left[\Delta \vec{U}_C - \frac{\Delta t}{\Delta x}\vec{f}_C\right]$$

$$(\delta \vec{U}_{j+1})_C = \frac{1}{2}\left[\Delta \vec{U}_C + \frac{\Delta t}{\Delta x}\vec{f}_C\right] \quad (7\text{-}5\text{-}15)$$

确定对 i 和 $i+1$ 点上的修正量

（3）利用修正量 $\delta \vec{U}_i$ 来计算变量 $\vec{U}^{n+1}$

$$\delta\vec{U}_j=(\delta\vec{U}_j)_B+(\delta\vec{U}_j)_C$$
$$\vec{U}_j^{n+1}=\vec{U}_j^n+\delta\vec{U}_j \qquad (7\text{-}5\text{-}16)$$

（二） 2-D欧拉方程的求解

所需求解的方程为（4-8-5）。参看图 7-4，在体元C上确定变化量

$$\varDelta\vec{U}_C=\left[\frac{(\vec{f}_1)_1+(\vec{f}_1)_2}{2}\varDelta y-\frac{(\vec{f}_1)_3+(\vec{f}_1)_4}{2}\varDelta y\right]$$
$$+\left[\frac{(f_2)_1+(f_2)_4}{2}\varDelta x-\frac{(f_2)_2+(f_2)_3}{2}\varDelta x\right] \qquad (7\text{-}5\text{-}17)$$

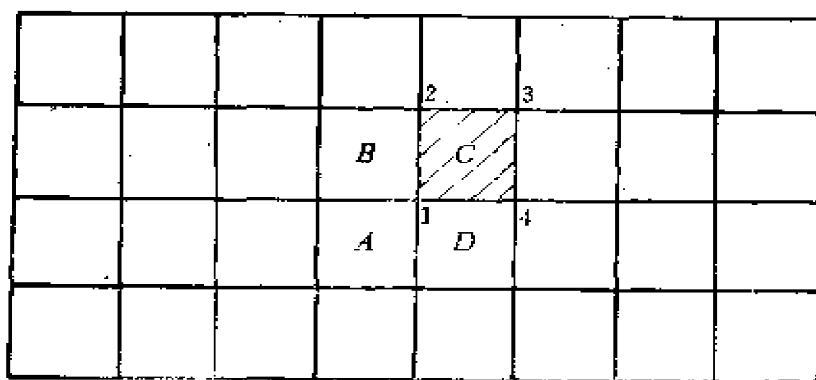


图7-4（a） 二维问题细网格控制元与网格点

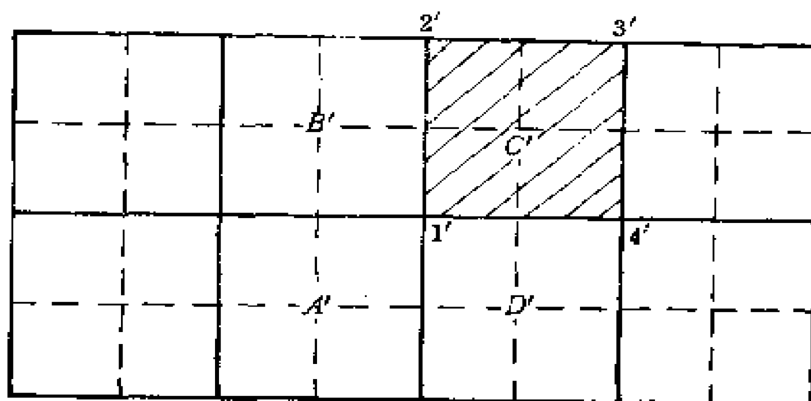


图7-4（b） 二维问题粗网格控制元与网格点

由于变化量$\varDelta\vec{U}_C$而供献给体元C之四个角点上的修正量为

$$(\delta\vec{U}_1)_C=\frac{1}{4}\left[\varDelta\vec{U}_C-\frac{\varDelta t}{\varDelta x}\varDelta(\vec{F}_1)_C-\frac{\varDelta t}{\varDelta y}\varDelta(\vec{F}_2)_C\right]$$

$$(\delta\vec{U}_2)_C=\frac{1}{4}\left[\Delta\vec{U}_C-\frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta(\vec{F}_1)_C+\frac{\Delta t}{\Delta y}\Delta(\vec{F}_2)_C\right] \quad (7\text{-}5\text{-}18)$$

$$(\delta\vec{U}_3)_C=\frac{1}{4}\left[\Delta\vec{U}_C+\frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta(\vec{F}_1)_C+\frac{\Delta t}{\Delta y}\Delta(\vec{F}_2)_C\right]$$

$$(\delta\vec{U}_4)_C=\frac{1}{4}\left[\Delta\vec{U}_C+\frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta(\vec{F}_1)_C-\frac{\Delta t}{\Delta y}\Delta(\vec{F}_2)_C\right]$$

这里

$$\Delta(\vec{f}_k)_C=(\boldsymbol{A}_k)_C\Delta\vec{U}_C$$

$\boldsymbol{A}_k$ 为雅可比矩阵。利用分配式可得到新的变量 $\vec{U}^{n+1}$

$$\delta\vec{U}_1=(\delta\vec{U}_1)_A-(\delta\vec{U}_1)_B+(\delta\vec{U}_1)_C+(\delta\vec{U}_1)_D$$

$$\vec{U}_1^{n+1}=\vec{U}_1^n+\delta\vec{U}_1$$

该显式法的稳定性要求为

$$\Delta t\leqslant\min\left\{\frac{\Delta x}{|u|+c},\ \frac{\Delta y}{|u|+c}\right\}$$

其中 c 为声速。为克服在跨声速和超声速流数值解中的振荡，尼引入了人工粘性，如

$$(\delta\vec{U}_1)_C=\frac{1}{4}\left[\Delta\vec{U}_C-\frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta(\vec{F}_1)_C-\frac{\Delta t}{\Delta y}\Delta(\vec{F}_2)_C+\mu(\bar{\vec{U}}-\vec{U}_1)\right]$$

$$\bar{\vec{U}}=\frac{1}{4}[\vec{U}_1+\vec{U}_2+\vec{U}_3+\vec{U}_4]$$

$$\mu=\delta\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}+\frac{\Delta t}{\Delta y}\right),\quad 0\leqslant\delta\leqslant0.1$$

（三） 多层网格法

对照图 7-4（a） 和 7-4（b），设 $\delta\vec{U}^h$ 为在细网格上的修正量，利用 $\delta\vec{U}^h$ 可得到在粗网格上的变化量

$$\Delta\vec{U}^{2h}=\boldsymbol{T}_h^{2h}\delta\vec{U}^h$$

这里 $\boldsymbol{T}_h^{2h}$ 为一算子，它将细网格上的修正量转换为粗网格上的变化量 $\Delta\vec{U}^{2h}$。可以用直接转换，即将细网格上的 C' 点的 $\delta\vec{U}_{C'}^h$ 修正量转换为粗网格控制元 C' 上的变化量 $\Delta\vec{U}_{C'}^{2h}$。也可用位于该定粗网格上之细网点上修正量加权平均转换为 C' 上的变化量。利用分配式

$$(\delta\vec{U}_{1'})_{C'}=\frac{1}{4}\left\{\Delta\vec{U}_{C'}^{2h}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta(\vec{F}_1)_{C'}^{2h}-\frac{\Delta t}{\Delta y}\Delta(\vec{F}_2)_{C'}^{2h}\right\}$$

$$(\delta\vec{U}_{2'})_{C'}=\frac{1}{4}\left\{\Delta\vec{U}_{C'}^{2h}-\frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta(\vec{F}_1)_{C'}^{2h}+\frac{\Delta t}{\Delta y}\Delta(\vec{F}_2)_{C'}^{2h}\right\}$$

$$(\delta\vec{U}_{3'})_{C'}=\frac{1}{4}\left\{\Delta\vec{U}_{C'}^{2h}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta(\vec{F}_1)_{C'}^{2h}+\frac{\Delta t}{\Delta y}\Delta(\vec{F}_2)_{C'}^{2h}\right\}$$

$$(\delta\vec{U}_{4'})_{C'}=\frac{1}{4}\left\{\Delta\vec{U}_{C'}^{2h}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta(\vec{F}_1)_{C'}^{2h}-\frac{\Delta t}{\Delta y}\Delta(\vec{F}_2)_{C'}^{2h}\right\}$$

来求出由于变化量 $\Delta\vec{U}_{C'}^{2h}$ 引起的对周围4点的修正量，然后可以得到对1′点的修正量

$$\delta\vec{U}_1^{2h}=(\delta\vec{U}_{1'})_{A'}+(\delta\vec{U}_{1'})_{B'}+(\delta\vec{U}_{1'})_{C'}+(\delta\vec{U}_{1'})_{D'}$$

最后可以得到在细网格上经过修正了的量

$$\vec{U}^{New}=\vec{U}+I_{2h}^{h}\delta\vec{U}^{2h} \qquad (7-5-19)$$

应当指出，尼建立的格式对衰减高频误差分量并不理想，因而引入人工粘性项。詹姆生将多重网格技术应用到多步格式中去，提高了对高频误差的衰减作用。尼和詹姆生利用多层网格法计算了亚跨声速流动问题。

参考文献

1 Roach P J. Computational Fluid Dynamics. New Mexico: Hermosa, Albuquerque, 1972.

2 Issacson E and Keller H B. Analysis of Numerical Method. New York: Wiley and Sone, 1966.

3 Thomas L H. Elliptic Problems in Linear Difference Equations Over a Network. Watson Sci. Compt. Lab. Rept., Columbia University, New York, 1949.

4 Douglas J and Gunn J E. A General Formulation of Alternative Direction Methods-Part 1 Parabolic and Hyperbolic Problems. Numerishe Mathematik, 1964, 6: 428~453

5 Warming R F and Beam R M. On the Construction and Application of Implicit Factored Scheme for Conservation Laws. SIAM-AMS Proceedings, 1978, 11.

6 Fu Dexun and Ma Yanwen. An Efficient Nested Iterative Method for Solving the Aerodynamic Equations. Proceedings of 1 th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, NASA Langley

Research Center, 1988.

7 Ma Yanwen and Fu Dexun. A Simple and Efficient Implicit Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations. Proceedings of the 10th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Beijing. 1986.

8 Lombard C K, Bardina J, Venkatapathy E and Oliger J. Multi-Dimensional Formulation of CSCM-An Upwind Flux Difference Eigenvector Split Method for the Compressible Navier-Stokes Equations. AIAA Paper No. 83-1895

9 Lombard C K, Venkatapathy E and Bardina J. Universal Single Level Implicit Algorithm for Gasdynamics. AIAA Paper No. 84-1533

10 Bardina J and Lombard C K. Three Dimensional CSCM Method for the Compressible Navier-Stokes Equations with Application to a Multi-Nozzle Exhaust Flowfield. AIAA Paper No. 85-1193

11 Bardina J and Lombard C. K. Three Dimensional Hypersonic Flow Simulation with the CSCM Implicit Upwind Navier-Stokes Method. AIAA Paper No. 87-1114

12 MacCormack R W. Current status of Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations. AIAA Paper No. 85-032

13 Anderson D A, Tannehill J C and Pletcher R H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. New York: London Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1984.

14 程心一. 计算流体力学——偏微分方程的数值解法. 北京: 科学出版社, 1984.

15 Chakravarthy S R. Relaxation Methods for Unfactored Implicit Upwind Schemes AIAA Paper No. 84-0165

16 Pulliam T H and Chaussee D S. A Diagonal Form of an Implicit Approximate Factorization Algorithm. J. C. P. 1981, 39, 347.

17 Fu Dexun and Ma Yanwen. A New Modified Semi-Explicit Difference Scheme in Aerodynamics. Proceedings of the 9th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Paris, 1984.

18 Shang J S and Hankey W L. Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations for a Three-Dimensional Corner. AIAA Paper No. 77-169

19 Srinivasan G R Chyu W J and Steger J L. Computation of Simple Three-Dimensional Wing Vortex Interaction in Transonic Flow AIAA Paper No. 81-1206

20 McDonald H and Briley W R. Computational Fluid Dynamic Aspects of Internal Flows. AIAA Paper No. 79-1445

21 Coakley T J. Numerical Method for Gas Dynamics Combining Characte-

ristic and Conservation Concepts. AIAA Paper No. 81-1257

22 马延文. 人工不定常方法数值求解一维Navier-Stokes方程. 计算数学 1978.

23 Warming R F, Kutler P and Lomax H. Second and Third-Order Noncentred Difference Schemes for Nonlinear Hyperbolic Equations. AIAA J. 1973, 11 (2)

24 Jameson A. Transonic Flow Calculation. MAE Report, 1651, Dept. of Mechanical and Aerospace Engineering, Princeton University.

25 Pulliam T H and Steger, J L. Recent Improvements in Efficience, Accuracy and Convergence for Implicit Approximate Factorization Algorithms. AIAA Paper No. 85-0360

26 Jameson A. Multigrid Algorithms for Compressible Flow Calculations Second European Conference on Multigrid Method, Cologne, 1985

27 Ni Ron Ho. A Multiple Grid Scheme for Solving the Euler Equations. AIAA J. 1982, 20: 1565~1571

28 Jameson A. Solution of the Euler Equations by a Multigrid Method. Applied Math. & Computation, 1983, 13: 327~356

29 Zhuang F. G and Zhang X H. On a Marching Iterative Method in Solving Gas Dynamic Equations. Lecture Notes in Physics, 10th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Beijing, 1986.

30 Stookesberry D C and Tannehill u J C Computation of Separated Flow Using the Space-Marching Conservative Supra-Characteristics Method AIAA J., 1987, 25(8)

31 余泽楚. 求解Navier-Stokes方程的标量追赶法. 中国空气动力研究与发展中心第二届CFD会议文集, 1988.

32 Brandt A J E, Dendy Jn and Ruppel H. The Multigrid Method for Semi-Implicit Hydrodynamics Codes. J. of Compt. Physics, 1980, 34: 348-370

第八章　钝头体超声速粘性绕流

在空气动力学的研究中，依据各种飞行器设计的要求，常常需要确定物体在空气中飞行时它周围空气的压力、密度和温度的变化，以及物体表面上各点的受力情况。这一物理问题涉及许多因素，如空气的粘性、空气受热时物理化学性质的变化、物体形状、飞行速度等。这类物理问题可化为数学问题，以不同类型的偏微分方程描述，因而要给出上述力学问题的定量描述，在计算流体力学的研究中，需采用数值计算方法，求解对应的偏微分方程组（对于完全气体为可压缩N-S方程）的初边值问题即可。

依据所求问题的复杂程度和计算技术的现状，对于不同的问题，可对N-S方程做各种不同的简化，然后对简化方程进行数值求解。

在本书的第一部分，对一些基本方法做了简单的描述。在本章中将介绍采用这些方法求解简化N-S方程，给出钝头体超声速粘性绕流的零攻角（即轴对称绕流）流场解。

第一节　基本方程与坐标变换

在计算中选用坐标系（s，n），如图 8-1 所示。

其中 $n=0$ 的坐标线由四个部分组成，第一部分由圆心在对称轴上，半径为 1 的球面所组成；第二部分是与第一部分的球面相切的锥面组成。该锥面的半锥角 $\theta_c=\frac{\pi}{2}-\theta_0$，$\theta_0$ 为第一部分的球面最大张角（参见图 8-1）；第三部分为球心在对称轴上，半径为 R_a，且与第二部分锥面相切的球环面组成；最后一段为与第三部分的球面相切的柱面所组成。

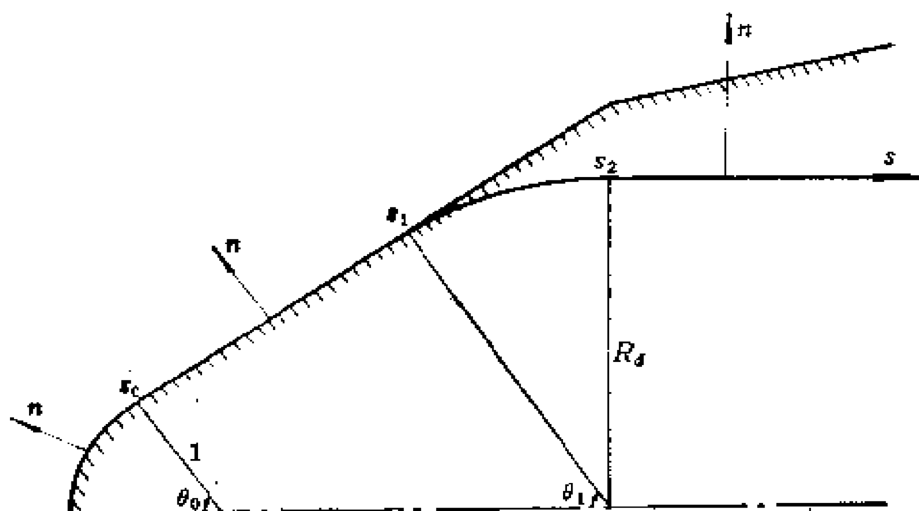


图8-1　坐标系

在选定的坐标系下，经无量纲化后的N-S方程的向量形式可写为（对于完全气体）

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}+\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial s}+\frac{\partial \vec{f}_2}{\partial n}=\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial s}+\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial n}+\vec{D}_1+\vec{D}_2 \qquad (8\text{-}1\text{-}1)$$

上式中 $\vec{U}$、$\vec{f}_1$、$\vec{f}_2$、$\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、$\vec{D}_1$ 和 $\vec{D}_2$ 皆为四维向量，其表达式如下

$$\vec{U}=RH\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{bmatrix},\quad \vec{f}_1=R\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ u(E+p)\end{bmatrix}$$

$$\vec{f}_2=RH\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ v(E+p)\end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_1=R\begin{bmatrix}0\\ \sigma_{11}\\ \sigma_{12}\\ u\sigma_{11}+v\sigma_{12}+\frac{\lambda}{H}Q\frac{\partial T}{\partial S}\end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_2 = RH\begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ u\sigma_{21} + v\sigma_{22} + \mu Q \dfrac{\partial T}{\partial n} \end{bmatrix}$$

$$\vec{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ Hp\cos\theta - \dfrac{R}{R_1}\rho uv \\ -\dfrac{R}{R_1}(\rho u^2 + p) + Hp\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{R}{R_1}\sigma_{12} - \sigma_{22}H\cos\theta \\ -\dfrac{R}{R_1}\sigma_{11} - \sigma_{22}H\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中

$$P = \frac{1}{\gamma M_\infty^2}\rho T、\quad E = \rho\left(C_v T + \frac{u^2+v^2}{2}\right) \qquad (8\text{-}1\text{-}2)$$

式中 γ 为比热比，C_v 为等容比热，

$$C_v = \frac{1}{\gamma(\gamma-1)M_\infty^2},\quad e = C_v T \qquad (8\text{-}1\text{-}3)$$

在方程中 ρ， u， v， T， μ 分别为密度，速度在两个坐标方向上的分量，温度和粘性系数，它们是以对应的各来流量进行无量纲化的。p 和 e 为压力和内能，它们分别以 $u_\infty \rho_\infty^2$，u_∞^2 进行无量纲化，M_∞ 为来流马赫数。这里下标∞表示来流参数。C_p 为定压比热，Pr 为普朗特（Prandtl）数，Re 为雷诺数，在本章中取球头半径 R_0 为特征长度，且有

$$Q = \frac{C_p}{p_r Re}$$

方程中的 H 为拉梅系数，R_1 为坐标曲率半径，R 为空间某一点到

对称轴的距离。在所选定的坐标系内，有以下表达式

$$\frac{1}{R_1}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+d_r} & 0\leqslant S\leqslant S_0\\ 0 & S_0\leqslant S<S_1\\ \dfrac{1}{d_r+R_d} & S_1\leqslant S<S_2\\ 0 & S_2\leqslant S\end{cases}$$

这里 S_0 为第一部分坐标线与第二部分坐标线的接点，即球锥的接点；S_1 为第二、三部分坐标线的接点位置；S_2 为第三、四部分坐标线的接点位置（参见图 8-1，图中 $d_r=0$）。

$$R=\begin{cases}(1+d_r+n)\sin\theta & 0\leqslant S<S_0\\ (1+d_r+n)\sin\theta_0+(S-S_0)\cos\theta_0 & S_0\leqslant S<S_1\\ (d_r-R_d+n)\sin\theta_0+(S-S_0)\cos\theta_0+(1-R_d)\sin\theta_0 & \\ \qquad S_1\leqslant S<S_2 & \\ (d_r-R_d+n)\sin\theta_1+(S-S_0)\cos\theta_0+(1-R_d)\sin\theta_0 & \\ \qquad +(S-S_2)\cos\theta_1 \quad S_2\leqslant S & \end{cases} \tag{8-1-4}$$

这里 θ 为坐标法线与对称轴之间的夹角；θ_0 为 $S=S_0$ 处的 θ 值；θ_1 为 $S=S_1$ 处的 θ 值。

方程中 $\sigma_{i,j}$ 为粘性应力，其表达式为

$$\begin{cases}\sigma_{11}=2\dfrac{\mu}{Re}\left[\dfrac{1}{H}\left(\dfrac{\partial u}{\partial S}+\dfrac{v}{R_1}\right)-\dfrac{1}{3}\operatorname{div}\vec{V}\right]\\ \sigma_{22}=2\dfrac{\mu}{Re}\left[\dfrac{\partial v}{\partial n}-\dfrac{1}{3}\operatorname{div}\vec{V}\right]\\ \sigma_{12}=\dfrac{\mu}{Re}\left[\dfrac{\partial u}{\partial n}+\dfrac{1}{H}\left(\dfrac{\partial v}{\partial S}-\dfrac{u}{R_1}\right)\right]\\ \operatorname{div}\vec{V}=\dfrac{1}{H}\left(\dfrac{\partial u}{\partial S}+\dfrac{\partial Hv}{\partial n}\right)-\dfrac{u\cos\theta+v\sin\theta}{R}\\ \sigma_{12}=\sigma_{21}\end{cases} \tag{8-1-5}$$

为了能正确地描述近物面附近的粘性流动特性，要求在此粘性层内有足够多的网格点，为此在坐标法向（n 方向）引进坐标

变换。考虑钝头体超声速理想气体绕流，设 $n = B_i(s)$ 为计算区域的内边界，如物面；$n = B_e(t, s)$ 为计算区域的外边界，如激波。首先引入坐标变换，使计算区域规格化为

$$\begin{cases} \zeta = \dfrac{n - B_i(s)}{\delta} \\ \delta = B_e(\tau, s) - B_i(s) \end{cases} \tag{8-1-6}$$

不难看出，当 $n = B_i(s)$ 时，即在物面上，$\zeta = 0$；当 $n = B_e(\tau, s)$ 时，即在激波上，$\zeta = 1$。然后将 ζ 在[0，1]中分为三个区域：[0，δ_0]为近物面之粘性区，在此区域内 n 方向取等距细网格；在[δ_1，1]区域内取等距粗网格，因这是离开物面较远的区域，粘性效应较小，较粗的计算网格已能满足计算精度；在上面两个区域之间的[δ_0，δ_1]区域内取变网格。由于靠近物面的[0，δ_0]区域内和靠近激波的[δ_1，1]区域内，在物理坐标 n 方向上是等距网格，故易于边界处理。在计算坐标内，整个计算区域都是等距网格，参见图 8-2。此外，为了避免由坐标变换带来的对数值解的非物理影响，要求不同网格之间的接点处，如 $\zeta = \delta_0$ 和 $\zeta = \delta_1$ 处，坐标函数值和导数值相等。利用这两个条件，确定坐标变换函数中的系数。

在计算中选用如下坐标变换：

$$\begin{cases} t = \tau \\ x = s \\ z = z(\zeta) \end{cases} \tag{8-1-7}$$

这里

$$z(\zeta) = \begin{cases} A(\zeta - 1) + 1 & \delta_1 \leqslant \zeta \leqslant 1 \\ B\ln(1 + b\zeta) + C & \delta_0 \leqslant \zeta \leqslant \delta_1 \\ D\zeta & 0 \leqslant \zeta \leqslant \delta_0 \end{cases} \tag{8-1-8}$$

变换关系中所出现的系数有以下表达式：

$$B = \frac{1}{\ln\left(\dfrac{1 + b\delta_1}{1 + b\delta_0}\right) + \dfrac{(1 - \delta_1)b}{1 + \delta_1 b} + \dfrac{\delta_0 b}{1 + \delta_0 b}}$$

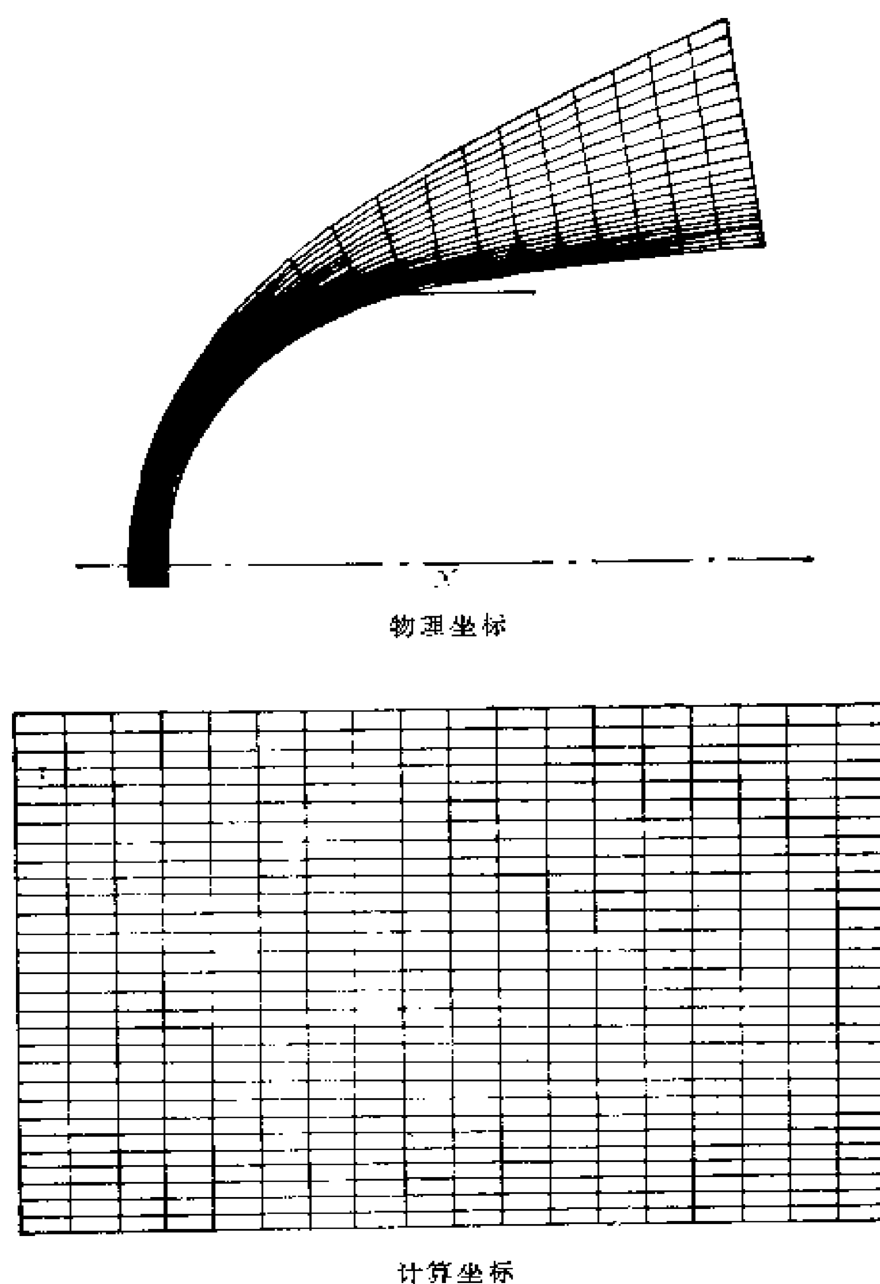


图8-2 坐标转换图

(a) 物理坐标；(b) 计算坐标。

$$A=\frac{bB}{1+b\delta_1},\qquad D=\frac{bB}{1+b\delta_0}$$

$$C=D\delta_0-B\ln(1+b\delta_0)$$

由式（8-1-8）可得相应的反变换关系为

$$\zeta=\begin{cases}\dfrac{1}{A}(z-1)+1 & \tilde{\delta}_1\leqslant z\leqslant 1\\ [e^{1/B(z-C)}-1]/b & \tilde{\delta}_0\leqslant z\leqslant\tilde{\delta}_1\\ z/D & 0\leqslant z\leqslant\tilde{\delta}_0\end{cases}$$

式中的 $\tilde{\delta}_0$ 和 $\tilde{\delta}_1$ 为在 z 坐标内与 δ_0 和 δ_1 对应的值；b 为加密参数，用以控制细网格的尺度。这里所得的坐标（t，x，z）为计算坐标，它与物理坐标（τ，s，n）之间有以下导数关系：

$$\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}$$

再利用式（8-1-7）和（8-1-8）可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\tau}=\dfrac{\partial}{\partial t}-NL\dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial}{\partial s}=\dfrac{\partial}{\partial x}-NM\dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial}{\partial n}=N\dfrac{\partial}{\partial z}\end{cases}\tag{8-1-9}$$

其中

$$\begin{cases}N=z_\zeta/\delta,\quad L=\zeta\dot{\delta}\\ M=[B'_{l,s}+\zeta\delta'_s]\end{cases}\tag{8-1-10}$$

这里 $\dot{\delta}$ 表示 δ 对 t 的导数；z_ζ 表示 z 对 ζ 的导数；$B'_{l,s}$ 和 δ'_s 对应表示 B_l 和 δ 对 s 的导数，且有

$$z_\zeta=\begin{cases}A & \tilde{\delta}_1\leqslant z\leqslant 1\\ \dfrac{Bb}{1+b\zeta} & \tilde{\delta}_0\leqslant z\leqslant\tilde{\delta}_1\\ D & 0\leqslant z\leqslant\tilde{\delta}_0\end{cases}$$

经坐标变换后的方程（8-1-1）有以下形式

$$\frac{\partial\dot{U}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{f}_1}{\partial x}+N\left[\frac{\partial\vec{f}_2}{\partial z}-L\frac{\partial\dot{U}}{\partial z}-M\frac{\partial\vec{f}_1}{\partial z}\right]$$

$$= \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x} + N\left[\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial z} - M\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial z}\right] + \vec{D}_1 + \vec{D}_2 \qquad (8\text{-}1\text{-}11)$$

式（8-1-11）中的向量 U，f_i，F_i（$i=1$，2）的表达式与式（8-1-1）中的相同，而坐标变换后的粘性应力 $\sigma_{i,j}$ 有以下表达式

$$\sigma_{11} = \frac{2\mu}{Re}\left[\frac{1}{H}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - NM\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{v}{HR_1} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{V}\right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{2\mu}{Re}\left[N\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{V}\right]$$

$$\sigma_{21} = \frac{\mu}{Re}\left[N\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{H}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - NM\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u}{R_1}\right)\right]$$

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - NM\frac{\partial u}{\partial z} + N\frac{\partial (HV)}{\partial z}\right] + \frac{u\cos\theta + v\sin\theta}{R}$$

在具体计算中，对粘性系数 μ 利用了萨泽兰特（Sutherland）公式。考虑到 x 方向的粘性效应与 z 方向的粘性效应比较是小量，为了简化计算和节省计算机时，在计算中忽略了粘性项中对 x 的二阶导数有关的各项。

第二节　差分格式与求解方法

方程（8-1-11）的差分逼近式由两部分构成：显式部分和隐式部分。在显式部分中，利用了普通的中心差分；在隐式部分中利用了雅可比系数矩阵分裂法。系数矩阵是采用了第四章中的第（3）种分裂方法。对于差分化后所得到的代数方程采用了两种方法求解，其一为第七章第二节中所介绍的近似因式分解方法，另一为嵌套式的迭代方法，这里将主要介绍后者。

差分化后的方程有以下形式

$$\Delta \vec{U}_{i,j} = \Delta t \vec{F}_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^0(\vec{f}_1)_{i,j} - N_{i,j}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left[\delta_z^0(\vec{f}_2)_{i,j} - L_{i,j}\delta_z^0 U_{i,j} - M_{i,j}\delta_z^0(\vec{f}_1)_{i,j}\right] \qquad (8\text{-}2\text{-}1)$$

$$\left\{ I + \alpha_1 \left[\delta_x^- \frac{1}{H} \widetilde{A}^+ + \delta_x^+ \frac{1}{H} \widetilde{A}^- \right] \right.$$

$$\left. + \alpha_2 \left(\delta_z^- \widetilde{B}^+ + \delta_z^+ \widetilde{B}^- \right) \right\} \delta_t \vec{U}_{i,j}^{n+1} = \Delta \vec{U}_{i,j}^n \qquad (8-2-2)$$

$$\vec{U}_{i,j}^{n+1} = \vec{U}_{i,j}^n + \delta_t \vec{U}_{i,j}^{n+1} \qquad (8-2-3)$$

式中F为由粘性项部分及自由项$\vec{D}_1$和$\vec{D}_2$（参见式（8-1-11））之和组成，对它们采用了普通中心差分。式中$\widetilde{A}^{\pm}$和$\widetilde{B}^{\pm}$为4×4阶的矩阵，且有以下表达式：

$$\widetilde{A}^{\pm} = A^{\pm} \pm \sigma_1 I, \quad \widetilde{B}^{\pm} = B^{\pm} \pm \sigma_2 I \qquad (8-2-4)$$

式中矩阵$A^{\pm}$和$B^{\pm}$是对矩阵A和B分裂后而得的。矩阵A和B是对应于式（8-1-11）的雅可比矩阵，即

$$A = \frac{D(\vec{f}_1)}{D(\vec{U})},$$

$$B = N\left[\frac{D(\vec{f}_2)}{D(\vec{U})} - LI - M\frac{D(\vec{f}_2)}{D(\vec{U})}\right]$$

且有

$$A = S_1^{-1} \Lambda_1 S_1, \quad B = S_2^{-1} \Lambda_2 S_2$$

上式中Λ_1和Λ_2分别为由A和B矩阵的特征值λ_k所组成的对角矩阵。且λ_k有以下表达式

对于矩阵A：

$$\lambda_{1,2}(A) = u, \quad \lambda_{3,4}(A) = u \mp c$$

对于矩阵B：

$$\lambda_{1,2}(B) = \tilde{v}, \quad \lambda_{3,4}(B) = \tilde{v} \mp \tilde{c}$$

其中
$$\tilde{v} = N\left(-L - \frac{M}{H} u + v\right)$$

$$\tilde{c} = N\sqrt{1 + (M/H)^2}\, c$$

由此可得

$$A^{\pm} = S_1^{-1} \Lambda_1^{\pm} S_1, \quad B^{\pm} = S_2^{-1} \Lambda_2^{\pm} S_2$$

$\Lambda_k^{\pm}$是对Λ_k分裂后的对角矩阵，Λ_k^+对应于正特征值；Λ_k^-对应于负特征值。

$$\lambda_{1,2,3}^+(A) = u^+, \quad \lambda_4^+(A) = u^+ + c$$

$$\lambda^{-}_{1,2,4}(\boldsymbol{A})=u^{-},\quad \lambda^{-}_{3}(\boldsymbol{A})=u^{-}-c$$
$$\lambda^{+}_{1,2,3}(\boldsymbol{B})=\tilde{v}^{+},\quad \lambda^{+}_{4}(\boldsymbol{B})=\tilde{v}^{+}+\tilde{c}$$
$$\lambda^{-}_{1,2,4}(\boldsymbol{B})=\tilde{v}^{-},\quad \lambda^{-}_{3}(\boldsymbol{B})=\tilde{v}^{-}-\tilde{c}$$
$$u^{\pm}=\frac{u\pm|u|}{2},\quad \tilde{v}^{\pm}=\frac{\tilde{v}\pm|\tilde{v}|}{2}$$

在式（8-2-4）中的σ_k是为了改善差分方程中粘性项的稳定性由算子附加修正方法确定的（参见第七章），即

$$\begin{cases}\sigma_1=\max\left\{0,\ \dfrac{\mu\gamma H^2}{\Delta tRePr\rho}-\dfrac{\Delta x}{2\Delta t}\right\}\\ \sigma_2=\max\left\{0,\ \dfrac{\mu\gamma N^2}{\Delta tRePr\rho}\left[1+\left(\dfrac{M}{H}\right)^2\right]-\dfrac{\Delta y}{2\Delta t}\right\}\end{cases}\tag{8-2-5}$$

在式（8-2-2）中出现的系数α_k为

$$\alpha_1=\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x},\quad \alpha_2=\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta z}$$

关于相似变换矩阵$\boldsymbol{S}_k^{-1}$和$\boldsymbol{S}_k$的表达式可参见第四章中的附录。对于$\boldsymbol{S}_1^{-1}$和$\boldsymbol{S}_1$，附录中的α和β应取$\alpha=1$，$\beta=0$；对于$\boldsymbol{S}_2^{-1}$和$\boldsymbol{S}_2$，应取附录中的$\alpha=-MN/H$，$\beta=N$。差分方程(8-2-2)中的隐式部分在时间方向只有一阶精度（空间差分为二阶精度），但因这里所感兴趣的仅是定常状态的解，所以方法仍是二阶精度的（对于定常解）。

对差分方程（8-2-2）采用嵌套式迭代方法进行求解。外层采用线高斯-塞德尔（Gauss-Seidel）迭代方法，将原来所需的五对角块矩阵求逆简化为三对角块矩阵求逆；内层采用简单迭代，将三对角块矩阵求逆化为三对角线矩阵求逆（参见第七章）。求解过程的展开式为

$$\begin{aligned}&\alpha_2(\tilde{v}^{-}\delta_t\vec{U}^{q+1})_{i,j+1}+\left\{\left[1+\frac{\alpha_1}{H}(|u|+c)+\alpha_2(|\tilde{v}|+\tilde{c})\right]\delta_t\vec{U}^{q+1}\right\}_{i,j}\\&\quad-\alpha_2(\tilde{v}^{+}\delta_t\vec{U}^{q+1})_{i,j-1}\\&\quad=\Delta\vec{U}_{i,j}+\alpha_1\left\{\left[\frac{u^{+}}{H}\boldsymbol{I}+\frac{C}{H}\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{I}_4\boldsymbol{S}_1\right]\delta_t\vec{U}\right\}_{i-1,j}\end{aligned}$$

$$-\alpha_1\left\{\left[\frac{u^*}{H}\boldsymbol{I}-\frac{C}{H}\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{S}_1\right]\delta_t\vec{U}\right\}_{i+1,j}$$

$$+\alpha_2\{(\bar{c}\boldsymbol{S}_2^{-1}\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{S}_2\delta_t\vec{U}^{q})_{i,j+1}+(\bar{c}\boldsymbol{S}_2^{-1}\boldsymbol{I}_4\boldsymbol{S}_2\delta_t\vec{U}^{q})_{i,j-1}\}$$

$$+\left\{\frac{\alpha_1 c}{H}[\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_1^{-1}\boldsymbol{I}_4\boldsymbol{S}_1)]\right.$$

$$\left.+\alpha_2\bar{c}[\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{S}_2^{-1}\boldsymbol{I}_3\boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{S}_2^{-1}\boldsymbol{I}_4\boldsymbol{S}_2)]\right\}_{i,j}\delta_t\vec{U}^{q}_{i,j} \qquad (8-2-6)$$

式（8-2-6）中右端的 $\Delta\vec{U}_{i,j}$ 为已知，当按 i 的增长方向求解时，$\{____\}_{i-1,j}$ 项为已知；当按 i 的递减方向进行求解时，方程中的 $\{____\}_{i+1,j}$ 项为已知。在取定 i 按 j 方向求解时，给定初始迭代值 $\delta_t\vec{U}^{q}_{i,j}$ 后可从式（8-2-6）中求出 $\delta_t\vec{U}^{1}_{i,j}$ 来，此时，只需进行三对角线矩阵求逆的运算就可以了。原则上 $\delta_t\vec{U}^0$ 可任意给定，例如可取 $\delta_t\vec{U}^0=0$，在这里的计算中取 $\delta_t\vec{U}^0=\Delta\vec{U}_{i,j}$，且只进行了一次内层迭代。式（8-2-6）中的上标 q 是迭代次数．式中所出现的 $\boldsymbol{I}_k$ 为对角矩阵，其对角元素除第 k 个元素为 1 外，其余元素皆为零，例如

$$\boldsymbol{I}_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{I}_k$ 的特殊形式，式（8-2-6）中的右端各项的计算量并不大，因为有

$$\boldsymbol{S}_l^{-1}\boldsymbol{I}_k\boldsymbol{S}_l\delta_t\vec{U}=\beta_{l,k}[(S_l^{-1})_{1,k},\ (S_l^{-1})_{2,k},\ (S_l^{-1})_{3,k},\ (S_l^{-1})_{4,k}]^T$$

$$\beta_{l,k}=\sum_i(S_l)_{k,i}(\delta_t U)_i$$

$$l=1,\ 2,\qquad k=3,\ 4$$

式中 $(S_l)_{i,j}$ 和 $(S_l^{-1})_{i,j}$ 是矩阵 S_l 和 S_l^{-1} 的元素，它们的分析表达式可以在第四章的附录内得到。

第三节　边 界 条 件

考虑超声速钝头体绕流，计算区域在攻角 $\alpha=0$ 时，为对称轴、物面和激波所包围的区域，如图 8-3 中的阴影部分。

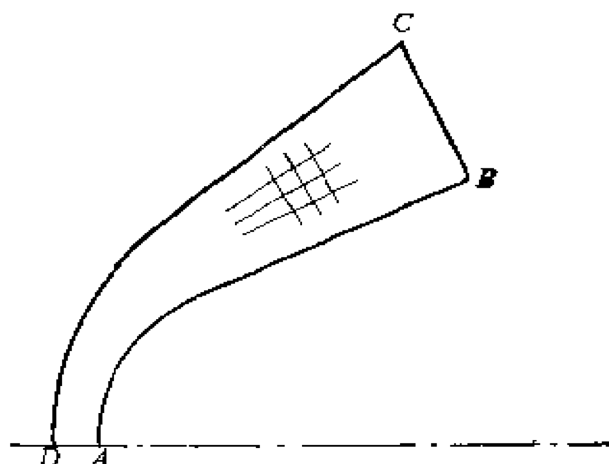


图8-3　计算区域

设下游边界距离前体驻点（A 点）有一定的距离，使在下游边界 BC 上除近物面的薄粘性层以外，其余的部分都是超声速流动。这样，在下游边界 BC 上可采用外插条件。这里采用了二阶精度的外插公式

$$f_{IN}=\frac{1}{3}(4f_{IN-1}-f_{IN-2}),\quad f=u,\ v,\ p,\ \rho$$

这里，IN 表示 s 方向下游边界 BC 上的网格点。

在物面上，利用无滑流和等温条件有：

$$u=v=0$$
$$T=T_w$$

这里下标 w 表示物面参数。

在对称轴上，采用流动参数的对称条件。

在激波上的边界条件：利用激波处的间断条件式（1-4-9），在二维的情况下可推出激波前后关系式的无量纲形式为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{r-1}{r+1} + \dfrac{2}{r+1} \dfrac{1}{M_\infty^2(V_{\infty,n}-Z)^2} \\ p_s = \dfrac{1}{rM_\infty^2} + \left(1-\dfrac{1}{\rho_s}\right)(V_{\infty,n}-Z)^2 \\ u_s = u_\infty - \left(1-\dfrac{1}{\rho_s}\right) n_1(V_{\infty,n}-Z) \\ v_s = v_\infty - \left(1-\dfrac{1}{\rho_s}\right) n_2(V_{\infty,n}-Z) \end{cases} \tag{8-3-1}$$

这里下标∞表示激波前的参数，下标 s 表示激波后的参数。u，v 表示坐标（s，n）方向上的速度分量，（n_1，n_2）为激波法向量的分量。若激波形状 $B_s(\tau,\ s)$ 为已知，则激波法向量为

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\dfrac{(B_s)'_s}{H}\right]^2}} \begin{Bmatrix} -\dfrac{(B_s)'_s}{H} \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{8-3-2}$$

这里 $(B_s)'_s = \partial B_s/\partial s$。

关系式(8-3-1)中的 $V_{\infty,n}$ 为来流速度 $\vec{V}_\infty$ 在激波法向上的分量，即

$$V_{\infty,n} = u_\infty n_1 + v_\infty n_2$$

在所选定的坐标系和无量纲定义下有

$$u_\infty = \sin\theta, \quad v_\infty = -\cos\theta$$

θ 为坐标法向与对称轴之间的夹角。

从关系式（8-3-1）中的第二个式子可以推得激波法向速度 Z 为

$$Z = V_{\infty,n} + \left[\frac{r+1}{2}\left(p_s - \frac{1}{rM_\infty^2}\right) + \frac{1}{M_\infty^2}\right] \tag{8-3-3}$$

这里 M_∞ 为来流马赫数。

由此可得

$$\frac{\partial B_s}{\partial t} = \left\{1+\left[\frac{(B_s)'_s}{H}\right]^2\right\}^{1/2} Z \tag{8-3-4}$$

激波点的边界条件可描述如下。首先利用 n 时间层的已知激波形状 $B_s(n\Delta t,\ s)$ 按式(8-3-2)求出激波法向向量，然后求出

来流速度在激波法向方向的分量$V_{\infty,n}$。再利用内点的显式差分格式（或者特征方程）采用单边差分求出波后压力值p_s。将所求得的$V_{\infty,n}$和p_s代入式（8-3-3），可求激波法向速度Z。由式（8-3-4）可求出激波形状对时间t的导数。最后可求得$n+1$时间层的激波形状为

$$B_s^{n+1}=B_s^n+\left(\frac{\partial B_s}{\partial t}\right)^n \Delta t \qquad (8\text{-}3\text{-}5)$$

然后再利用$B_s((n+1)\Delta t,\ s)$求出激波法向向量，代入激波前后关系式（8-3-1），求出$n+1$时间层上激波点处的参数值。

第四节　计 算 结 果

一、钝锥超声速粘性绕流的数值解

对这一物理问题采用了两种方法计算，一为近似因式分解法，另一为嵌套式迭代方法。这里给出了特殊系数矩阵分裂的近似因式分解方法的计算结果[1]。计算条件为：半锥角$\theta_c=7.5°$，来流马赫数$Ma_\infty=13.41$，雷诺数$Re=1515$，$T_w/T_0=0.0741$，$T_\infty=200°R$，T_0为驻点温度。计算网格点数为$IN\times JN=21\times 31$，IN，JN分别为s，n方向的网格点数。计算过程中的迭代次数约为800步。在图8-4中给出了激波形状和声速线位置的计算结果。

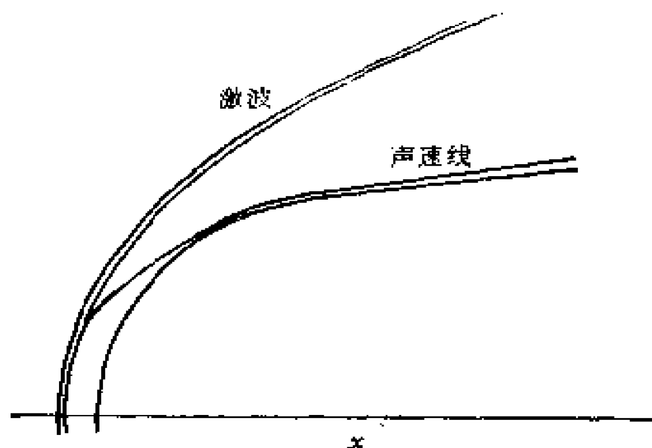


图8-4　激波形状和声速线
（$Ma_\infty=13.41$，$Re=1515$）

在图 8-5 和图 8-6 中，分别给出了物面压力分布和热流分布.为了比较，在图中还给出了文献[2]中的计算结果和相应的实验

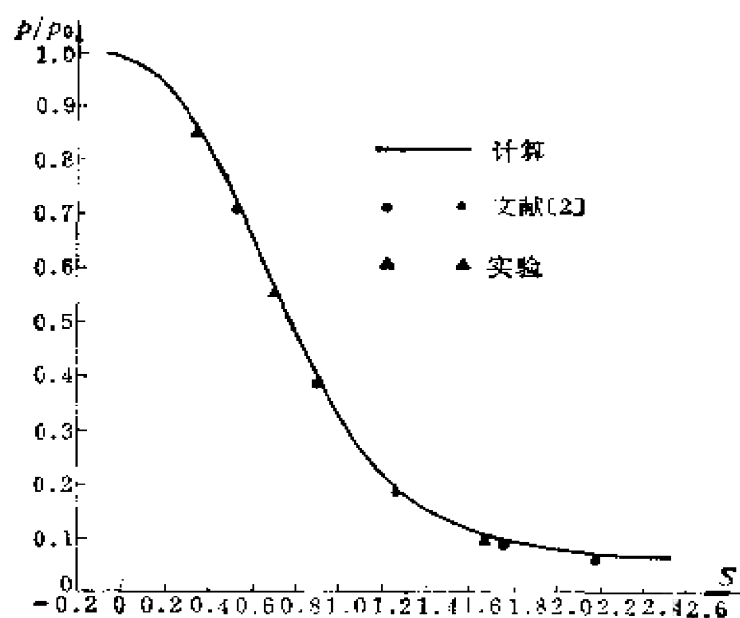


图8-5　物面压力分布
($Ma_\infty = 13.4$，$Re = 1515$)

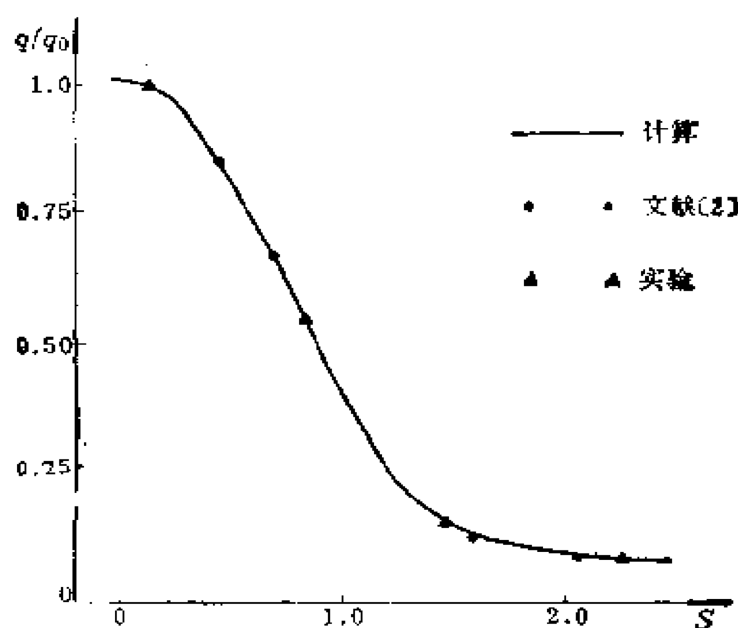


图8-6　物面热流分布
($Ma_\infty = 13.41$，$Re = 1515$)

结果。从图中可以看出，计算结果与实验值相符甚好，只是后体处计算结果的压力值比实验值略为偏高一点。

二、烧蚀型钝头体超声速粘性绕流计算

这里采用系数矩阵分裂和嵌套式迭代方法（参见第七章），求解方程（8-1-11），给出烧蚀型钝头体超声速粘性绕流的计算结果。其物体外形如图 8-9 中所示。计算中选用的来流马赫数为 $Ma_\infty=5.85$，$Re=10^6$。计算网格点数为 $IN\times JN=51\times41$，迭代次数约为 2000 次。在图 8-7 中给出了物面压力分布。

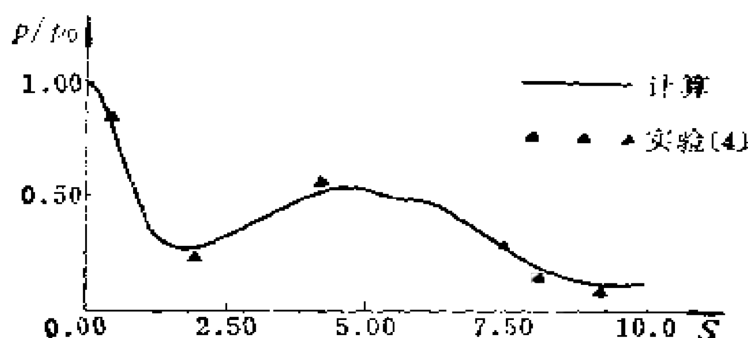


图8-7 物面压力分布
$(Ma_\infty=5.85,\ Re=10^6)$

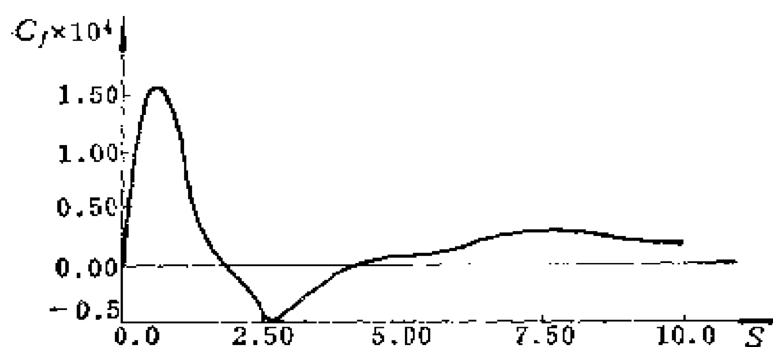


图8-8 物面摩阻分布
$(Ma_\infty=5.85,\ Re=10^6)$

图 8-8 给出了物面摩阻分布。

图 8-9 给出了物形和速度向量场分布的计算结果。

为了比较，在图 8-7 中给出了相应的压力分布实验值，由此

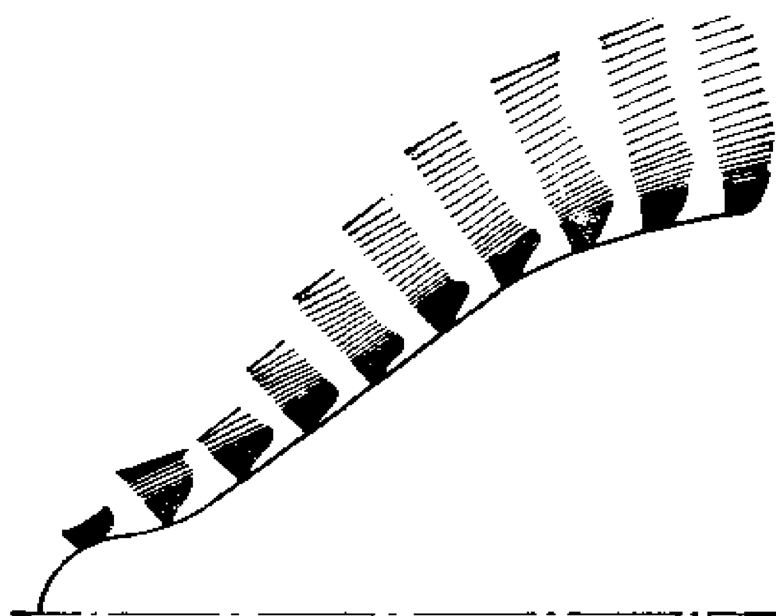


图8-9 物形和速度向量场

($Ma_\infty=5.85$, $Re=10^6$)

可以看出计算结果与实验值符合甚好。另外，从图 8-8 中可以看到，在头部凹形区附近，存在有分离区（摩阻出现负值区），在图 8-9 的速度场中，也可以看到对应的回流速度型分离区。

参考文献

1 Ma Yanwen and Fu Dexun. A Simple and Efficient Implicit Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations. Proceeding of the 10th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Beijing, 1986.

2 Strivastava B N, Werle M J. and Davis R T. Numerical Solutions of Hypersonic Viscous Shock-Layer Equations. AIAA J., 1979, 17: 107~110

3 Fu Dexun and Ma Yanwen. An Efficient Nested Itevative Method for Solving the Aerodynamic Equations. Proceeding of the 11the International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Longley Research Center. 1988.

第九章　PNS方程空间推进求解方法

采用空间推进方法求解定常抛物化纳维-斯托克斯方程（简称PNS方程）来数值模拟定常粘性流动问题，比较采用时间相关方法求解非定常N-S方程或非定常PNS方程来数值模拟同一问题有其明显的优点：该方法将大大节省计算时间和计算机内存；另一方面，因PNS方程不同于边界层方程，方程中不但包含了主要粘性项，而且保留了无粘欧拉方程中所有的项，故它能自动模拟边界层内的粘性流动与外流无粘流之间的相互干扰。对于流向不产生分离的粘性流动，这是一个效率较高的计算方法。此方法已广泛应用于求解复杂超声速粘性流动[1~3]。最近劳伦斯(Lawrence)和塔尼希尔(Tannehill)等人[4,5]将罗(Roe)[6]提出的黎曼间断解的近似解方法应用于PNS方程的空间推进法，改进了这一方法的激波捕捉能力，克服了差分方程解过激波产生非物理振动的问题，使该方法有了进一步的发展。

应当指出，采用空间推进方法求解定常PNS方程，将经常遇到数值解的发散问题。这是因为数学问题的提法不适定而导致的。虽然为了解决这一问题很多作者提出了各种方法，用于处理在物面附近亚声速层内的流向压力梯度，但由于未能完全消除流向压力梯度中的“椭圆”型部分，故问题仍未很好解决[7]。正如汤普森(Thompson)[8]所指出的，只要流向压力梯度中向上游传播信息的部分还存在，则空间推进方法用于求解定常PNS方程，将出现数值解的发散问题。为了解决所提出的问题，很多作者采用了增加人工粘性或加大推进步长等方法，但过大的推进步长将影响求解精度。最近本书作者提出采用分区求解的方法（参见本章第五节）解决该问题获得了成功。在文献[23]中，还提出将边界层反解方法的思想用于定常PNS方程推进求解法中，以

克服上面提出的问题。

在本章中将首先简单描述定常PNS方程的数学性质，然后介绍维格内龙（Vigneron）谢夫（Schiff）和斯蒂格尔（Steger）等人所提出的无迭代隐式近似因式分解方法。这是将求解非定常N-S方程的交替方向隐式方法（Alternating direction implicit method，以后简称为隐式ADI方法）推广应用于求解定常PNS方程。ADI方法最早是由林德穆斯（Lindemuth）、基尔伦（Killen）[8]、麦克唐纳（McDonald）、布赖利（Briley）[9]、比姆(Beam）和沃明（Warming）等人提出的。

第一节 基本方程

一、直角坐标系下的N-S方程

考虑三维流动问题，首先取直角坐标系（t，x，y，z），对于不计外力的完全气体，三维可压缩N-S方程的守恒型可写为以下形式：

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{E}_i}{\partial x}+\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial y}+\frac{\partial \vec{G}_i}{\partial z}=\frac{\partial \vec{E}_v}{\partial x}+\frac{\partial \vec{F}_v}{\partial y}+\frac{\partial \vec{G}_v}{\partial z} \qquad (9\text{-}1\text{-}1)$$

这里下标i表示无粘流参数；下标v表示粘性流参数。式（9-1-1）中的$\vec{U}$、$\vec{E}$、$\vec{F}$和$\vec{G}$都是五维向量，其表达式为

$$\vec{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E_t\end{bmatrix},\qquad \vec{E}_i=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ (E_t+p)u\end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_i=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ (E_t+p)v\end{bmatrix},\qquad \vec{G}_i=\begin{bmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+p\\ (E_t+p)w\end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_v=\begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz}+\kappa\dfrac{\partial T}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_v=\begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy}+v\tau_{yy}+w\tau_{yz}+k\dfrac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{G}_v=\begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz}+v\tau_{yz}+w\tau_{zz}+k\dfrac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix}$$

以上方程式中的 p，ρ 和 T 对应为压力，密度和温度；u、v、w 对应为速度在坐标 x、y、z 各方向上的分量；e 是内能，且有

$$E_t=\rho\left(e+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right) \tag{9-1-2}$$

所有参数都是无量纲参数，其定义与第八章中的定义相同。方程式中的 $\tau_{i,j}$ 为粘性应力张量，在笛卡尔坐标系内有以下形式：

$$\tau_{xx}=\frac{\mu}{3}\left[4\frac{\partial u}{\partial x}-2\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]$$

$$\tau_{xy}=\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$\tau_{xz}=\mu\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right]$$

$$\tau_{yy}=\frac{\mu}{3}\left[4\frac{\partial v}{\partial y}-2\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]$$

$$\tau_{yz} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

$$\tau_{zz} = \frac{\mu}{3} \left[4 \frac{\partial w}{\partial z} - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]$$

对于完全气体，在以上无量纲形式下状态方程有以下形式：

$$p = (\gamma - 1)\rho e \tag{9-1-3}$$

或

$$T = \gamma M_\infty^2 p / \rho \tag{9-1-4}$$

这里 γ 为比热比，M_∞ 为来流马赫数。方程式中的 k 为热传导系数，μ 为粘性系数，在层流的情况下通常采用萨泽兰特公式确定

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{1.5} \frac{T_0 + C}{T + C} \tag{9-1-5}$$

式中的 $T_0 = 288.15\text{K}$，μ_0 是 $T = T_0$ 时的 μ 值，等于 $1.7894 \times 10^{-5}\text{kg/m}\cdot\text{s}$。$C = \text{const} = 110.4\text{K}$。

二、坐标变换及变换后的 N-S 方程

为了适应复杂外形的物体绕流问题，选用以下一般坐标变换关系：

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(t, x, y, z) \\ \eta &= \eta(t, x, y, z) \\ \zeta &= \zeta(t, x, y, z) \\ t &= t \end{aligned} \tag{9-1-6}$$

并定义 $\eta = 0$ 对应于物面，如图 9-1 所示。曲线坐标系（ξ，η，ζ）可不一定是正交的，时间 t 在这里是作为参变量。由于

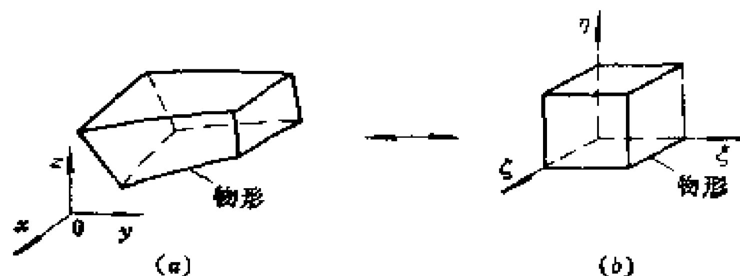


图9-1　坐标变换示意图

（a）物理空间；（b）计算空间。

坐标变换的正变换与逆变换矩阵之间存在以下关系：

$$\frac{D(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{D(x,\ y,\ z)}\cdot\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(\xi,\ \eta,\ \zeta)}=\boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}\xi_x & \xi_y & \xi_z\\ \eta_x & \eta_y & \eta_z\\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_\xi, & x_\eta, & x_\zeta\\ y_\xi, & y_\eta, & y_\zeta\\ z_\xi, & z_\eta, & z_\zeta\end{bmatrix} \qquad (9\text{-}1\text{-}7\ a)$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵，所以变换的雅可比值为

$$J=\left|\frac{\partial(\xi,\ \eta,\ \zeta)}{\partial(x,\ y,\ z)}\right|=\left|\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(\xi,\ \mu,\ \zeta)}\right|^{-1}$$

$$=1/[x_\xi(y_\eta z_\zeta-y_\zeta z_\eta)-x_\eta(y_\xi y_\zeta-y_\zeta z_\xi)$$

$$+x_\zeta(y_\xi z_\eta-y_\eta z_\xi)] \qquad (9\text{-}1\text{-}7\ b)$$

从方程组（9-1-7 a）可以得到

$$\xi_x=J\ (y_\eta z_\zeta-z_\eta y_\zeta),\quad \zeta_x=J\ (y_\xi z_\eta-z_\xi y_\eta)$$

$$\xi_y=J\ (z_\eta x_\zeta-x_\eta z_\zeta),\quad \zeta_y=J\ (z_\xi x_\eta-x_\xi z_\eta)$$

$$\xi_z=J\ (x_\eta y_\zeta-y_\eta x_\zeta),\quad \zeta_z=J\ (x_\xi y_\eta-y_\xi x_\eta)$$

$$\eta_x=J\ (y_\zeta z_\xi-z_\zeta y_\xi),\quad \xi_t=-(x_t\xi_x+y_t\xi_y+z_t\xi_z)$$

$$\eta_y=J\ (z_\zeta x_\xi-x_\zeta z_\xi),\quad \eta_t=-(x_t\eta_x+y_t\eta_y+z_t\eta_z)$$

$$\eta_z=J\ (x_\zeta y_\xi-y_\zeta x_\xi),\quad \zeta_t=-(x_t\zeta_x+y_t\zeta_y+z_t\zeta_z)$$

变换后的方程（9-1-1）有以下守恒形式

$$\frac{\partial\vec{U}_1}{\partial t}+\frac{\partial\vec{E}_1}{\partial\xi}+\frac{\partial\vec{F}_1}{\partial\eta}+\frac{\partial\vec{G}_1}{\partial\zeta}=0 \qquad (9\text{-}1\text{-}8)$$

其中向量 $\vec{U}_1$、$\vec{E}_1$、$\vec{F}_1$ 和 $\vec{G}_1$ 为

$$\vec{U}_1=\vec{U}/J$$

$$\vec{E}_1=\frac{1}{J}[\xi_x(\vec{E}_i-\vec{E}_v)+\xi_y(\vec{F}_i-\vec{F}_v)+\xi_z(\vec{G}_i-\vec{G}_v)]$$

$$\vec{F}_1=\frac{1}{J}[\eta_x(\vec{E}_i-\vec{E}_v)+\eta_y(\vec{F}_i-\vec{F}_v)+\eta_z(\vec{G}_i-\vec{G}_v)]$$

$$\vec{G}_1=\frac{1}{J}[\zeta_x(\vec{E}_i-\vec{E}_v)+\zeta_y(\vec{F}_i-\vec{F}_v)+\zeta_z(\vec{G}_i-\vec{G}_v)]$$

这里的 $\vec{U}$、$\vec{E}_i$、$\vec{F}_i$ 和 $\vec{G}_i$ 的表达式与（9-1-1）中的对应向量完全相同，而 $\vec{E}_v$、$\vec{F}_v$ 和 $\vec{G}_v$ 的表达式除以热流 q 的偏导数

$-q_x$、$-q_y$ 和 $-q_z$ 代替了 $k\dfrac{\partial T}{\partial x}$、$k\dfrac{\partial T}{\partial y}$ 和 $k\dfrac{\partial T}{\partial z}$ 外，其余与（9-1-1）中的表达式相同。只是这里的粘性应力张量 $\tau_{i,j}$（i，$j=x$，y，z）有以下形式

$$\tau_{xx}=\frac{2}{3}\mu[2(\xi_x u_\xi+\eta_x u_\eta+\zeta_x u_\zeta)-(\xi_y v_\xi+\eta_y v_\eta+\zeta_y v_\zeta)-(\xi_z w_\xi+\eta_z w_\eta+\zeta_z w_\zeta)]$$

$$\tau_{yy}=\frac{2}{3}\mu[2(\xi_y v_\xi+\eta_y v_\eta+\zeta_y v_\zeta)-(\xi_x u_\xi+\eta_x u_\eta+\zeta_x u_\zeta)-(\xi_z w_\xi+\eta_z w_\eta+\zeta_z w_\zeta)]$$

$$\tau_{zz}=\frac{2}{3}\mu[2(\xi_z w_\xi+\eta_z w_\eta+\zeta_z w_\zeta)-(\xi_x u_\xi+\eta_x u_\eta+\zeta_x u_\zeta)-(\xi_y v_\xi+\eta_y v_\eta+\zeta_y v_\zeta)]$$

$$\tau_{xy}=\mu(\xi_y u_\xi+\eta_y u_\eta+\zeta_y u_\zeta+\xi_x v_\xi+\eta_x v_\eta+\zeta_x v_\zeta)$$

$$\tau_{xz}=\mu(\xi_z u_\xi+\eta_z u_\eta+\zeta_z u_\zeta+\xi_x w_\xi+\eta_x w_\eta+\zeta_x w_\zeta)$$

$$\tau_{yz}=\mu(\xi_z v_\xi+\eta_z v_\eta+\zeta_z v_\zeta+\xi_y w_\xi+\eta_y w_\eta+\zeta_y w_\zeta)$$

另外热流 q 的偏导数有以下形式

$$q_x=-\kappa(\xi_x T_\xi+\eta_x T_\eta+\zeta_x T_\zeta)$$

$$q_y=-\kappa(\xi_y T_\xi+\eta_y T_\eta+\zeta_y T_\zeta)$$

$$q_z=-\kappa(\xi_z T_\xi+\eta_z T_\eta+\zeta_z T_\zeta)$$

以上方程中的下标（x，y，z，ξ，η，ζ）表示偏导数对应的自变量。

若变换后的N-S方程组（9-1-8）对应于流向坐标抛物化，即化为PNS方程，就要求进行以下近似处理：①流动是定常流动，即消去方程组（9-1-8）中对 t 的导数项；②考虑到在高雷诺数的流动中，流动方向的粘性导数项与法向和周向的粘性导数项相比是小量，故可略去粘性项中对于 ξ 的导数项，则方程组（9-1-8）可简化为定常PNS方程

$$\frac{\partial \vec{E}_i}{\partial \xi}+\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial \eta}+\frac{\partial \vec{G}_i}{\partial \zeta}=0 \qquad (9\text{-}1\text{-}9)$$

这里

$$\vec{E}_2=\frac{1}{J}(\xi_x\vec{E}_i+\xi_y\vec{F}_i+\xi_z\vec{G}_i)$$

$$\vec{F}_2=\frac{1}{J}[\eta_x(\vec{E}_i-\vec{E}_v^*)+\eta_y(\vec{F}_i-\vec{F}_v^*)+\eta_z(\vec{G}_i-\vec{G}_v^*)]$$

$$\vec{G}_2=\frac{1}{J}[\zeta_x(\vec{E}_i-\vec{E}_v^*)+\zeta_y(\vec{F}_i-\vec{F}_v^*)+(\vec{G}_i-\vec{G}_v^*)]$$

其中，带上标星号的粘性部分流通量表示已略去了其中对 ξ 的导数项。这样 τ 和 q 的偏导数可简化为以下形式：

$$\tau_{xx}^*=\frac{2}{3}\mu[2(\eta_x u_\eta+\zeta_x u_\zeta)-(\eta_y v_\eta+\zeta_y v_\zeta)-(\eta_z w_\eta+\zeta_z w_\zeta)]$$

$$\tau_{yy}^*=\frac{2}{3}\mu[2(\eta_y v_\eta+\zeta_y v_\zeta)-(\eta_x u_\eta+\zeta_x u_\zeta)-(\eta_z w_\eta+\zeta_z w_\zeta)]$$

$$\tau_{zz}^*=\frac{2}{3}\mu[2(\eta_z w_\eta+\zeta_z w_\zeta)-(\eta_x u_\eta+\zeta_x u_\zeta)-(\eta_y v_y+\zeta_y v_\zeta)]$$

$$\tau_{xy}^*=\mu(\eta_y u_\eta+\zeta_y u_\zeta+\eta_x v_\eta+\zeta_x v_\zeta)$$

$$\tau_{xz}^*=\mu(\eta_z u_\eta+\zeta_z u_\zeta+\eta_x w_\eta+\zeta_x w_\zeta)$$

$$\tau_{yz}^*=\mu(\eta_z v_\eta+\zeta_z v_\zeta+\eta_y w_\eta+\zeta_y w_\zeta)$$

$$q_x^*=-k(\eta_x T_\eta+\zeta_x T_\zeta)$$

$$q_y^*=-k(\eta_y T_\eta+\zeta_y T_\zeta)$$

$$q_z^*=-k(\eta_z T_\eta+\zeta_z T_\zeta)$$

第二节　流向压力梯度

在 PNS 方程组(9-1-9)的流向动量方程中，流向压力梯度可能有信息通过边界层内的亚声速区向上游传播。因此，空间推进方法的数学提法是不适定的，故在很多情况下的求解过程中，将遇到数值解的指数增长（Departure solutions)。类似的问题在边界层方程的求解中，当流向压力梯度没有给定时，也是存在的。不同的是在 PNS 方程中，还存在有边界层内的粘性流动与外流无粘流动之间的压力干扰，使得问题更加复杂。

为了更好地了解数值解产生指数增长的原因，现在来分析流

向压力梯度项对 PNS 方程组数学性质的影响。

为了简单，考虑二维 PNS 方程，并假设所研究的是粘性系数为常数的完全气体，且取直角坐标系（t，x，y，z）。由此，方程组（9-1-9）可简化为以下形式

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}+\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}=\frac{\partial \vec{F}_v}{\partial y} \tag{9-2-1}$$

这里

$$\vec{E}=\begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2+\omega p \\ \rho uv \\ \left[\dfrac{\gamma}{\gamma-1}p+\dfrac{1}{2}\rho(u^2+v^2)\right]u \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}=\begin{bmatrix} \rho u \\ \rho uv \\ \rho v^2+p \\ \left[\dfrac{\gamma}{\gamma-1}p+\dfrac{\rho}{2}(u^2+v^2)\right]v \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_v=\begin{bmatrix} 0 \\ u_y \\ \dfrac{4}{3}v_y \\ uu_y+\dfrac{4}{3}vv_y+\dfrac{\kappa}{\mu}T_y \end{bmatrix}$$

不难看出，流通量 $\vec{E}$ 中的参数 ω 是 x 方向动量方程中流向压力梯度项的系数。当 $\omega=0$ 时，该项就被略去了，当 $\omega=1$ 时，该项就全保留了。

首先考虑无粘流动方程（$\mu\to 0$），则方程组（9-2-1）可简化为欧拉方程

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}+\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}=0 \tag{9-2-2}$$

其非守恒型可写为

$$[A]\frac{\partial\vec{Q}}{\partial x}+[B]\frac{\partial\vec{Q}}{\partial y}=0 \tag{9-2-3}$$

其中矩阵[A]和[B]有以下形式

$$[A]=\begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho u & 0 & \omega \\ 0 & 0 & \rho u & 0 \\ 0 & \rho u^2+\frac{\gamma p}{\gamma-1} & \rho v u & \frac{\gamma u}{\gamma-1} \end{bmatrix}$$

$$[B]=\begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & \rho v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho v & 1 \\ 0 & \rho u v & \rho v^2+\frac{\gamma p}{\gamma-1} & \frac{\gamma v}{\gamma-1} \end{bmatrix}$$

向量 $\vec{Q}$ 为

$$\vec{Q}=\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{bmatrix}$$

众所周知，如果矩阵$[A]^{-1}\cdot[B]$具有实特征值，则方程组(9-2-2)(或方程组（9-2-3)）为双曲型方程组。不难求出其特征值为

$$\begin{cases} \lambda_{1,2}=\frac{v}{u} \\ \lambda_{3,4}=\frac{-e\pm\sqrt{e^2-4df}}{2d} \end{cases} \tag{9-2-4}$$

这里

$$d=[\gamma-\omega(\gamma-1)]u^2-\omega c^2$$

$$e=-uv[1+\gamma-\omega(\gamma-1)]$$

$$f=v^2-c^2$$

c 为声速。如果在 x 方向的动量方程中，流向的压力梯度完全保留（也就是 $\omega=1$），则不难看出，只有

$$u^2+v^2\geqslant c^2 \quad \text{或} \quad Ma\geqslant 1$$

时，所有的特征值为实数，如果 x 方向动量方程中的流向压力梯度只保留一部分（即取 $0\leqslant\omega\leqslant 1$），则在以下条件成立时，亚音速区域内的特征值也将保持为实数，即

$$\omega\leqslant\frac{\gamma M_x^2}{1+(\gamma-1)M_x^2} \tag{9-2-5}$$

这里 $M_x=u/c$。以上不等式是假设法向速度分量比流向速度分量 u 小得多的条件下推导出来的。

下面分析粘性方程，去掉方程组（9-2-1）中对 y 的一阶导数项，则该方程的非守恒型可写为以下形式：

$$[\boldsymbol{A}_1]\frac{\partial\vec{Q}}{\partial x}=[\boldsymbol{B}_1]\frac{\partial^2\vec{Q}}{\partial y^2} \tag{9-2-6}$$

$$[\boldsymbol{A}_1]=\begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0\\ u^2 & 2\rho u & 0 & \omega\\ uv & \rho v & \rho u & 0\\ a_1 & a_2 & \rho uv & a_4 \end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{B}_1]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0\\ b_1 & u & \frac{4}{3}v & b_4 \end{bmatrix}$$

其中

$$a_1=\frac{1}{2}u(u^2+v^2)$$

$$a_2=\frac{\gamma p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho(3u^2+v^2)$$

$$a_4=\frac{\gamma u}{\gamma-1}$$

$$b_1 = \frac{-\gamma p}{(\gamma-1)\rho^2 p_r}$$

$$b_4 = \frac{\gamma}{(\gamma-1)\rho p_r}$$

如果矩阵$[A_1]^{-1}[B_1]$的特征值是正的实数值，则方程组(9-2-6)对于x的正向为抛物型方程组。设$u \neq 0$，则该矩阵的特征值可由以下方程式求出：

$$\lambda\left(\frac{\rho u}{\mu}\lambda-\frac{4}{3}\right)\left\{\left(\frac{\rho u}{\mu}\lambda\right)^2\left[M_x^2(\gamma-\omega(\gamma-1))-\omega\right]\right.$$
$$+\left(\frac{\rho u}{\mu}\lambda\right)\left[\left(\omega(\gamma-1)-\gamma\left(\frac{1+p_r}{p_r}\right)\right)M_x^2+\frac{\omega}{p_r}\right]$$
$$\left.+\frac{\gamma M_x^2}{p_r}\right\}=0 \tag{9-2-7}$$

由上式所确定的特征值，如果

$$u>0 \tag{9-2-8}$$

且

$$\omega<\frac{\gamma M_x^2}{1+(\gamma-1)M_x^2} \tag{9-2-9}$$

则其特征值为正实数值。从这里可以看出，不等式(9-2-8)表明要求所考虑的流动在x方向的速度分量大于零，无回流产生，即无分离流产生。不等式(9-2-9)表明对流向压力梯度的限制，这与(9-2-5)式相同。由此可以初步得出结论，在PNS方程中，由于流向压力梯度项的存在而产生的不稳定性是由于无粘项产生的。

若取

$$f(M_x)=\frac{\gamma M_x^2}{1+(\gamma-1)M_x^2} \tag{9-2-10}$$

则可以看出，当$M_x=1$时，$f(M_x)=1$；当$M_x>1$时，$f(M_x)>1$。因此，当$M_x>1$时，则可取$\omega=1$，即流向压力梯度可完全被包含在方程中，方程仍有正实特征值。当$M_x<1$时，如果要求特征值为正实数值，则只能有部分流向压力梯度保留下来(保留的部分为$\omega\cdot(\partial p/\partial x)$)。因在壁面上有$M_x=0$，故靠近壁

面有 $\omega=0$，在边界层内的亚声速区域中，若保留了整个流向压力梯度项，则PNS方程空间推进的数值解方法将是不稳定的．因这里包含了“椭圆型”特性。为了使空间推进方法稳定，简单的方法是在靠近壁面的亚声速区域内，完全丢掉流向压力梯度项．但这样对于大流向压力梯度的情况，流场中的数值解将引入较大的误差。另一方法是给定流向压力梯度，即流向压力梯度为已知，这样流向压力梯度将不影响基本方程的数学特性。对于边界层方程求解时，流向压力梯度可由外流无粘流给出，这里忽略了内外流的干扰．或对于内流由质量守恒关系式给出。然而，对于 PNS 方程的解，流向压力梯度事先是未知的，而必须作为解的一部分求出。

为了解决以上提出的问题，一些作者在亚声速区域内采用向后差分，计算所保留的压力梯度项，这样可以应用前一步的已知值计算压力梯度项。例如，考虑 $i+1$ 步的解，动量方程和能量方程中的 x 方向压力梯度项 $\partial p/\partial x$ 可按以下差分式进行计算

$$\frac{\partial p}{\partial x}\approx\frac{p_i-p_{i-1}}{\Delta x} \qquad (9\text{-}2\text{-}11)$$

卢巴德（Lubard）和赫林韦尔（Helliwell）等人[12]应用傅里叶稳定性分析指出，存在有某一推进方向的步长 $(\Delta x)_{min}$，当推进方法中所选用的推进步长 $\Delta x<(\Delta x)_{min}$，则计算将出现不稳定现象。对于二维 PNS 方程，利用以上分析方法可以推出

$$(\Delta x)_{min}=\frac{\frac{1}{4}(\rho u/\mu)[(1/M_x^2)-1]\Delta y^2}{\gamma\sin^2(\beta/2)} \qquad (9\text{-}2\text{-}12)$$

这里 $\beta=k_m\Delta y$。对于隐式格式，$(\Delta x)_{min}$ 可取为对应于显式格式的两倍。为了解释这一稳定条件的限制，鲁宾（Rubin）在文献〔13〕中指出，$(\Delta x)_{min}$ 对 x 方向推进步长的限制，表明了上游椭圆干扰区的存在。如果 $\Delta x>(\Delta x)_{min}$，则表明所取的推进步长越过了干扰区，故空间推进方法可得到稳定的数值解。反之，将产生不稳定解。鲁宾和林(Lin)等人在文献〔14〕中指出，该椭圆干

扰区的大小为亚声速区大小的景级，因此如果靠近壁面附面层内的亚声速区足够大，则这里所允许的最小Δx对于通常计算中所要求的精度就太大了。

另外一种处理流向压力梯度的方法，被称为“底层近似”方法。最初是由鲁宾和林提出的[18]，后来由谢夫和斯蒂格尔等人应用于求解PNS方程[2]。其基本思想是假设在靠近壁面的亚声速粘性层内$\partial p/\partial y$可略去，故x方向的压力梯度可用底层区域外超声速点上的计算结果代替。这样就给出了亚声速区域内的压力梯度，故空间推进方法可得到稳定的数值解。然而由于超声速区和亚声速区之间的压力干扰是由法向动量方程和能量方程给出的，使得数值解的不稳定性，也就是指数增长特性仍然存在。

处理流向压力梯度的另一新方法是由维格内龙（Vigneron）等人提出的[1]。其基本思想是基于前面的特征分析，将流向动量方程中的压力梯度项分解为两项：一项为$\omega\cdot(\partial p/\partial x)$，另一项为$(1-\omega)\partial p/\partial x$。在超声速区域内取$\omega=1$，使$x$方向的压力梯度整项保留；在亚声速区域内，只保留$\omega(\partial p/\partial x)$项，而余下的项（$1-\omega)\partial p/\partial x$可略去，或应用向后差分表达式（9-2-11）显式地给出，或采用“底层近似”方法，以底层外边上声速点处的值代替。对于该方法，PNS方程（9-2-1）可写为以下形式：

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}+\frac{\partial \vec{P}}{\partial x}+\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}=\frac{\partial \vec{F}_v}{\partial y} \tag{9-2-13}$$

这里的向量$\vec{E}$，$\vec{F}$，$\vec{F}_v$的表达式与式（9-2-1）中的相同，而

$$\vec{P}=\begin{bmatrix} 0 \\ (1-\omega)p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9-2-14}$$

根据不等式（9-2-5）和（9-2-9），上式中的参数ω可按下式计算：

$$\omega=\frac{\sigma\gamma M_x^2}{1+(\gamma-1)M_x^2} \tag{9-2-15}$$

维格内龙等人利用傅里叶稳定性分析，研究了这一方法所得数值解的指数增长特性[16]。在研究中，对于方程（9-2-13)采用隐式欧拉格式进行离散化。他们发现，如果压力梯度项$\partial\bar{p}/\partial x$在亚声速层内，即“底层”内被略去，则空间推进方法可得稳定解．因这种情况下方程组（9-2-13）为双曲抛物型的。然而，如果该项被保留，采用向后差分式进行计算，则当Δx小于某一值$(\Delta x)_{min}$时将出现非稳定解。处理流向压力梯度的方法还有林和鲁宾[17]，伯格（Buggeln）[18]和雅年科（Yanenko）等人的工作[19]。

对于上游椭圆效应较小的流动，可采取$\Delta x>(\Delta x)_{min}$的方法防止解的指数增长问题，则可通过空间推进方法单向扫描得到所需精度的流场解。对于上游椭圆效应较大的流动，采用以上所提出的防止指数增长解的处理方法，在PNS方程的求解中将导致较大的误差。对于这类流动问题可采用“整体迭代方法”，或采用区域分解法，后者具有更多的优点(在本章的后面将介绍)。“整体迭代方法”是由鲁宾和林提出的[14]，其基本思想是利用上层迭代所得到的已知压力场，给出流场内每一点x方向的压力梯度值。初始压力场可利用维格内龙提出的方法，取流向压力梯度$\partial\bar{p}/\partial x=0$，或取$\Delta x$足够大求出流场压力分布的初始场。因在迭代过程中，压力梯度项$\partial p/\partial x$为已知，故空间推进方法可得到稳定解。为了使流场的椭圆特性能被模拟，x方向的压力梯度项的计算必须引入下游的影响。为此可利用向前差分，逼近方程组(9-2-13）中的压力在x方向上的梯度项。考虑$i+1$层的压力梯度，其差分表达式可写为

$$\left(\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}\right)_{i+1}=\frac{\bar{p}_{i+2}-\bar{p}_{i+1}}{\Delta x} \tag{9-2-16}$$

“整体迭代”方法解决了PNS方程推进求解方法中的不适定问题，且可用于求解上游效应较大的流动问题。然而应当指出，

该方法与典型的一次扫描的推进方法相比，要求更多的计算机时，在某些情况下，所需的计算机时接近于采用时间相关方法求解同一问题所需的计算机时，这样就失去了采用空间推进方法求解粘性流动问题的优越性了。

第三节 空间推进求解方法

正如前面所述，当以下条件满足时，PNS方程组（9-1-9）对于流动方向 ξ 是双曲－抛物型方程：

（1）流场的无粘流占主导的区域是超声速流动。

（2）流场中流动方向的速度分量处处都大于零。

（3）在流向动量方程中，略去流向压力梯度项，或采用上节所给出的方法处理该项，以阻止数值解指数增长的产生。

如果这些条件都满足，则PNS方程（9-1-9）可采用类似于求解抛物型边界层方程的方法进行求解，即可从给定的初始剖面上的已知流场参数，沿 ξ 方向向下游推进求解，直到最后一个剖面。

在本节中将介绍由维格内龙等人应用于求解PNS方程的无迭代隐式近似因式分解方法[1]。

为了便于描述，这里从直角坐标系内的三维可压缩N－S方程组（9-1-1）出发，则定常PNS方程的守恒型可写为以下形式

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}+\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}+\frac{\partial \vec{G}}{\partial z}=0 \tag{9-3-1}$$

这里，$\vec{E}=\vec{E}_i$，$\vec{F}=\vec{F}_i-\vec{F}_v$，$\vec{G}=\vec{G}_i-\vec{G}_v$。为了采用维格内龙提出的方法处理 x 方向动量方程中的流向压力梯度，以 $\vec{E}'+\vec{P}$ 代替 $\vec{E}$，则方程组（9-3-1）可写为

$$\frac{\partial \vec{E}'}{\partial x}+\frac{\partial \vec{P}}{\partial x}+\frac{\partial \vec{F}}{\partial y}+\frac{\partial \vec{G}}{\partial z}=0 \tag{9-3-2}$$

这里

$$\vec{E}' = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \omega p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ (E_t + p) u \end{bmatrix}, \qquad \vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\omega) p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

方程式中的向量$\vec{E}_i$，$\vec{F}_i$，$\vec{G}_i$，$\vec{F}_v$和$\vec{G}_v$的表达式与方程组（9-1-1）中的相同。其中剪切应力τ和热流量张量由以下表达式给出

$$\tau_{xx} = \frac{2}{3}\mu(-v_y - w_z)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2}{3}\mu(2v_y - w_z)$$

$$\tau_{zz} = \frac{2}{3}\mu(2w_z - v_y)$$

$$\begin{aligned} &\tau_{xy} = \mu u_y \\ &\tau_{xz} = \mu u_z \\ &q_x = 0 \\ &q_y = -\kappa T_y \\ &q_z = -\kappa T_z \end{aligned} \tag{9-3-3}$$

采用比姆—沃明（Bean—Warming）提出的差分格式[11]，则以二阶精度逼近方程组（9-3-2）的差分方程有以下形式

$$\Delta^i \vec{E} = \frac{\theta_1 \Delta x}{1+\theta_2} \frac{\partial}{\partial x}(\Delta^i \vec{E}) + \frac{\Delta x}{1+\theta_2} \frac{\partial}{\Delta x}(\vec{E}^i) + \frac{\theta_2}{1+\theta_2} \Delta^{i-1} \vec{E} + O\left[\left(\theta_1 - \frac{1}{2} - \theta_2\right) \Delta x^2 + \Delta x^3\right] \tag{9-3-4}$$

这里$\Delta^i \vec{E} = \vec{E}^{i+1} - \vec{E}^i$，$x = i\Delta x$。不难看出，差分方程（9-3-4）是沿$x$方向推进求解的。当$\theta_1$和$\theta_2$选用不同值时，可得到通常所采用的各种差分格式（参见表9-1）。

应当指出，表9-1中的截断误差，是对于$\Delta^i \vec{E}$的，当差分方程（9-3-4）中的$\partial \vec{E}/\partial x$项以差分表达式$\Delta^i \vec{E}/\Delta x$代替后，所对应的截断误差应除以$\Delta x$。

表9-1　方程(9-3-4)中的差分格式

θ_1	θ_2	格　式	截断误差
0	0	欧拉显式	$O(\Delta x^2)$
0	$-1/2$	显式蛙跳	$O(\Delta x^3)$
1/2	0	隐式梯形差分	$O(\Delta x^3)$
1	0	欧拉隐式	$O(\Delta x^2)$
1	1/2	隐式三点向后	$O(\Delta x^3)$

对于PNS方程，无论一阶欧拉隐式格式（$\theta_1=1$，$\theta_2=0$），或二阶精度的三点向后差分格式（$\theta_1=1$，$\theta_2=1/2$）都是常用的格式，然而二阶精度的梯形差分格式（$\theta_1=1/2$，$\theta_2=0$），将导致数值求解过程的不稳定。

利用方程（9-3-1），则差分方程（9-3-4）可写为以下形式

$$\Delta^i\vec{E}=-\frac{\theta_1\Delta x}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\Delta^i\vec{F})+\frac{\partial}{\partial z}(\Delta^i\vec{G})\right]$$

$$-\frac{\Delta x}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\vec{F}^i)+\frac{\partial}{\partial z}(\vec{G}^i)\right]+\frac{\theta_2}{1+\theta_2}\Delta^{i-1}\vec{E} \tag{9-3-5}$$

这里，略去了截断误差项。方程式（9-3-5）称为差分方程的差量（delta）形式，且有

$$\begin{aligned}\Delta^i\vec{E}&=\Delta^i\vec{E}'+\Delta^i\vec{P}\\ \Delta^i\vec{F}&=\Delta^i\vec{F}_i-\Delta^i\vec{F}_v\\ \Delta^i\vec{G}&=\Delta^i\vec{G}_i-\Delta^i\vec{G}_v\end{aligned} \tag{9-3-6}$$

由于向量$\vec{E}'$，$\vec{F}_i$和$\vec{G}_i$仅是向量$\vec{U}$的一次齐次函数，且可表示为

$$\vec{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4\\ U_5\end{pmatrix} \tag{9-3-7}$$

$\vec{F}_i$可表示为

$$\vec{F}_i=\begin{Bmatrix} U_3 \\ \dfrac{U_2U_3}{U_1} \\ \dfrac{U_3^2}{U_1}+(\gamma-1)\left(U_5-\dfrac{U_2^2+U_3^2+U_4^2}{2U_1}\right) \\ \dfrac{U_3U_4}{U_1} \\ \left[U_5+(\gamma-1)\left(U_5-\dfrac{U_2^2+U_3^2+U_4^2}{2U_1}\right)\right]\dfrac{U_3}{U_1} \end{Bmatrix} \tag{9-3-8}$$

同样$\vec{G}_i$也可表示为$\vec{U}$的函数，因此，$\vec{E}'$，$\vec{F}_i$和$\vec{G}_i$可按泰勒级数展开为

$$\begin{cases} (\vec{E}')^{i+1}=(\vec{E}')^i+\left(\dfrac{\partial\vec{E}'}{\partial\vec{U}}\right)^i \Delta^i\vec{U}+O(\Delta x^2) \\ (\vec{F}_i)^{i+1}=(\vec{F}_i)^i+\left(\dfrac{\partial\vec{F}_i}{\partial\vec{U}}\right)^i \Delta^i\vec{U}+O(\Delta x^2) \\ (\vec{G}_i)^{i+1}=(\vec{G}_i)^i+\left(\dfrac{\partial\vec{G}_i}{\partial\vec{U}}\right)^i \Delta^i\vec{U}+O(\Delta x^2) \end{cases} \tag{9-3-9}$$

或写为

$$\begin{cases} \Delta^i\vec{E}'=[\boldsymbol{Q}]^i\Delta^i\vec{U}+O(\Delta x^2) \\ \Delta^i\vec{F}_i=[\boldsymbol{R}]^i\Delta^i\vec{U}+O(\Delta x^2) \\ \Delta^i\vec{G}_i=[\boldsymbol{S}]^i\Delta^i\vec{U}+O(\Delta x^2) \end{cases} \tag{9-3-10}$$

这里$[\boldsymbol{Q}]$，$[\boldsymbol{R}]$，$[\boldsymbol{S}]$对应雅可比矩阵$\partial\vec{E}'/\partial\vec{U}$，$\partial\vec{F}_i/\partial\vec{U}$，$\partial\vec{G}_i/\partial\vec{U}$，其表达式如下

$$\frac{\partial\vec{E}'}{\partial\vec{U}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ +e_{51} & e_{52} & e_{53} & e_{54} & e_{55} \end{bmatrix} \tag{9-3-11}$$

这里

$$e_{21}=\frac{\omega(\gamma-1)-2}{2}u^2+\frac{\omega(\gamma-1)}{2}(v^2+w^2)$$

$$e_{22}=[2-\omega(\gamma-1)]u,\quad e_{23}=-\omega(\gamma-1)v$$

$$e_{24}=-\omega(\gamma-1)w,\quad e_{25}=\omega(\gamma-1)$$

$$e_{51}=\left[-\frac{\gamma E_t}{\rho}+(\gamma-1)(u^2+v^2+w^2)\right]u$$

$$e_{52}=\frac{\gamma E_t}{\rho}-(\gamma-1)\frac{3u^2+v^2+w^2}{2}$$

$$e_{53}=-(\gamma-1)uv,\quad e_{54}=-(\gamma-1)uw$$

$$e_{55}=\gamma u$$

$$\frac{\partial\vec{F}_i}{\partial\vec{U}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -uv & v & u & 0 & 0\\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35}\\ -vw & 0 & w & v & 0\\ f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55}\end{bmatrix}\qquad(9\text{-}3\text{-}12)$$

这里

$$f_{31}=\frac{\gamma-1}{2}(u^2+w^2)+\frac{\gamma-3}{2}v^2$$

$$f_{32}=-(\gamma-1)u,\quad f_{33}=(3-\gamma)v$$

$$f_{34}=-(\gamma-1)w,\quad f_{35}=\gamma-1$$

$$f_{51}=\left[-\frac{\gamma E_t}{\rho}+(\gamma-1)(u^2+v^2+w^2)\right]v$$

$$f_{52}=-(\gamma-1)uv$$

$$f_{53}=\frac{\gamma E_t}{\rho}-\frac{\gamma-1}{2}(u^2+3v^2+w^2)$$

$$f_{54}=-(\gamma-1)vw,\quad f_{55}=\gamma v$$

$$\frac{\partial\vec{G}_i}{\partial\vec{U}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -uw & w & 0 & u & 0\\ -vw & 0 & w & v & 0\\ g_{41} & -(\gamma-1)u & -(\gamma-1)v & (3-\gamma)w & \gamma-1\\ g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} & \gamma w\end{bmatrix}$$

$$(9\text{-}3\text{-}13)$$

这里

$$g_{41}=\frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2)+\frac{\gamma-3}{2}w^2$$

$$g_{51}=\left[\frac{-\gamma E_t}{\rho}+(\gamma-1)(u^2+v^2+w^2)\right]w$$

$$g_{52}=-(\gamma-1)uw,\quad g_{53}=-(\gamma-1)vw$$

$$g_{54}=\frac{\gamma E_t}{\rho}-\frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2+w^2)$$

在雅可比矩阵$\partial\vec{E}'/\partial\vec{U}$的推导中，假设了$w$局部不依赖于向量$\vec{U}$。

对于粘性项，采用类似的方法按泰勒级数展开，取线性项。在以下的推导中，假设粘性系数μ和热传导系数k局部不依赖于向量$\vec{U}$、并略去横向粘性导数项，则在此假设下，粘性向量$\vec{F}_v$和$\vec{G}_v$的元素可表示为以下一般式

$$\begin{cases} f_k=\alpha_k\dfrac{\partial}{\partial y}(\beta_k) \\ g_k=\alpha_k\dfrac{\partial}{\partial z}(\beta_k) \end{cases} \tag{9-3-14}$$

这里α_k不依赖于向量$\vec{U}$，而β_k只是$\vec{U}$的函数。这些元素可按以下方式进行线化：

$$\begin{cases} f^{i+1}=f^i+\alpha_k^i\dfrac{\partial}{\partial y}\left[\displaystyle\sum_{l=1}^{5}\left(\frac{\partial\beta_k}{\partial U_l}\right)^i\Delta^i U_l\right]+O(\Delta x^2) \\ g^{i+1}=g^i+\alpha_k^i\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\displaystyle\sum_{l=1}^{5}\left(\frac{\partial\beta_k}{\partial U_l}\right)^i\Delta^i U_l\right]+O(\Delta x^2) \end{cases} \tag{9-3-15}$$

由此可得

$$\begin{cases} \Delta^i\vec{F}_v=[V]^i\Delta^i\vec{U}+O(\Delta x^2) \\ \Delta^i\vec{G}_v=[W]^i\Delta^i\vec{U}+O(\Delta x^2) \end{cases} \tag{9-3-16}$$

这里$[V]$和$[W]$是雅可比矩阵$\partial\vec{F}_v/\partial\vec{U}$和$\partial\vec{G}_v/\partial\vec{U}$，其表达式为

$$
\frac{\partial \vec{F}_v}{\partial \vec{U}}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{\rho}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right) & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{\rho}\right) & 0 & \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right) & 0 & 0 \\
-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w}{\rho}\right) & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right) & 0 \\
f_{v1} & f_{v2} & f_{v3} & f_{v4} & f_{v5}
\end{bmatrix}
$$

这里

$$
f_{v1}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{\rho}\right)-\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v^2}{\rho}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w^2}{\rho}\right)
$$

$$
-\frac{\gamma}{P_r}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{p}{(\gamma-1)\rho^2}-\frac{u^2+v^2+w^2}{2\rho}\right]
$$

$$
f_{v2}=\left(1-\frac{\gamma}{P_r}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{\rho}\right)
$$

$$
f_{v3}=\left(\frac{4}{3}-\frac{\gamma}{P_r}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{\rho}\right)
$$

$$
f_{v4}=\left(1-\frac{\gamma}{P_r}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w}{\rho}\right)
$$

$$
f_{v5}=\frac{\gamma}{P_r}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\right)
$$

$$
\frac{\partial \vec{G}_v}{\partial \vec{U}}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{\rho}\right) & \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right) & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{\rho}\right) & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right) & 0 & 0 \\
-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{w}{\rho}\right) & 0 & 0 & \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right) & 0 \\
g_{v1} & g_{v2} & g_{v3} & g_{v4} & g_{v5}
\end{bmatrix}
$$

这里

$$
g_{v1}=-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{u^2+v^2+\frac{4}{3}w^2}{\rho}\right]
$$

$$-\frac{\gamma}{P_r}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{p}{(\gamma-1)\rho^2}-\frac{u^2+v^2+w^2}{2\rho}\right]$$

$$g_{v2}=\left(1-\frac{\gamma}{P_r}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u}{\rho}\right)$$

$$g_{v3}=\left(1-\frac{\gamma}{P_r}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v}{\rho}\right)$$

$$g_{v4}=\left(\frac{4}{3}-\frac{\gamma}{P_r}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{w}{\rho}\right)$$

$$g_{v5}=\frac{\gamma}{P_r}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

将方程（9-3-6)、(9-3-10）和（9-3-16）代入方程（9-3-5）则得

$$\left\{\left(\frac{\partial\vec{E}'}{\partial\vec{U}}\right)^i+\frac{\theta_1\varDelta x}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vec{F}_i}{\partial\vec{U}}-\frac{\partial\vec{F}_v}{\partial\vec{U}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\vec{G}_i}{\partial\vec{U}}-\frac{\partial\vec{G}_v}{\partial\vec{U}}\right)^i\right]\right\}^i\varDelta^i\vec{U}$$
$$=-\frac{\varDelta x}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}(\vec{F})^i+\frac{\partial}{\partial z}(\vec{G})^i\right]+\frac{\theta_2}{1+\theta_2}\varDelta^{i-1}\vec{E}-\varDelta^i\vec{P} \tag{9-3-17}$$

这里表达式

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vec{F}_i}{\partial\vec{U}}-\frac{\partial\vec{F}_v}{\partial\vec{U}}\right)\right]\varDelta^i\vec{U}$$

表示以下相同的意思

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial\vec{F}_i}{\partial\vec{U}}-\frac{\partial\vec{F}_v}{\partial\vec{U}}\right)\varDelta^i\vec{U}\right]$$

可以看出，在方程（9-3-17）中所有的隐式项都在方程的左边．所有的显式项都在方程的右端。对方程右端的显式压力梯度项$\varDelta^i\vec{P}$，可采用适当的差分逼近式进行计算。对于欧拉隐式差分格式，合适的差分式可取一阶向后差分

$$\varDelta^i\vec{P}=\varDelta^{i-1}\vec{P}+O(\varDelta x) \tag{9-3-18}$$

对于二阶精度的差分格式，可采用二阶精度的向后差分式

$$\varDelta^i\vec{P}=2\varDelta^{i-1}\vec{P}-\varDelta^{i-2}\vec{P}+O(\varDelta x^2) \tag{9-3-19}$$

方程（9-3-17）的左端隐式部分可采用近似因式分解方法，使计算过程化简

$$
\left\{\left[\left(\frac{\partial\vec{E}'}{\partial\vec{U}}\right)' + \frac{\theta_1\Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\vec{G}_i}{\partial\vec{U}} - \frac{\partial\vec{G}_v}{\partial\vec{U}}\right)'\right]\right.
\cdot\left[\left(\frac{\partial\vec{E}'}{\partial\vec{U}}\right)'\right]^{-1}\cdot\left[\left(\frac{\partial\vec{E}'}{\partial\vec{U}}\right)' + \frac{\theta_1\Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vec{F}_i}{\partial\vec{U}}\right.\right.
\left.\left.\left.-\frac{\partial\vec{F}_v}{\partial\vec{U}}\right)'\right]\right\}\Delta' U = \overrightarrow{RHS} \quad (9\text{-}3\text{-}20)
$$

这里$\overrightarrow{RHS}$表示方程（9-3-17）中右端所有的项。由因式分解所带来的误差，可由（9-3-20）中因式各项相乘后所得到的方程与方程（9-3-17）的各项相减后得出。由式（9-3-20）可得

$$
\left\{\left(\frac{\partial\vec{E}'}{\partial\vec{U}}\right)' + \frac{\theta_1\Delta x}{1+\theta_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vec{F}_i}{\partial\vec{U}} - \frac{\partial\vec{F}_v}{\partial\vec{U}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\vec{G}_i}{\partial\vec{U}} - \frac{\partial\vec{G}_v}{\partial\vec{U}}\right)\right]\right.
+\left(\frac{\theta_1\Delta x}{1+\theta_2}\right)^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\vec{G}_i}{\partial\vec{U}} - \frac{\partial\vec{G}_v}{\partial\vec{U}}\right)'
\left.\cdot\left[\left(\frac{\partial\vec{E}'}{\partial\vec{U}}\right)'\right]^{-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vec{F}_i}{\partial\vec{U}} - \frac{\partial\vec{F}_v}{\partial\vec{U}}\right)'\right\}\Delta'\vec{U} = \overrightarrow{RHS} \quad (9\text{-}3\text{-}21)
$$

比较式（9-3-17）和（9-3-21）可以得出

$$
LHS(9\text{-}3\text{-}17) = LHS(9\text{-}3\text{-}20) + O(\Delta x^2) \quad (9\text{-}3\text{-}22)
$$

这里LHS(9-3-17) 表示方程（9-3-17）中的左端各项，LNS(9-3-20) 表示方程（9-3-20）中的左端各项。由此可以看出，近似因式分解并不影响原差分格式的形式精度。

方程（9-3-20）中的偏导数 $\partial/\partial y$和 $\partial/\partial z$可采用二阶精度中心差分来逼近。对于无粘项

$$
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vec{F}_i}{\partial\vec{U}}\right)'\Delta'\vec{U}
$$

可采用以下差分式逼近

$$
\frac{[(\partial\vec{F}_i/\partial\vec{U})'\Delta'\vec{U}]_{j+1} - [(\partial\vec{F}_i/\partial\vec{U})'\Delta'\vec{U}]_{j-1}}{2\Delta y} \quad (9\text{-}3\text{-}23\text{a})
$$

对于粘性项

$$
\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\vec{F}_v}{\partial\vec{U}}\right]'\Delta'\vec{U}
$$

其中每一个元素

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\alpha \frac{\partial}{\partial y}(\beta \Delta^i U_l)\right]$$

可按以下差分式逼近

$$\frac{\{\alpha[\partial(\beta\Delta^i U_l)/\partial y]\}_{j+\frac{1}{2}}-\{\alpha[\partial(\beta\Delta^i U_l)/\partial y]\}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}$$

$$\approx\{\alpha_{j+\frac{1}{2}}[(\beta\Delta^i U_l)_{j+1}-(\beta\Delta^i U_l)_j]-\alpha_{j-\frac{1}{2}}[(\beta\Delta^i U_l)_j$$

$$-(\beta\Delta^i U_l)_{j-1}]\}/\Delta y^2$$

$$\approx\{(\alpha_j+\alpha_{j+1})[(\beta\Delta^i U_l)_{j+1}-(\beta\Delta^i U_l)_j]$$

$$-(\alpha_j+\alpha_{j-1})[(\beta\Delta^i U_l)_j-(\beta\Delta^i U_l)_{j-1}]\}/2\Delta y^2$$

(9-3-23 b)

按以上差分逼近式所得到的差分方程（9-3-20）可以写为以下求解序列

第一步：

$$\left[\left(\frac{\partial\vec{E}'}{\partial\vec{U}}\right)^i+\frac{\theta_1\Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\vec{G}_i}{\partial\vec{U}}-\frac{\partial\vec{G}_v}{\partial\vec{U}}\right)^i\right]\Delta^i\vec{U}_1$$

$$=\overrightarrow{RHS} \tag{9-3-24}$$

第二步：

$$\Delta^i\vec{U}_2=\left(\frac{\partial\vec{E}'}{\partial\vec{U}}\right)^i\Delta^i\vec{U}_1 \tag{9-3-25}$$

第三步：

$$\left[\left(\frac{\partial\vec{E}'}{\partial\vec{U}}\right)^i+\frac{\theta_1\Delta x}{1+\theta_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\vec{F}_i}{\partial\vec{U}}-\frac{\partial\vec{F}_v}{\partial\vec{U}}\right)^i\right]\Delta^i\vec{U}$$

$$=\Delta^i\vec{U}_2 \tag{9-3-26}$$

第四步：

$$\vec{U}^{i+1}=\vec{U}^i+\Delta^i\vec{U} \tag{9-3-27}$$

方程组（9-3-24）是带三对角块矩阵的方程组，其展开形式为

$$[D]\Delta^i\vec{U}=\overrightarrow{RHS} \tag{9-3-28}$$

$$
[D]=\begin{bmatrix}
[B_1] & [C_1] & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
[A_2] & [B_2] & [C_2] & & & \vdots \\
\vdots & [A_3] & [B_3] & [C_3] & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & [A_{k-1}] & [B_{k-1}] & [C_{k-1}] \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & [A_k] & [B_k]
\end{bmatrix}
$$

$$
\Delta^i\vec{U}=\begin{bmatrix}(\Delta^i U_1)_1\\(\Delta^i U_1)_2\\\vdots\\(\Delta^i U_1)_{k-1}\\(\Delta^i U_1)_k\end{bmatrix},\ \overrightarrow{RHS}=\begin{bmatrix}\overrightarrow{RHS}_1\\\overrightarrow{RHS}_2\\\vdots\\\overrightarrow{RHS}_{k-1}\\\overrightarrow{RHS}_k\end{bmatrix}
$$

这里$[A]$、$[B]$、$[C]$是 5 × 5 的矩阵，$(\Delta^i\vec{U}_1)$ 和 $\overrightarrow{RHS}$是列向量，且$\overrightarrow{RHS}_m$为式（9-3-17）中的右端项。此方程组可按三对角块矩阵求逆的方法进行求解。当$\Delta^i\vec{U}_1$确定以后，第二步乘以$(\partial\vec{E}'/\partial\vec{U})^i$可求出$\Delta^i\vec{U}_2$；第三步类似于第一步，对$y$方向求解三对角块逆矩阵，然后求出$\Delta^i\vec{U}$；最后在第四步求出$\vec{U}^{i+1}$。这样，确定$\vec{U}^{i+1}$以后，可按下式求出流场参数值

$$
\begin{aligned}
&\rho^{i+1}=U_1^{i+1},\quad u^{i+1}=\frac{U_2^{i+1}}{U_1^{i+1}}\\
&v^{i+1}=\frac{U_3^{i+1}}{U_1^{i+1}},\quad w^{i+1}=\frac{U_4^{i+1}}{U_1^{i+1}}\\
&e^{i+1}=\frac{U_5^{i+1}}{U_1^{i+1}}-\frac{(u^{i+1})^2+(v^{i+1})^2+(w^{i+1})^2}{2}
\end{aligned}
\tag{9-3-29}
$$

这里U_i为向量$\vec{U}$的分量（参见式（9-3-7））。

在实际计算中，为了防止数值解的高频振动，需在方程（9-3-17）中增加人工耗散项。一般可将以下四阶显式耗散项加到式（9-3-17）中去

$$
-\varepsilon_e\left[(\Delta y)^4\frac{\partial^4}{\partial y^4}(\vec{U}^i)+(\Delta z)^4\frac{\partial^4}{\partial z^4}(\vec{U}^i)\right]\tag{9-3-30}
$$

在式（9-3-30）中，前面的负号是为保证正耗散所必须的。为了使数值求解过程稳定，要求系数ε_e小于 1/16，且式（9-3-30）中的四阶导数项可采用以下差分式进行计算

$$(\Delta y)^4 \frac{\partial^4}{\partial y^4}(\vec{U}^i) \approx \vec{U}^i_{j+2,k} - 4\vec{U}^i_{j+1,k} + 6\vec{U}^i_{j,k} - 4\vec{U}^i_{j-1,k} + \vec{U}^i_{j-2,k}$$

$$(\Delta z)^4 \frac{\partial^4}{\partial z^4}(\vec{U}^i) \approx \vec{U}^i_{j,k+2} - 4\vec{U}^i_{j,k+1} + 6\vec{U}^i_{j,k} - 4\vec{U}^i_{j,k-1} + \vec{U}^i_{j,k-2}$$

以上在笛卡尔直角坐标系内给出了求解三维 PNS 方程的无迭代隐式方法，对于物形斜率较小的物体绕流流场计算是适用的。然而当物体外形具有大倾斜变时，在计算流场中的无粘流部分（严格来说是无粘流特性占主导的流动区域），轴向速度分量在计算过程中将变为亚声速，使得空间推进方法不适定。为了解决这一问题，塔尼希尔（Tannehill）等人将上述方法推广于一般非正交坐标系内，求解三维*PNS*方程[20]。本书中采用类似的计算方法给出了算例。

第四节　一般坐标系内 PNS 方程推进求解方法

一、基 本 方 程

从一般坐标系（ξ，η，ζ）内的PNS方程（9-1-9）出发，为了采用维格内龙提出的压力梯度处理方法，将 PNS 方程写为以下形式

$$\frac{\partial \vec{\bar{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{\bar{P}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{G}_2}{\partial \zeta} = 0 \qquad (9\text{-}4\text{-}1)$$

这里

$$\vec{\bar{E}} = \left(\frac{1}{J}\right)(\xi_x \vec{E}^* + \xi_y \vec{F}^* + \xi_z \vec{G}^*)$$

$$\vec{\bar{P}} = \left(\frac{1}{J}\right)(\xi_x \vec{P}_1 + \xi_y \vec{P}_2 + \xi_z \vec{P}_3)$$

$$\vec{E}^*=\vec{E}_i-\vec{P}_1,\quad \vec{F}^*=\vec{F}_i-\vec{P}_2$$

$$\vec{G}^*=\vec{G}_i-\vec{P}_3$$

$$\vec{P}_1=[\,0,\ (1-\omega)p,\ 0,\ 0,\ 0\,]^T$$

$$\vec{P}_2=[\,0,\ 0,\ (1-\omega)p,\ 0,\ 0\,]^T$$

$$\vec{P}_3=[\,0,\ 0,\ 0,\ (1-\omega)p,\ 0\,]$$

$\vec{E}_2$、$\vec{F}_2$，$\vec{G}_2$的表达式与（9-1-9）中的$\vec{E}_2$，$\vec{F}_2$，$\vec{G}_2$相同，而ω有以下表达式

$$\omega=\frac{\sigma\gamma M_\xi^2}{1+(\gamma-1)M_\xi^2} \tag{9-4-2}$$

这里

$$M_\xi=\frac{U_\xi}{c},\quad U_\xi=\xi_x u+\xi_y v+\xi_z w$$

可以看出，M_ξ为流向马赫数，在计算中，可按式（9-4-2）确定ω的值，也可按“底层近似”的方法选取ω的值

当$M_\xi>1+\varepsilon_0$时，取$\omega=1$；

当$M_\xi<1+\varepsilon_0$时，取$\omega=0$。

这里ε_0为某一选定的小量，$0<\varepsilon_0\ll 1$。

二、差 分 方 程

采用上节相同的计算方法，方程（9-4-1）的差分方程有以下形式

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial\vec{U}}+\frac{\theta_1}{1+\theta_2}\Delta\xi\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\vec{G}_2}{\partial\vec{U}}\right)\right]\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial\vec{U}}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial\vec{U}}+\frac{\theta_1}{1+\theta_2}\Delta\xi\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\vec{F}_2}{\partial\vec{U}}\right)\right]\Delta^i\vec{U}\\
&=\frac{-\Delta\xi}{1+\theta_2}\left(\frac{\partial\vec{F}_2}{\partial\eta}-\frac{\partial\vec{G}_2}{\partial\zeta}\right)+\frac{\theta_2}{1+\theta_2}\Delta^{i-1}\vec{E}_2-\Delta^i\vec{P}\\
&\quad-\Delta\xi\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial\xi}\right)^i_{\overline{U}}-\frac{\theta_1}{1+\theta_2}(\Delta\xi)^2\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\vec{F}_2}{\partial\xi}\right)^i_{\overline{U}}\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\vec{G}_2}{\partial\zeta}\right)^i_{\overline{U}}\right]
\end{aligned} \tag{9-4-3}$$

这里$\vec{\bar{U}}=\vec{U}/J$，J为坐标变换的雅可比矩阵所对应的值（参见式(9-1-7 b))，$\vec{U}$的表达式与式（9-1-1）中的相同（$\xi=i\Delta\xi$），即

$$\Delta^i\vec{\bar{U}}=\vec{\bar{U}}^{i+1}-\vec{\bar{U}}^i \qquad (9-4-4)$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial\vec{\bar{E}}}{\partial\xi}\right)_{\bar{U}}=\left(\dfrac{\vec{E}^*}{J}\right)\dfrac{\partial\xi_x}{\partial\xi}+\left(\dfrac{\vec{F}^*}{J}\right)\dfrac{\partial\xi_y}{\partial\xi}+\left(\dfrac{\vec{G}^*}{J}\right)\dfrac{\partial\xi_z}{\partial\xi}\\ \left(\dfrac{\partial\vec{F}_2}{\partial\xi}\right)_{\bar{U}}=\left(\dfrac{\vec{E}_i-\vec{E}_v}{J}\right)\dfrac{\partial\eta_x}{\partial\xi}+\left(\dfrac{\vec{F}_i-\vec{F}_v}{J}\right)\dfrac{\partial\eta_y}{\partial\xi}\\ \qquad\qquad+\left(\dfrac{\vec{G}_i-\vec{G}_v}{J}\right)\dfrac{\partial\eta_z}{\partial\xi}\\ \left(\dfrac{\partial\vec{G}_2}{\partial\xi}\right)_{\bar{U}}=\left(\dfrac{\vec{E}_i-\vec{E}_v}{J}\right)\dfrac{\partial\zeta_x}{\partial\xi}+\left(\dfrac{\vec{F}_i-\vec{F}_v}{J}\right)\dfrac{\partial\zeta_y}{\partial\xi}\\ \qquad\qquad+\left(\dfrac{\vec{G}_i-\vec{G}_v}{J}\right)\dfrac{\partial\zeta_z}{\partial\xi}\end{cases}$$

(9-4-5)

雅可比矩阵$\partial\vec{F}_2/\partial\vec{\bar{U}}$、$\partial\vec{G}_2/\partial\vec{\bar{U}}$和$\partial\vec{\bar{E}}/\partial\vec{\bar{U}}$的表达式在本章的附录一中给出。偏导数$\partial/\partial\eta$和$\partial/\partial\zeta$采用类似于式(9-3-23 a）和（9-3-23 b）中的二阶精度中心差分格式给出。若计算中采用ξ方向的一阶精度隐式欧拉格式（$\theta_1=1$，$\theta_2=0$），则雅可比矩阵$\partial\vec{F}_2/\partial\vec{\bar{U}}$、$\partial\vec{G}_2/\partial\vec{\bar{U}}$和$\partial\vec{\bar{E}}/\partial\vec{\bar{U}}$在$i$排进行计算，这时差分方程式(9-4-3)中最后一个括号内的项可被略去。$\Delta^i\vec{P}$项采用“底层近似”，即以底层外缘上声速点处的一阶向后差分式（9-3-18）进行计算。如果ξ方向采用二阶精度三点向后隐式偏心差分（$\theta_1=1$，$\theta_2=1/2$），则雅可比矩阵应在$i+1/2$处进行差分，且$\Delta^i\vec{P}$仍采用“底层近似”，按式（9-3-19）确定。求解差分方程（9-4-3)的方法与前面所述的求解序列式(9-3-24)～(9-3-27)完全相同。

文献[10]采用一阶精度隐式欧拉格式求解三维PNS方程，给出了计算结果。本书作者采用二阶精度三点向后隐式差分格式求解二维PNS方程，给出了计算结果。

三、网格生成

一般坐标系（ξ，η，ζ）与直角坐标系（x，y，z）之间的转换关系如方程（9-1-6）所示。设ξ为推进方向，则推进方法是在$\xi=\xi_0$的某一剖面上给定流场的物理参数，沿ξ方向推进求解PNS方程。在计算空间内，$\eta=0$对应于物面，$\eta=1$对应于计算区域的外边界，如外激波，则有$\Delta\eta=1/(NK-1)$，同理有$\Delta\zeta=1/(NJ-1)$，其中NK和NJ分别为η和ζ方向的网格点数，$\eta=(k-1)\Delta\eta$，$\zeta=(j-1)\Delta\zeta$。设(x_b, y_b, z_b)为直角坐标系内物面点的坐标，$s(k)$为沿η方向的坐标变换函数，这里的$s(k)$是为物面附近的网格加密而设计的，则在（η，ζ）平面内，物理空间内的任意一点的坐标可由以下关系式确定

$$\begin{cases} x(j, k)=x_b(j)+\delta(j)s(k)[\vec{n}(j)\cdot\vec{i}] \\ y(j, k)=y_b(j)+\delta(j)s(k)[\vec{n}(j)\cdot\vec{j}] \\ z(j, k)=z_b(j)+\delta(j)s(k)[\vec{n}(j)\cdot\vec{k}] \end{cases} \tag{9-4-6}$$

其中$\delta(j)$为（η，ζ）平面内η方向上计算区域的长度。若取激波为计算区域的外边界，即在激波上$\eta=1$，则$\delta(j)$为激波脱体距离（参见图9-2）。

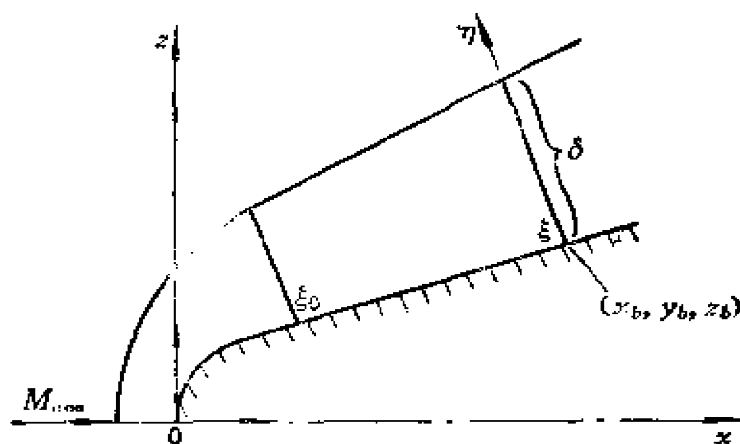


图9-2　网格生成图

$\vec{n}$ 为 η 方向的单位向量，这可以是垂直于物面的法向，也可以是不垂直于物面的方向；$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 分别是 x，y，z 三个坐标方向上的单位向量。由式（9-4-6）可得

$$\begin{cases} x_\xi = (x_b)_\xi + \delta_\xi \cdot s \cdot (\vec{n}\cdot\vec{i}) + \delta \cdot s \cdot (\vec{n}\cdot\vec{i})_\xi \\ y_\xi = (y_b)_\xi + \delta_\xi \cdot s \cdot (\vec{n}\cdot\vec{j}) + \delta \cdot s \cdot (\vec{n}\cdot\vec{j})_\xi \\ z_\xi = (z_b)_\xi + \delta_\xi \cdot s \cdot (\vec{n}\cdot\vec{k}) + \delta \cdot s \cdot (\vec{n}\cdot\vec{k})_\xi \end{cases} \qquad (9\text{-}4\text{-}7)$$

这里下标 ξ 表示函数对 ξ 的偏导数，其中 $(x_b)_\xi$、$(y_b)_\xi$、$(z_b)_\xi$、$(\vec{n}\cdot\vec{i})_\xi$、$(\vec{n}\cdot\vec{j})_\xi$、$(\vec{n}\cdot\vec{k})_\xi$ 可采用中心差分逼近式进行计算，δ_ξ 可采用激波装配法确定（参见附录二）。

四、边 界 条 件

考虑一绕流问题，如图9-2所示，计算区域为激波与物面之间的流场。对于空间推进方法，所需确定的边界条件为物面和外边界。若采用激波装配方法处理外激波，则外边界是激波。

（一）物面边界条件

在物面上，对于速度的边界条件取滞止条件；温度取等温壁或绝热壁；另外，在物面处取压力对物面的法向导数为零作为辅助边界条件，这里取二阶精度的单边差分逼近式计算物面压力值，则物面边界条件为：

$$u = v = w = 0$$

$$T = T_w \quad 或 \quad \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_w = 0$$

$$p_w = \frac{1}{3}(4p_2 - p_3)$$

下标2，3表示紧接物面二个网格点上的参数；下标 w 表示物面上的参数；n 表示物面法向。

（二）外边界条件

尖头物体

对于尖头物体，外激波的确定可采用激波捕捉法，即取外边界为离物面足够远处的 $\eta = \eta_e$ 的曲面上，使得外激波被包含在计

算区域内。在该边界上取来流条件为

$$u=(\vec{V}_\infty\cdot\vec{i}),\quad v=(\vec{V}_\infty\cdot\vec{j})$$
$$w=(\vec{V}_\infty\cdot\vec{k}),\quad \rho=\rho_\infty$$
$$p=p_\infty$$

这里下标∞表示来流参数。

2. 钝头物体

对于钝头物体，因外激波为强激波，特别是在超声速或高超声速的绕流中，故在数值计算中，外激波的确定多采用装配法，当然也可采用捕捉法（其方法与尖头物体时相同）。装配法的基本思想是利用内点差分计算方法，以单边差分代替 η 方向的差分逼近，求出激波后的压力值或利用激波上的特征相容关系式，求得波后压力值，然后根据激波前后关系式，确定激波后的其他参数。文献〔2〕中给出了激波装配方法的计算公式（见本章附录二）。在下一节中给出了以内点差分方程计算激波上压力值的方法。

第五节　PNS方程的分区求解方法

从以上的描述可以看出，采用空间推进方法求解定常 PNS 方程，存在有数学提法不适定的问题。虽然很多作者为解决该问题提出了各种处理方法，但由于未能完全消除流向压力梯度中的"椭圆"型部分，使得在数值计算中要求推进步长必须大于某一确定的值，也就是要求所选用的推进步长能"跨过"向上游传播信息的距离，否则将出现数值解按指数增长的情况。然而在实际较复杂的流场中，选取这样较大的推进步长，会直接影响数值解的精度，导致计算结果失真。采用"整体迭代"方法虽然解决了数学提法不适定的问题，但在很多情况下所需的计算机时与采用时间相关方法解同一问题所需的计算机时相当，这样就失去了空间推进方法的优越性。

为了彻底解决空间推进方法在计算中所存在的不稳定问题，且能基本体现空间推进方法的优点，本书作者提出了PNS方程的

分区求解方法。其基本思想是将计算流场分为两个区域：一为靠近物面的亚声速区域；另一为整个流场。显然前者包含在后者之中，且采用两种网格两种方法来求解。在整个流场区域内，采用粗网格的空间推进方法；在靠近物面的区域内采用细网格的时间相关方法。本节将利用错点差分格式简单介绍 PNS 方程的分区求解方法。

一、基 本 方 程

选用物理坐标及坐标变换与第八章相同，在计算坐标内，对于完全气体经无量纲化后的二维可压缩N-S方程的向量形式如式（8-1-11）。略去式（8-1-11）中粘性项内对 x 的导数项，则简化为非定常PNS方程

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x}+N\left[\frac{\partial \vec{f}_2}{\partial z}-L\frac{\partial \vec{U}}{\partial z}-M\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial z}\right]$$

$$=N\left[\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial z}-M\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial z}\right]+D_1+\vec{D}_2 \qquad (9\text{-}5\text{-}1)$$

方程式（9-5-1）中的向量 $\vec{U}$，$\vec{f}_i$，$\vec{F}_i$ 和 $\vec{D}_i$（$i=1,2$）的表达式与式（8-1-1）中的相同，只是粘性应力张量 $\sigma_{i,j}$ 有以下简单表达式

$$\sigma_{11}=\frac{2\mu}{Re}\left[\frac{1}{H}\left(\frac{v}{R_1}-NM\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\frac{1}{3}d_{iv}\vec{V}\right]$$

$$\sigma_{22}=\frac{2\mu}{Re}\left[N\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{1}{3}d_{iv}\vec{V}\right]$$

$$\sigma_{21}=\frac{\mu}{Re}\left[N\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{H}\left(M\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{u}{R_1}\right)\right]$$

$$d_{iv}\vec{V}=\frac{1}{H}\left[N\frac{\partial(Hv)}{\partial z}-NM\frac{\partial u}{\partial z}\right]+\frac{u\cos\theta+v\sin\theta}{R}$$

二、差分方程及其算法

从方程（9-5-1）出发，建立空间推进方法的差分方程和时间相关方法的差分方程及其边界条件。

（一）空间推进方法

从方程（9-5-1）消去对时间 t 的导数项，则得定常 PNS 方程为

$$\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x}+N\left[\frac{\partial \vec{f}_2}{\partial z}-L\frac{\partial \vec{U}}{\partial z}-M\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial z}\right]=\vec{G} \qquad (9\text{-}5\text{-}2)$$

$$\vec{G}=\vec{G}_1+\vec{G}_2$$

$$\vec{G}_1=N\left[\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial z}-M\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial z}\right]$$

$$\vec{G}_2=\vec{D}_1+\vec{D}_2$$

为建立以二阶精度逼近方程组（9-5-2）的差分方程，对粘性项 $\vec{G}_1$ 和自由项 $\vec{G}_2$ 采用中心差分，对 x 的导数项也取中心差分$\left(对于 n+\frac{1}{2}点\right)$，对 z 方向的导数项采用错点格式，则得逼近于方程组(9-5-2)的差分方程，且对 x 和 z 皆为二阶精度。其形式为

$$(\vec{f}_1)_j^{n+1}-(\vec{f}_1)_j^n+\frac{k}{2}N_j^{n+\frac{1}{2}}\{[\delta_z^+(\vec{f}_2)_j^{n+1}+\delta_z^-(\vec{f}_2)_j^n]$$

$$-L_j^{n+\frac{1}{2}}[\delta_z^+\vec{U}_j^{n+1}+\delta_z^-\vec{U}_j^n]$$

$$-M_j^{n+\frac{1}{2}}[\delta_z^-(\vec{f}_1)_j^{n+1}+\delta_z^+(\vec{f}_1)_j^n]\}=\Delta x\vec{G}^{n+\frac{1}{2}} \qquad (9\text{-}5\text{-}3)$$

式中 $x_n=(n-1)\Delta x$；

$z_j=(j-1)\Delta z$；

$\Delta x/\Delta z=k$；

$\vec{G}_j^{n+\frac{1}{2}}=(\vec{G}_1)_j^{n+\frac{1}{2}}+(\vec{G}_2)_j^{n+\frac{1}{2}}$，

$(\vec{G}_i)_j^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\vec{G}_i^n+\vec{G}_i^{n+1})$， $i=1, 2$

由此可以看出，所得的差分方程组（9-5-3）为对于$(n+1, j)$点上的非线性代数方程组，可用迭代方法进行求解。在 $\vec{G}_j^{n+\frac{1}{2}}$

中的导数项可采用简单中心差分给出。

若取

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \dfrac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{U}} \vec{U} = \mathbf{A}_1 \vec{U} \qquad \dfrac{\partial \vec{f}_1}{\partial x} = \dfrac{\partial \vec{f}_1}{\partial \vec{U}} \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial z} = \mathbf{A}_1 \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \vec{f}_2}{\partial z} = \dfrac{\partial \vec{f}_2}{\partial \vec{U}} \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial z} = \mathbf{A}_2 \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial z} \\ \vec{G}_1 = N\left[\dfrac{\partial \vec{F}_2}{\partial \vec{U}} \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial z} - M \dfrac{\partial \vec{F}_1}{\partial \vec{U}} \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial z}\right] \\ \quad = N\left[\dfrac{\partial \vec{F}_2}{\partial \vec{U}} - M \dfrac{\partial \vec{F}_1}{\partial \vec{U}}\right] \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial z} = \mathbf{A}_3 \dfrac{\partial \vec{U}}{\partial z} \end{cases} \tag{9-5-4}$$

类似可将$\vec{G}_2$写为以下形式

$$\vec{G}_2 = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \mathbf{A}_4 \vec{U} + \mathbf{A}_5 \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} \tag{9-5-5}$$

将式（9-5-4）和（9-5-5）代入差分方程组（9-5-3），则可得对于（$n+1$，j）点的非线性代数迭代式为

$$[\alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \mathbf{A}_3 + \alpha_4 \mathbf{A}_4 + \alpha_5 \mathbf{A}_5 + \alpha_6 \mathbf{I}]^{n+1} \vec{U}_j^{n+1} = \overrightarrow{RHS} \tag{9-5-6}$$

这里 $\mathbf{I}$ 为单位矩阵，$\overrightarrow{RHS}$ 为差分方程（9-5-3）中的已知项，即所有的在 x 方向 n 层的各项之和。方程（9-5-6）的求解可采用迭代方法，即首先取式（9-5-6）中左端的矩阵为 n 层的值，求解该方程，然后通过迭代进行修正，以达到所要求的精度。一般只需迭代 2 ～ 3 次即可。

为了计算简单，也可将粘性项取为显式，即取方程（9-5-3）中粘性差分式为

$$(\vec{G}_1)_j^{n+\frac{1}{2}} = (\vec{G}_1)_j^n, \quad (\vec{G}_2)_j^{n+\frac{1}{2}} = (\vec{D}_2)_j^n$$

在这种情况下，迭代式（9-5-6）左端中以 $\alpha_3\mathbf{A}_3$ 和 $\alpha_5\mathbf{A}_5$ 为系数的项可移至方程右端，则迭代式可简化为（这时粘性项在 x 方向为一阶精度）

$$[\alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_4 \mathbf{A}_4 + \alpha_6 \mathbf{I}]^{n+1} \vec{U}_j^{n+1} = \overrightarrow{RHS}^* \tag{9-5-7}$$

这里带星号的右端项是表示将式（9-5-6）中 $\alpha_3\mathbf{A}_3$ 和 $\alpha_5\mathbf{A}_5$ 项移到右端后的所有右端项。

（二）时间相关方法

这里所采用的时间相关方法与第八章所给出的计算方法相同。对应于方程组（9-5-2）的差分方程与（8-2-1）～（8-2-3）给出的差分方程相同，只是其中粘性项与自由项之和 $\bar{F}$ 应去掉 $\bar{F}_1$ 和 x 方向的导数项。对于差分化后所得到的代数方程、采用近似因式分解方法进行求解。

三、计 算 步 骤

设所求解的物理区域经坐标变换后在计算空间内为 $ABCD$ 区域，对此区域采用两种网格进行离散化，一为粗网格，布满整个区域；另一为细网格，位于靠近物面的亚声速流动的区域内，如图9-3所示。

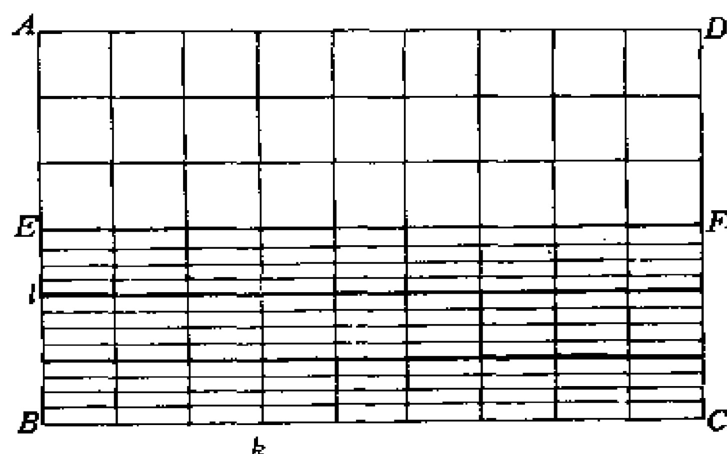


图9-3　网格分布示意图

设初始剖面 AB 处流场参数在粗网格点上和细网格点上皆为已知。计算步骤如下。

（一）在粗网格上求解差分方程（9-5-3）

从 AB 截面开始在粗网格上采用空间推进方法给出 AB 后 k 排（例如取 $k=3$，如图 9-3 所示）的解。要求 z 方向粗网格点，$j=2$ 处，$M_x>1$，这里 $M_x=u/c$，c 为声速。

1. 激波点的求解方法

设JN为z方向上粗网格的点数．在激波上$j=JN$。激波点上的求解分以下几步。

（1）利用内点差分方程（9-5-3）求激波点上的压力值p_s。为此只需以$\delta_z^-(\vec{g})^n_{JN}$代替式（9-5-3）中的$\delta_z^+(\vec{g})^{n+1}_{JN}$即可。这里$\vec{g}=\vec{U}$，$\vec{f}_1$，$\vec{f}_2$。

（2）利用激波点上的压力值p_s，求激波斜率。设$B_s=B_s(s)$为激波形状，则由激波前后关系式可推得

$$\left(\frac{\partial B_s}{\partial S}\right)^{n+1}=h\frac{1}{2A}\left[B+(B^2-4AC)^{1/2}\right] \qquad (9\text{-}5\text{-}8)$$

这里

$$A=u_\infty-k,\quad B=u_\infty v_\infty$$

$$C=v_\infty^2-k,\quad k=\frac{r+1}{2}p_s+\frac{r-1}{2}\frac{1}{M_\infty^2}$$

$$u_\infty=\sin\theta,\quad v_\infty=-\cos\theta$$

$$h=1+\frac{B_s}{R_t}$$

再利用n层的激波斜率可求出$n+1$层的激波位置

$$(B_s)^{n+1}=(B_s)^n+\left(\frac{\partial B_s}{\partial S}\right)^n\cdot\Delta S \qquad (9\text{-}5\text{-}9)$$

由式（9-5-8）和（9-5-9）所求得的$(B_s)^{n+1}$和$(\partial B_s/\partial s)^{n+1}$可求出$n+1$层的激波法向，再利用附录二中的激波前后关系式（A－16）可求出激波上的所有参数值。

2. 内点值的计算

激波点上的参数值求得以后，可利用内点差分方程（9-5-3）求出所有内点的值，直到$j=2$。

3. 物面点的计算

利用物面法向速度分量为零求出粗网格物面点上的值。

以上计算过程给出了$n+1$层粗网格点上的参数值。采用同样的方法可求出$n+2$，$n+3$，…$n+k$层的值。应当指出，按以上方法，物面点的处理是不严格的，为了去掉这一影响，可

取粗网格 $j = l + 1$ 排作为细网格的外边界，若取 $l = 3$，则如图9-3所示，细网格外边界为EF。

（二）在细网格上的求解

以粗网格所给出的外边界作为定常边界，利用第八章所给出的计算方法，求出细网格点上的流动参数值。然后利用插值方法给出 $j = 2, 3, \cdots l$；$n = k$ 处粗网格点上的值。再以 $n = k$ 截面作为空间推进的初始剖面，计算以后 k 排的参数值。

以上方法不但完全消去了求解定常 PNS 方程的空间推进方法中所存在的不稳定问题，而且保留了原方法节省计算机时的优点，这是因为时间相关方法只在靠近物面的亚声速区内采用，而且外边界为定常边界，所需选取的推进方向计算区域的大小只要大于前面所述的"向上游传播信息"的距离，故推进排数 k 一般取 3 即可。这样，时间相关方法在此区域内收敛很快，使得该方法保持了原 PNS 方程推进求解方法的优点。

第六节　算　　例

采用上述方法求解 PNS 方程，给出了尖头和钝头物体轴对称超声速粘性绕流的计算结果。

一、尖 头 物 体

对于尖头物体，初始剖面的流动参数按以下方法给出：首先由无粘锥型流计算结果给出初始剖面 $\xi = \xi_0$ 处的流动参数，沿 ξ 方向推进求解定常 PNS方程，将推进一步所求出的流动参数按锥型流假设，送回 $\xi = \xi_0$ 的初始剖面处，然后再重新推一步。反复以上过程，直到两次所求出的流动参数的改变量小于某一给定的小量，则得 $\xi = \xi_0$ 处粘性流的初始值（这里假设在物体尖顶附近，粘性绕流仍满足锥型流条件）。

在图9-4～图9-6中给出了尖锥柱裙的超声速粘性绕流计算结果。来流马赫数$Ma_\infty = 2.0$，雷诺数 $Re_{r_0} = 1.85 \times 10^5$（以柱半径$r_0$

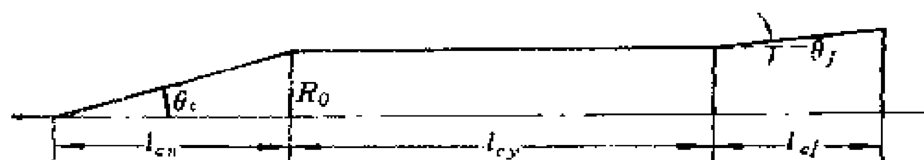


图9-4　尖锥柱裙物形

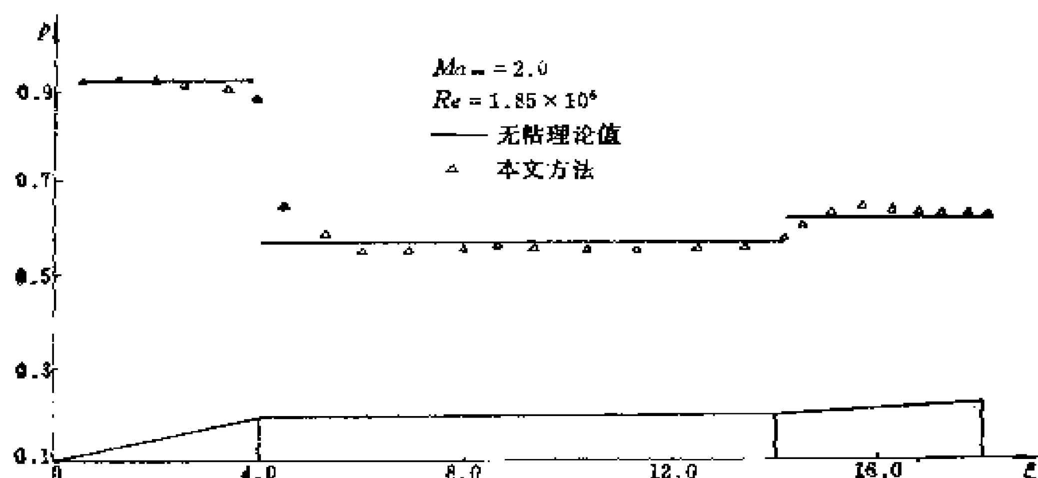


图9-5　尖锥柱裙物面压力分布

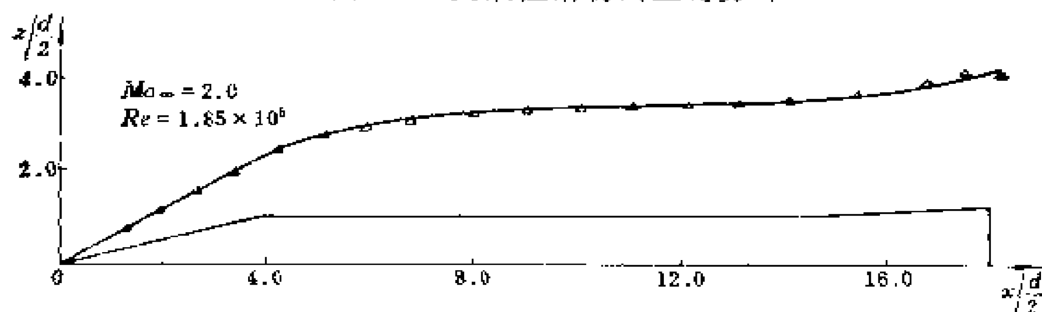


图9-6　尖锥柱裙的激波外形

为特征长度），半锥角 $\theta_c=10^\circ$，裙的倾斜角 $\theta_f=7^\circ$。在图 9-4 中给出了物体外形。

图9-5中给出了物面压力分布的计算结果。为了比较，在图中还给出了无粘绕流的计算结果。

从这里可以看出，粘性干扰对物面压力分布的影响主要是在物体的拐角附近。在图 9-6 中给出了采用激波捕捉法求出的尖锥柱裙粘性绕流的激波外形。可以看出，物面拐角对激波形状的影响

是明显的。

应当指出，在物面拐角附近，或物面曲率变化较大处，为了使数值解满足一定精度，要求流向的计算步长减小。然而，若采用一般的空间推进方法，太小的推进步长将产生求解过程的不稳定，显然这种情况下，分区求解方法为更合适的计算方法。

二、钝头物体

对于钝头物体，采用文献〔22〕中给出的时间相关方法给出球头超声速粘性绕流流场，从而可给出 $\xi=\xi_0$ 处的流场参数，作为推进方法的初始值。外激波采用激波装配方法确定。在图9-7～图9-9中给出了球锥超声速粘性绕流的计算结果。来流马赫数 $Ma_\infty=13.41$，雷诺数 $Re_{r_0}=1515$（以球头半径 r_0 为特征长度），壁温 $T_w/T_0=0.0741$，T_0 为驻点温度，来流温度 $T_\infty=200^\circ R$，锥的半顶角 $\theta_c=7.5^\circ$。图9-7给出了物面压力分布。图9-8给出了物面热流分布。

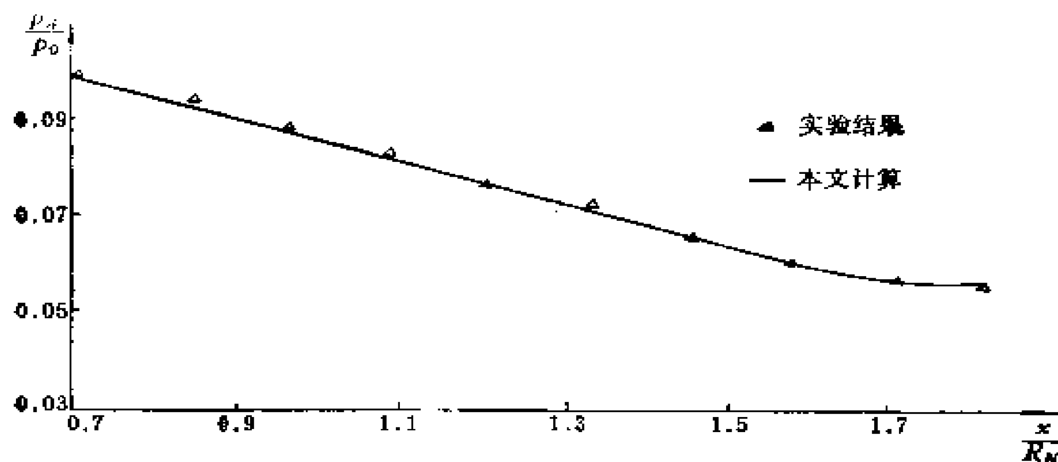


图9-7　球锥物面压力分布

（$Ma_\infty=13.41$）

图9-9给出了 $Ma_\infty=10.6$，$Re_{r_0}=1.2\times10^6$，$T_w/T_0=0.27$，半锥角 $\theta_c=15^\circ$ 的球锥物面热流分布。为了比较在图中给出了相应的实验结果。可以看出，计算结果与实验值是吻合的。图9-10给出了标模 $AGARD$ 的外形。图9-11给出了标模 $AGARD$ 超声速粘

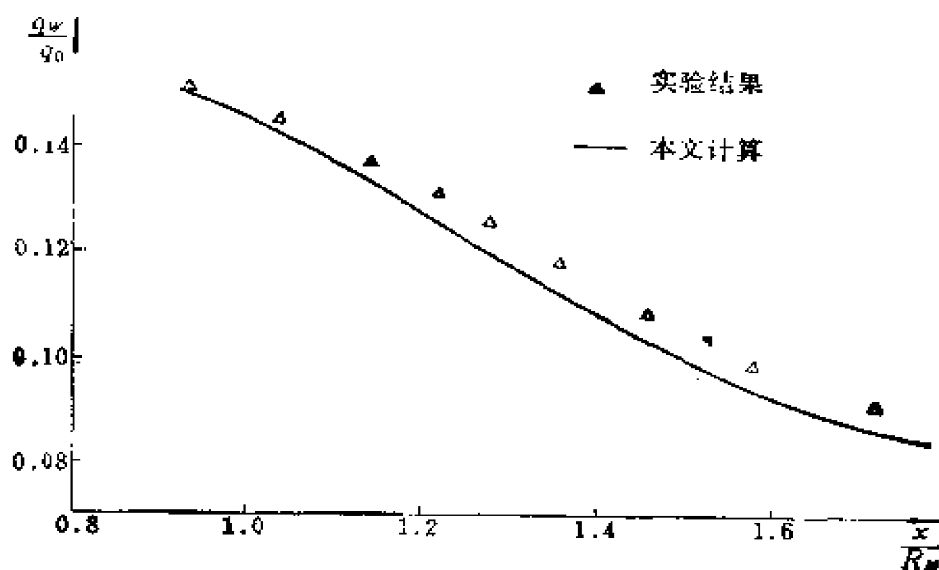


图9-8　球锥物面热流分布

($Ma_{\infty}=13.41$)

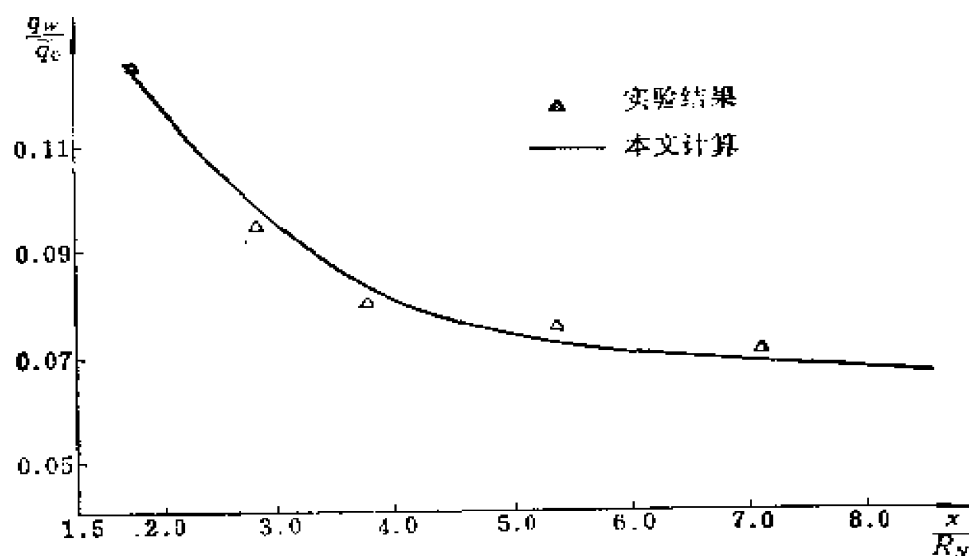


图9-9　球锥物面热流分布

($Ma_{\infty}=10.6$)

性绕流的物面压力分布计算结果。

在标模 $AGARD$ 粘性绕流计算中，其来流参数为：来流马赫数 $Ma_{\infty}=2$，雷诺数 $Re_{\infty}=1.63\times10^{6}$（以柱的直径为特征长度）。为了比较，在图9-11中还给出了相应的实验结果，可以看出，计算结果与实验值是符合的。在图9-12和图9-13中给出了钝双锥一

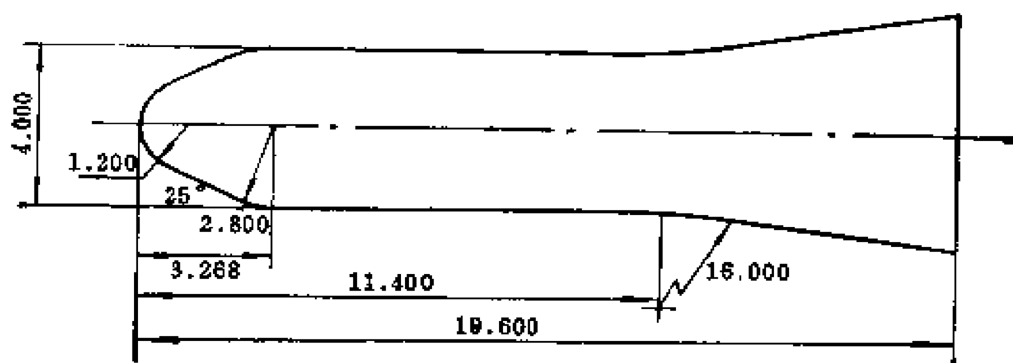


图9-10 标模$AGARD$外形

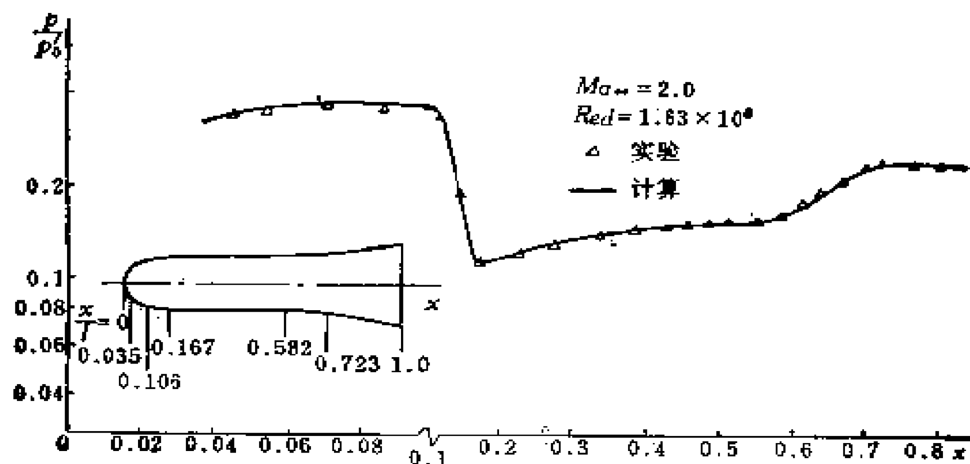


图9-11 标模$AGARD$的物面压力分布

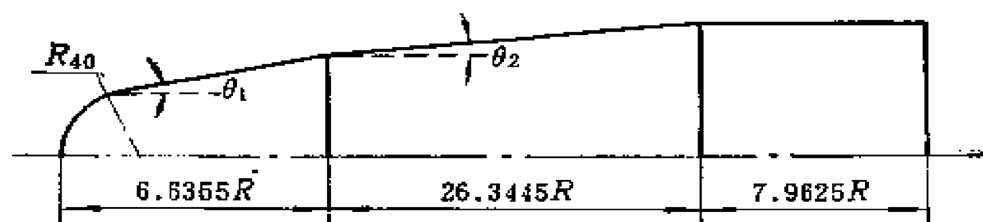


图9-12 钝双锥-柱物形

柱超声速粘性绕流的计算结果。来流马赫数 $Ma_\infty=9.36$，第一个半锥角 $\theta_1=16°$ 第二个半锥角 $\theta_2=7°$，$Re=2.74\times10^7/\text{m}$。图9-12给出了物形。

图9-13中给出了物面压力分布的计算结果。为了比较，在图

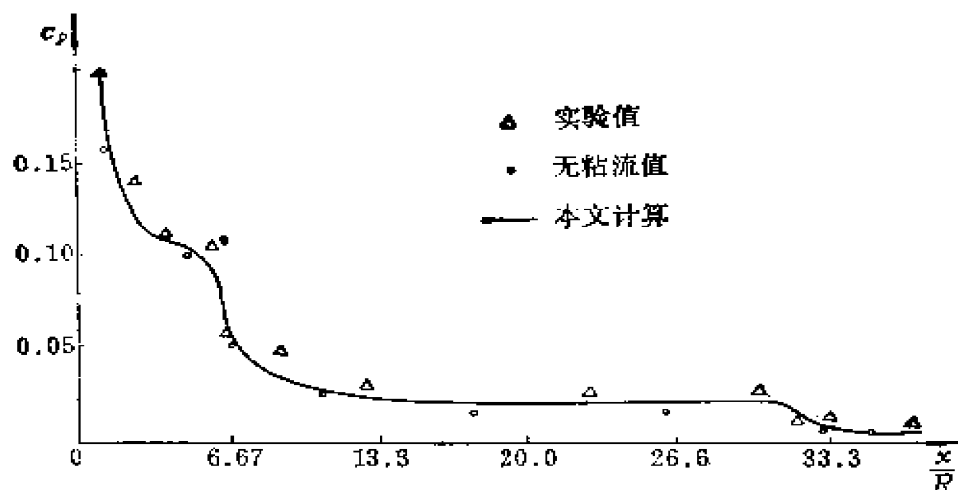


图9-13 钝双锥-柱物面压力分布

中还给出了实验值和无粘绕流的计算结果。

可以看出，由于数值求解 PNS 方程给出的粘性流场解，模拟了绕流流场中的粘性干扰，所以给出的计算结果在物形拐角附近，与无粘绕流相比，其计算结果与实验值更符合。

附录一 雅可比矩阵$\partial\vec{F}/\partial\vec{U}$、$\partial\vec{G}/\partial\vec{U}$和$\partial\vec{E}/\partial\vec{U}$

雅可比矩阵 $\partial\vec{F}_2/\partial\vec{U}$ 和 $\partial\vec{G}_2/\partial\vec{U}$ 由式（9-1-9）可得

$$\frac{\partial\vec{F}_2}{\partial\vec{U}}=\frac{\partial}{\partial\vec{U}}\left\{\frac{1}{J}\left[\eta_x(\vec{E}_i-\vec{E}_v^*)+\eta_y(\vec{F}_i-\vec{F}_v^*)+\eta_z(\vec{G}_i-\vec{G}_0)\right]\right\} \tag{A-1}$$

$$\frac{\partial\vec{G}_2}{\partial\vec{U}}=\frac{\partial}{\partial\vec{U}}\left\{\frac{1}{J}\left[\zeta_x(\vec{E}_i-\vec{E}_v^*)+\zeta_y(\vec{F}_i-\vec{F}_v^*)+\zeta_z(\vec{G}_i-\vec{G}_v^*)\right]\right\} \tag{A-2}$$

因此可分为粘性和无粘两部分之和，即

$$\frac{\partial\vec{F}_2}{\partial\vec{U}}=\left(\frac{\partial\vec{F}_2}{\partial\vec{U}}\right)_i-\left(\frac{\partial\vec{F}_2}{\partial\vec{U}}\right)_v \tag{A-3}$$

$$\frac{\partial \vec{G}_2}{\partial \vec{U}}=\left(\frac{\partial \vec{G}_2}{\partial \vec{U}}\right)_i-\left(\frac{\partial \vec{G}_2}{\partial \vec{U}}\right)_v \tag{A-4}$$

再利用$\vec{\bar{U}}=\vec{U}/J$，则矩阵的无粘部分有

$$\left(\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial \vec{U}}\right)_i=\eta_x\frac{\partial \vec{E}_i}{\partial \vec{U}}+\eta_y\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial \vec{U}}+\eta_z\frac{\partial \vec{G}_i}{\partial \vec{U}} \tag{A-5}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{G}_2}{\partial \vec{U}}\right)_i=\xi_x\frac{\partial \vec{E}_i}{\partial \vec{U}}+\xi_y\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial \vec{U}}+\xi_z\frac{\partial \vec{G}_i}{\partial \vec{U}} \tag{A-6}$$

雅可比矩阵$\partial \vec{E}_i/\partial \vec{U}$的表达式与式（9-3-11）中给出的$\partial \vec{E}'/\partial \vec{U}$相同，只是取$\omega=1$，$\partial \vec{F}_i/\partial \vec{U}$和$\partial \vec{G}_i/\partial \vec{U}$的表达式与式（9-3-12）和（9-3-13）中给出的相同。

粘性部分：

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial \vec{U}}\right)_v=\frac{\partial}{\partial \vec{U}}\left[\frac{1}{J}(\eta_x\vec{E}_v^*+\eta_y\vec{F}_v^*+\eta_z\vec{G}_v^*)\right]$$

$$=\frac{\mu}{JRe_L}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\(f_v)_{21}&l_1a_4&l_4a_4&l_5a_4&0\\(f_v)_{31}&l_4a_4&l_2a_4&l_6a_4&0\\(f_v)_{41}&l_5a_4&l_6a_4&l_3a_4&0\\(f_v)_{51}&(f_v)_{52}&(f_v)_{53}&(f_v)_{54}&l_7a_4\end{pmatrix}$$

这里

$$a_1=\left(\frac{Ju}{\rho}\right)_\eta,\quad a_2=\left(\frac{Jv}{\rho}\right)_\eta,\quad a_3=\left(\frac{Jw}{\rho}\right)_\eta$$

$$a_4=\left(\frac{J}{\rho}\right)_\eta,\quad a_5=\left(\frac{Ju^2}{\rho}\right)_\eta$$

$$a_6=\left(\frac{Jv^2}{\rho}\right)_\eta,\quad a_7=\left(\frac{Jw^2}{\rho}\right)_\eta$$

$$a_8=\left\{\left[\frac{p}{(\gamma-1)\rho^2}-\frac{u^2+v^2+w^2}{2\rho}\right]J\right\}_\eta$$

$$l_1=\frac{4}{3}\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2,\qquad l_2=\eta_x^2+\frac{4}{3}\eta_y^2+\eta_z^2$$

$$l_3=\eta_x^2+\eta_y^2+\frac{4}{3}\eta_z^2,\qquad l_4=\eta_x\eta_y/3$$

$$l_5=\eta_y\eta_z/3, \quad l_6=\eta_y\eta_z/3$$

$$l_7=\frac{\gamma}{P_r}(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2)$$

$$(f_v)_{21}=-[l_1a_1+l_4a_2+l_5a_3]$$

$$(f_v)_{31}=-[l_4a_1+l_2a_2+l_6a_3]$$

$$(f_v)_{41}=-[l_5a_1+l_6a_2+l_3a_3]$$

$$(f_v)_{51}=-[l_1a_5+l_2a_6+l_3a_7]-2\left[l_4\left(\frac{Juv}{\rho}\right)_\eta+l_5\left(\frac{Juw}{\rho}\right)_\eta+l_6\left(\frac{Jvw}{\rho}\right)_\eta\right]-l_7a_8$$

$$(f_v)_{52}=(l_1-l_7)a_1+l_4a_2+l_5a_3$$

$$(f_v)_{53}=l_4a_1+(l_2-l_7)a_2+l_6a_3$$

$$(f_v)_{54}=l_5a_1+l_6a_2+(l_3-l_7)a_3$$

$$\left(\frac{\partial G_2}{\partial \bar{U}}\right)_v=\frac{\partial}{\partial \bar{U}}\left[\frac{1}{J}(\zeta_x E_v^*+\zeta_y F_v^*+\zeta_z G_v^*)\right]$$

$$\left(\frac{\partial \vec{G}_2}{\partial \vec{\bar{U}}}\right)_v=\frac{\mu}{J\mathrm{Re}_L}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ (g_v)_{21} & m_1b_4 & m_4b_4 & m_5b_4 & 0\\ (g_v)_{31} & m_4b_4 & m_2b_4 & m_6b_4 & 0\\ (g_v)_{41} & m_5b_4 & m_6b_4 & m_3b_4 & 0\\ (g_v)_{51} & (g_v)_{52} & (g_v)_{53} & (g_v)_{54} & m_7b_4\end{bmatrix}$$

这里

$$b_1=\left(\frac{Ju}{\rho}\right)_\zeta, \quad b_2=\left(\frac{Jv}{\rho}\right)_\zeta, \quad b_3=\left(\frac{Jw}{\rho}\right)_\zeta$$

$$b_4=\left(\frac{J}{\rho}\right)_\zeta, \quad b_5=\left(\frac{Ju^2}{\rho}\right)_\zeta, \quad b_6=\left(\frac{Jv^2}{\rho}\right)_\zeta$$

$$b_7=\left(\frac{Jw^2}{\rho}\right)_\zeta, \quad b_8=\left\{J\left[\frac{p}{(\gamma-1)\rho^2}-\frac{u^2+v^2+w^2}{2\rho}\right]\right\}_\zeta$$

$$m_1=\frac{4}{3}\zeta_x^2+\zeta_y^2+\zeta_z^2$$

$$m_2=\zeta_x^2+\frac{4}{3}\zeta_y^2+\zeta_z^2$$

$$m_3=\zeta_x^2+\zeta_y^2+\frac{4}{3}\zeta_z^2$$

$m_4=\zeta_x\zeta_y/3$，$m_5=\zeta_x\zeta_z/3$

$m_6=\zeta_y\zeta_z/3$，$m_7=\dfrac{\gamma}{p_r}(\zeta_x^2+\zeta_y^2+\zeta_z^2)$

$(g_v)_{21}=-[m_1b_1+m_4b_2+m_5b_3]$

$(g_v)_{31}=-[m_4b_1+m_2b_2+m_6b_3]$

$(g_v)_{41}=-[m_5b_1+m_6b_2+m_3b_3]$

$$(g_v)_{51}=-(m_1b_5+m_2b_6+m_3b_7)-2\left[m_4\left(\frac{Juv}{\rho}\right)_\xi\right.$$

$$\left.+m_5\left(\frac{Juw}{\rho}\right)_\xi+m_6\left(\frac{Jvw}{\rho}\right)_\xi-m_7b_8\right]$$

$(g_v)_{52}=(m_1-m_7)b_1+m_4b_2+m_5b_3$

$(g_v)_{53}=m_4b_1+(m_2-m_7)b_2+m_6b_3$

$(g_v)_{54}=m_5b_1+m_6b_2+(m_3-m_7)b_3$

根据式（9-4-1）中 E 的表达式，可知

$$\frac{\partial\bar{E}}{\partial\vec{\bar{U}}}=\frac{\partial}{\partial\vec{\bar{U}}}\left[\frac{1}{J}(\xi_x\vec{E}^*+\xi_y\vec{F}^*+\xi_z\vec{G}^*)\right]$$

或写为

$$\frac{\partial\vec{\bar{E}}}{\partial\vec{\bar{U}}}=\xi_x\frac{\partial\vec{E}^*}{\partial\vec{U}}+\xi_y\frac{\partial\vec{F}^*}{\partial\vec{U}}+\xi_z\frac{\partial\vec{G}^*}{\partial\vec{U}} \tag{A-7}$$

雅可比矩阵 $\partial\vec{E}^*/\partial\vec{U}$ 的表达式与式（9-3-11）中给出的 $\partial\vec{E}'/\partial\vec{U}$ 相同。

$$\frac{\partial\vec{F}^*}{\partial\vec{U}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -uv & v & u & 0 & 0\\ f_{31}^* & f_{32}^* & f_{33}^* & f_{34}^* & f_{35}^*\\ -vw & 0 & w & v & 0\\ f_{51}^* & f_{52}^* & f_{53}^* & f_{54}^* & \gamma v \end{bmatrix} \tag{A-8}$$

这里

$$f_{31}^*=\frac{\omega(\gamma-1)-2}{2}v^2+\frac{\omega(\gamma-1)}{2}(u^2+w^2)$$

$f_{32}^*=-\omega(\gamma-1)u$，$f_{33}^*=[2-\omega(\gamma-1)]v$

$$f_{34}^* = -\omega(\gamma-1)w,\quad f_{35}^* = \omega(\gamma-1)$$

$$f_{51}^* = \left[\frac{\gamma E_t}{\rho} + (\gamma-1)(u^2+v^2+w^2)\right]v$$

$$f_{52}^* = -(\gamma-1)uv$$

$$f_{53}^* = \frac{\gamma E_t}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2+w^2)$$

$$f_{54}^* = -(\gamma-1)vw$$

$$\frac{\partial \vec{G}^*}{\partial \vec{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ g_{41}^* & g_{42}^* & g_{43}^* & g_{44}^* & g_{45}^* \\ g_{51}^* & g_{52}^* & g_{53}^* & g_{54}^* & \gamma w \end{bmatrix} \tag{A-9}$$

这里

$$g_{41}^* = \frac{\omega(\gamma-1)}{2}(u^2-v^2) + \frac{[\omega(\gamma-1)-2]}{2}w^2$$

$$g_{42}^* = -\omega(\gamma-1)u,\quad g_{43}^* = -\omega(\gamma-1)v$$

$$g_{44}^* = [2-\omega(\gamma-1)]w,\quad g_{45}^* = \omega(\gamma-1)$$

$$g_{51}^* = \left[-\frac{\gamma E_t}{\rho} + (\gamma-1)(u^2+v^2+w^2)\right]w$$

$$g_{52}^* = -(\gamma-1)uw,\quad g_{53}^* = -(\gamma-1)vw$$

$$g_{54}^* = \frac{\gamma E_t}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}(u^2+v^2+3w^2)$$

附录二　激波装配方法

设激波与物面之间在物面法向的距离为激波脱体距离，则在计算坐标内，ξ 方向的网格点 $i+1$ 排处的激波脱体距离可由下式确定

$$\delta^{i+1} = \delta^i + \left(\frac{\partial \delta}{\partial \xi}\right)^i \Delta\xi \tag{A-10}$$

激波在 ξ 方向的斜率为

$$\frac{\partial\delta}{\partial\xi}=\frac{1}{2A_1}[-A_2+(A_2^2-4A_1A_3)^{1/2}] \tag{A-11}$$

这里

$$A_1=V_{\infty N}^2(\varepsilon_{12}^2+\varepsilon_{22}^2+\varepsilon_{32}^2)-(\varepsilon_{12}^2u_\infty^2+\varepsilon_{22}^2v_\infty^2+\varepsilon_{32}^2w_\infty^2$$
$$+2\varepsilon_{12}\varepsilon_{22}u_\infty V_\infty+2\varepsilon_{22}\varepsilon_{32}v_\infty w_\infty+2\varepsilon_{12}\varepsilon_{32}u_\infty w_\infty)$$
$$A_2=V_{\infty N}^2(2\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}+2\varepsilon_{21}\varepsilon_{22}+2\varepsilon_{31}\varepsilon_{32})-2[\varepsilon_{11}\varepsilon_{12}u_\infty^2$$
$$+\varepsilon_{21}\varepsilon_{22}v_\infty^2+\varepsilon_{31}\varepsilon_{32}w_\infty^2+(\varepsilon_{21}^2+\varepsilon_{22}\varepsilon_{11})u_\infty v_\infty$$
$$+(\varepsilon_{21}\varepsilon_{32}+\varepsilon_{31}\varepsilon_{22})v_\infty w_\infty+(\varepsilon_{31}\varepsilon_{21}+\varepsilon_{11}\varepsilon_{32})u_\infty w_\infty]$$
$$A_3=V_{\infty N}^2(\varepsilon_{11}^2+\varepsilon_{21}^2+\varepsilon_{31}^2)-(\varepsilon_{11}^2u_\infty^2+\varepsilon_{21}^2v_\infty^2+\varepsilon_{31}^2w_\infty^2$$
$$+2\varepsilon_{11}\varepsilon_{21}u_\infty v_\infty+2\varepsilon_{21}\varepsilon_{31}v_\infty w_\infty+2\varepsilon_{31}\varepsilon_{11}u_\infty w_\infty)$$
$$\varepsilon_{11}=[(y_b)_\xi+\delta\cdot(\vec{n}\cdot\vec{j})_\xi]z_\zeta-[(z_b)_\xi+\delta\cdot(\vec{n}\cdot\vec{k})]y_\zeta$$
$$\varepsilon_{12}=(\vec{n}\cdot\vec{j})z_\zeta-(\vec{n}\cdot\vec{k})y_\zeta$$
$$\varepsilon_{21}=[(z_b)_\xi+\delta\cdot(\vec{n}\cdot\vec{k})_\xi]x_\zeta-[(x_b)_\xi+\delta\cdot(\vec{n}\cdot\vec{i})]z_\zeta$$
$$\varepsilon_{22}=(\vec{n}\cdot\vec{k})x_\zeta-(\vec{n}\cdot\vec{i})z_\zeta$$
$$\varepsilon_{31}=[(x_b)_\xi+\delta\cdot(\vec{n}\cdot\vec{i})]y_\zeta-[(y_b)_\xi+\delta\cdot(\vec{n}\cdot\vec{j})]x_\zeta$$
$$\varepsilon_{32}=(\vec{n}\cdot\vec{i})y_\zeta-(\vec{n}\cdot\vec{j})x_\zeta$$

以上所有参数的定义与正文中相同，且$V_{\infty N}$为来流速度在激波法向上的投影。

当激波位置确定以后，波后压力值可由差分方程式(9-4-3)，并采用η方向的单边差分逼近式给出。其他参数由定常条件下的激波前后关系式给出。

在定常条件下，激波上要求满足以下激波前后关系式

$$\begin{cases} h+\dfrac{V_N^2}{2}=h_\infty+\dfrac{V_{\infty N}^2}{2} \\ p+\rho V_N^2=p_\infty+\rho_\infty V_{\infty N}^2 \\ u=u_\infty-\left(1-\dfrac{\rho_\infty}{\rho}\right)n_1\cdot V_{\infty N} \\ v=v_\infty-\left(1-\dfrac{\rho_\infty}{\rho}\right)n_2\cdot V_{\infty}N \\ w=w_\infty-\left(1-\dfrac{\rho_\infty}{\rho}\right)n_3\cdot V_{\infty}N \end{cases} \tag{A-12}$$

这里下标∞表示激波前的参数，V_N 表示速度向量在激波法向上的投影，$\vec{N}$ 表示激波的单位外法向，有

$$\begin{cases} \vec{N}=\{n_1,\ n_2,\ n_3\}^T \\ V_N=\vec{V}\cdot\vec{N}=(un_1+vn_2+wn_3) \end{cases} \tag{A-13}$$

u，v，w 为速度向量$\vec{V}$ 在三个坐标方向上的分量，h 为焓值。在正文中的无量纲定义下，对于完全气体，p_∞和h_∞有以下无量纲形式

$$\begin{cases} p_\infty=\dfrac{1}{\gamma Ma_\infty^2} \\ h_\infty=\dfrac{1}{(\gamma-1)Ma_\infty^2} \end{cases} \tag{A-14}$$

且状态方程可写为

$$p=\frac{\rho T}{\gamma Ma_\infty^2} \tag{A-15}$$

这里，M_∞ 为来流马赫数；γ 为比热比。在此情况下，利用状态方程（A-15），激波前后关系式（A-12）可写为以下无量纲形式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}=\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}+\dfrac{2}{\gamma+1}\dfrac{1}{Ma_\infty^2V_{\infty N}^2} \\ p=\dfrac{1}{\gamma Ma_\infty^2}+\left(1-\dfrac{1}{\rho}\right)V_{\infty N}^2 \\ u_s=u_\infty-\left(1-\dfrac{1}{\rho}\right)n_1V_{\infty N} \\ v_s=v_\infty-\left(1-\dfrac{1}{\rho_s}\right)n_2V_{\infty N} \\ w_s=w_\infty-\left(1-\dfrac{1}{\rho_s}\right)n_3V_{\infty N} \end{cases} \tag{A-16}$$

方程式中的$V_{\infty N}$为来流速度在激波外法向$\vec{N}$上的投影，即

$$V_{\infty N}=(u_\infty n_1+v_\infty n_2+w_\infty n_3) \tag{A-17}$$

参考文献

1 Vigneron Y C, Rakich, J V and Tannehill J C. Calculation of Supersonic Viscous Flow over Delta Wings with Shap Subsonic Leading Edges. AIAA Paper No. 78-1137

2 Schiff L B and Steger J L. Numerical Simulation of Steady Supersonic Viscous Flow. AIAA Paper No. 79-0130

3 Lindemuth I. and Killeen J. Alternating Direction Implicit Techniques for Two-Dimensional Magretohydro-dynamics Calculations. Journal of Computational Physics, 1973, 13: 181～208

4 Lawrence S L, Tannehill J C and Chaussee D S. An Upwind Algorithm for the Parabolized Navier-Stokes Equations. AIAA Paper No. 86-1117

5 Lawrence S L, Chaussee D C. and Tannehill J C. Application of an Upwind Algorithm to the Three-Dimensional Parabolized Navierstokes Equations. AIAA Paper No. 87-1112

6 Roe P L. Approximate Riemann Solvers Parameter Vectors and Difference Schemes. Journal of Computational Physics. 1983, 43: 357～372

7 Thompson D S and Noack R W. Theortical and Numerical Study of Depatrure Behavior in PNS Solutions. AIAA Paper No. 87-1122

Thompson D S. Efficient Numerical Approaches for Predicting Supersonic Flow with Viscous/Inviscid Interaction. Ph. D. Dissertation, Iowa State University, Ames, Iowa, 1987.

9 McDonald H and Briley W R. Three-Dimensional Supersonic Flow of a Viscous or Inviscid Gas. Journal of Computational Physics, 1975, 19: 150～178

10 Anderson D A, Tannehill J. C and Pletcher R H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. Hemisphere Publishing Corporation, Mcgraw-Hill Book Company, 1984.

11 Beam R M and Warming R F. An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations. AIAA J., 1978, 16: 393～401

12 Lubard S C and Helliwell W S. Calculation of the Flow on a cone at Hight Angle of Attack. R and D Associates Technical Report. RDA-TR-150, Santa, Moniea California.

13 Rubin S G. A Review of Marching Procoedures for Parabolized Navier-Stokes Equations. Proceedings of Symposium on Numerical and Physical Aspects of Aerodynamics Flows, New York Springer-Verlag, 1981

14 Rubin. S G. and Lin, A. Marching with the PNS Equations. Proceed of 22nd Israel Annual Conference on Aviation and Astronaulics, Israel

15 Rubin S G and Lin T C. Numerical Methods for Two-and Three-dime-

nsional Viscous Flow Problems, Application to Hypersonic ieading-Edge calculations. Polytechnic Institute of Brooklyn, PIBAL Report 71-8, Farmingdale, New York, 1971.

16 Vigneron Y C, Rakich J V and Tannehill J C. Calculation of Supersonic Viscous Flow over Delta Wings With Sharp Subsonic Leading Edges. NASA TM-78500, 1978.

17 Lin T C and Rubin S G. A Numerical Method for Supersonic Viscous Flow over a Slender Reentry Vehicle. AIAA Paper No. 79-0205

18 Buggeln R C, Mc Donald H, Kreskvsky J P and Levy R. Computation of Three-Dimensional Viscous Supersonic Flow in Inlets. AIAA Paper No. 80-0194

19 Yanenko N N, Kovenya, V M, Tarnavsky G A and Chermy S G. Economical Methods for Solving the Problems of Gas Dynamics. Proc. Seventh Int. Conf. Num. Methods Fluid Dyn., Lecture Note in Physics, New York, Springer-Verlag, 1980, 141

20 Tannehill J. C., Venkalapathy R. and Rakich, J. V. Numerical Solution of Supersonic Viscous Flow over Blund Delta Wing. AIAA J., 1982, 20: 203~210

21 Thoms P D, Vinokur, M, Bastianon R A and Conti R J. Numerical Soluuion for Three-Dimensional Inviscid Supersonie Flow. AIAA Journal, 1972, 10

22 Ma Yanwen and Fu Dexun. Numerical Simulation of Near Wake Flcw. Proceedings of the International Conference on Fluid Mechanics, Beijing, 1987.

23 张涵信，姚鑫，高树椿等. 钝锥超声速粘性绕流的隐式推进求解方法研究. 空气动力学学报，1990(3).

第十章　二维分离流动的数值模拟

分离流和涡运动是流体力学中的基本物理现象，也是流体力学家们极为感兴趣的问题。过去人们主要通过理论分析和实验来研究这类问题，但遇到很大困难。随着计算技术的发展和巨型机的出现，数值模拟已成为研究这类问题的重要手段，且得到迅速的发展。

本章将利用本书在第一部分中所介绍的计算方法，求解可压缩N-S方程，数值模拟各种二维分离流动问题。这些问题有二维激波与附面层干扰，近尾迹分离流动、前台阶粘性绕流中的分离流和钝体粘性绕流中非对称涡的发展等问题的数值模拟，将通过这些算例较为详细地介绍计算方法、坐标变换、边界条件的处理以及计算结果的分析等。由此可以了解到基础方法的具体应用和采用这些方法数值模拟实际问题的能力。

第一节　基本方程

本章所选用基本出发方程是笛卡尔直角坐标系（t，x，y）内的二维可压缩N-S方程。对于不计外力的完全气体，经无量化后的二维可压缩N-S方程的向量形式为

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x}+\frac{\partial \vec{f}_2}{\partial y}=\vec{F} \qquad (10\text{-}1\text{-}1)$$

这里 $\vec{U}$、$\vec{f}_1$、$\vec{f}_2$ 和 $\vec{F}$ 都是四维向量，其表达式为

$$\vec{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ E\end{bmatrix},\quad \vec{f}_1=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ u(E+p)\end{bmatrix}$$

$$\vec{f}_2=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ v(E+p)\end{bmatrix},\quad \vec{F}=\begin{bmatrix}F_1\\ F_2\\ F_3\\ F_4\end{bmatrix}$$

$$F_1=0$$

$$F_2=\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{11}+\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{12}$$

$$F_3=\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{21}+\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{22}$$

$$F_4=\frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_{11}+v\sigma_{12})+\frac{\partial}{\partial y}(u\sigma_{21}+v\sigma_{22})$$

$$+\frac{C_p}{Rep_r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\kappa\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\kappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)$$

$$E=\rho\left(C_vT+\frac{u^2+v^2}{2}\right),\quad C_v=\frac{1}{\gamma(\gamma-1)Ma_\infty^2}$$

$$p=\rho T/rMa_\infty^2 \tag{10-1-2}$$

其中 σ_{ij} 为粘性应力张量，其表达式为

$$\sigma_{11}=\frac{\mu}{Re}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{21}=\sigma_{12}=\frac{\mu}{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{22}=\frac{\mu}{Re}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

方程式中的所有参数都是无量纲参数，其定义与上一章中(9-1-1)方程组的参数相同。粘性系数 μ，在层流的情况下由萨泽兰特公式（9-1-5）式确定。式（10-1-2）为无量纲形式的状态方程。

第二节　激波与边界层相互干扰的数值模拟

激波边界层干扰的物理现象在很多气体流动中是确定整个流场特性起主导作用的现象。所以长期以来，一直是气体力学研究工作中的热点。在图 10-1 中给出了典型激波边界层相互干扰

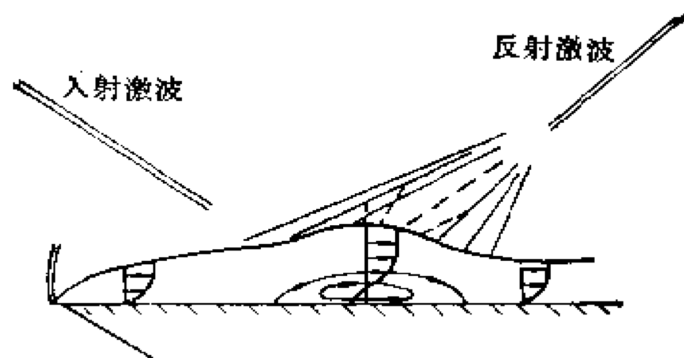


图10-1 激波与边界层相互干扰问题的示意图

问题的示意图。

这是一个很典型的粘性流与无粘流相互干扰问题的例子。在壁面附近，粘性流占主导地位，在其上方，无粘流动占主导地位。当入射激波的强度足够大时（或入射激波的波前与波后的压力比足够大时），由于激波与边界层之间的相互干扰，使得近壁面激波入射点处形成边界层分离，从而形成复杂的波系流场。这类问题若利用边界层方程和外流无粘流方程进行求解，则将遇到很大困难。这是一个利用N－S方程数值模拟激波边界层相互干扰的有代表性的简单物理模型。

麦科马克（MacCormack）于1975年[1]首先利用显式时间分裂方法求解二维N－S方程，数值模拟了激波与边界层干扰问题。为了克服在壁面附近，由于法向空间步长太小，使得稳定性带来的对时间步长的限制太严，尚（Shang）在文献〔3〕中改进了麦科马克提出的算法，在近物面的细网格区内，局部采用了隐式算法，从而使计算工作量大为减少。后来麦科马克在文献〔2〕中，把他的显式方法做了进一步改进，在粗网格区仍采用原方法，而在细网格区将微分方程分裂成两个部分，其一为对流项，另一为扩散项。对于对流项采用特征线法，对于扩散项采用克朗克—尼科尔森（Crank—Nicoison）方法。于1981年麦科马克利用新建立的隐式麦科马克格式计算了同样的激波与边界层相互干扰问题。本文作者在文献〔5、6〕中，利用算子附加修正的方法和近

似因式分解方法计算了这一问题。实际上，前一方法也可看为隐式麦科马克格式的一种简化形式。

一、坐 标 变 换

上面所提出的激波与边界层相互干扰流场中，靠近壁面有一个很薄的粘性层，它与激波的干扰将直接影响流场特性。为了正确模拟其干扰特性，要求数值解满足一定的精度，为此在这一薄层内需有一定的网格点数。为达到此目的，且总的计算网格点要求不能过多（否则将大大增加计算量），则在 y 方向上（壁面的法向）进行坐标变换。所采用的坐标变换与第八章中式（8-1-7）和（8-1-8）中给出的坐标变换类似。设计算区域 y 方向的高度为H，在〔0，H〕中分成三个区域。〔0，σ_0〕为近壁面的粘性区域，在此区域内 y 方向取等距细网格。〔δ_1，H〕为无粘流占主导的区域，在此区域内取等距粗网格。在两个区域之间〔δ_0，δ_1〕的区域内取变网格。

坐标变换：

$$\begin{cases} \tau = t \\ \xi = x \\ \eta = \eta(y) \end{cases} \tag{10-2-1}$$

$$\eta = \begin{cases} A(y-H)+1 & \delta \leqslant y \leqslant H \\ B\ln(1+by)+C & \delta_0 \leqslant y \leqslant \delta_1 \\ Dy & 0 \leqslant y \leqslant \delta_0 \end{cases} \tag{10-2-2}$$

设在计算平面内（即在坐标系（τ，ξ，η）内），（0，$\tilde{\delta}_0$，$\tilde{\delta}_1$，1）对应于物理平面内的（0，δ_0，δ_1，H），则逆变换为

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{A}(\eta-1)+H & \tilde{\delta}_1 \leqslant \eta \leqslant 1 \\ \left[e^{\frac{1}{B}(\eta-C)}-1\right]\dfrac{1}{b} & \tilde{\delta}_0 \leqslant \eta \leqslant \tilde{\delta}_1 \\ \eta/D & 0 \leqslant \eta \leqslant \tilde{\delta}_0 \end{cases} \tag{10-2-3}$$

上式中的 A、B、C、D的表达式与式（8-1-7）中的类似。b

为加密参数。

根据坐标变换有关系式

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \tau},\quad \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial \xi},\quad \frac{\partial}{\partial y}=N\frac{\partial}{\partial \eta}$$

其中

$$N=\eta_y=\begin{cases} A & \tilde{\delta}_1\leqslant\eta\leqslant 1 \\ \dfrac{Bb}{1+by} & \tilde{\delta}_0\leqslant\eta\leqslant\tilde{\delta}_1 \\ D & 0\leqslant\eta\leqslant\tilde{\delta}_0 \end{cases} \tag{10-2-4}$$

经坐标变换后的方程组（10-1-1）有以下形式

$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial\tau}+\frac{\partial\vec{f}_1}{\partial\xi}+N\frac{\partial\vec{f}_2}{\partial\eta}=\vec{F} \tag{10-2-5}$$

式中向量 $\vec{U}$、$\vec{f}_1$、$\vec{f}_2$ 和 $\vec{F}$ 的表达式与式（10-1-1）中的相同，只是 F_i 的表达式为

$$F_1=0$$

$$F_2=\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+N\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\eta}$$

$$F_3=\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi}+N\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\eta}$$

$$F_4=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[u\sigma_{11}+v\sigma_{12}+\frac{C_p}{Re\,P_r}\kappa\frac{\partial T}{\partial\xi}\right]+N\frac{\partial}{\partial\eta}\left[u\sigma_{12}+v\sigma_{22}+N\frac{C_p}{Re\,P_r}\kappa\frac{\partial T}{\partial\eta}\right]$$

粘性应力张量 $\sigma_{i,j}$ 的表达式为

$$\sigma_{11}=\frac{\mu}{Re}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{2}{3}N\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)$$

$$\sigma_{12}=\frac{\mu}{Re}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}+N\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

$$\sigma_{22}=\frac{\mu}{Re}\left(\frac{4}{3}N\frac{\partial v}{\partial\eta}-\frac{2}{3}\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)$$

图 10-2 为网格分布示意图。

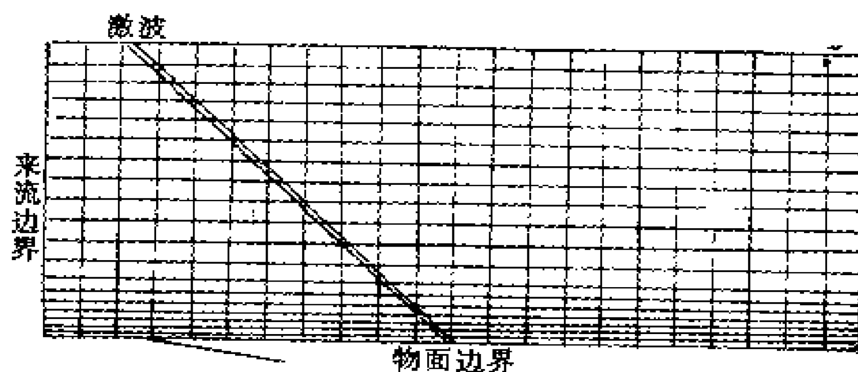


图10-2　物理平面内的网格分布

二、微分方程的差分逼近

本书的作者曾用两种方法计算了二维激波与边界层相互干扰问题，其一为算子附加修正方法，另一为近似因式分解方法。在采用这两种方法求解二维可压缩N-S方程（10-1-5）时，粘性项都采用了在第七章中所介绍的算子附加修正方法。下面将给出这两种方法的差分逼近式。

（一）近似因式分解方法

关于近似因式分解法在第七章中已给出，这里不再重复，仅指出不同点，即为了改进粘性项的差分格式对稳定条件的限制，在显式格式的基础上，ξ 方向和 η 方向都加了附加修正项。对附加修正后的差分格式再采用近似因式分解法。这样，逼近于方程组（10-2-5）的差分方程为

$$\Delta\vec{U}_{i,j}=\Delta t\vec{F}_{i,j}-\frac{\Delta t}{\Delta\xi}\delta_1^{*}(\vec{f}_1)_{i,j}-\frac{\Delta t}{\Delta\eta}N_j\delta_2^{*}(\vec{f}_2)_{i,j}\tag{10-2-6}$$

$$\begin{aligned}&\left(I+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta\xi}\delta_1^{-}\tilde{\mathbf{A}}_1^{+}\cdot\right)\left(I+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta\xi}\delta_1^{+}\tilde{\mathbf{A}}_1^{-}\cdot\right)\\&\cdot\left(I+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta\eta}N_j\delta_2^{-}\tilde{\mathbf{A}}_2^{+}\cdot\right)\left(I+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta\eta}N_j\delta_2^{+}\tilde{\mathbf{A}}_2^{-}\cdot\right)\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}\\&=\Delta\vec{U}_{i,j}^{n}\end{aligned}\tag{10-2-7}$$

$$\bar{U}_{i,j}^{n+1}=U_{i,j}^{n}+\delta_{t}\bar{U}_{i,j}^{n+1} \tag{10-2-8}$$

式中

$$\delta_x^- g_{i,j}=g_{i,j}-g_{i-1,j}$$

$$\delta_x^+ g_{i,j}=g_{i+1,j}g_{i,j}$$

$$\delta_x^0 g_{i,j}=\frac{1}{2}(\delta_x^+ g_{i,j}+\delta_x^- g_{i,j})$$

完全类似，可以写出 η 方向的差分算子 δ_y^+, δ_y^-, δ_y^0 的表达式。差分逼近式中的 $\widetilde{A}^{\pm}$ 有以下形式

$$\widetilde{A}_l^{\pm}=A_l^{\pm}\pm\sigma_l I \tag{10-2-9}$$

$$\sigma_l=\max\left\{0,\ \sqrt{\frac{2\gamma\mu}{\rho p_r Re\Delta t}}-\frac{\Delta x_l}{\Delta t}\right\} \tag{10-2-10}$$

$$l=1,\ 2$$

$$\Delta x=\Delta\xi,\ \Delta x_2=\Delta\eta/N$$

N 为坐标变换中的系数，由式（10-2-4）确定。在式（10-2-9）中 $A_l^{\pm}$ 为矩阵 A_l 分裂后的矩阵，且有

$$A_l^{\pm}=S_l^{-1}\Lambda_l^{\pm}S_l,\ \ A_l=\frac{D(\vec{f}_l)}{D\vec{U}}$$

$\Lambda_l^{\pm}$ 为对应于 $\lambda_k^{\pm}(A_l)$ 所组成的对角矩阵，而 $\lambda_k(A_l)$ 是雅可比矩阵 A_l 的特征值（$l=1$，2），即

$$\lambda_{1,2}(A_l)=u_l$$

$$\lambda_{3,4}(A_l)=u_l\mp c$$

$$u_1=u,\ \ u_2=v$$

λ_k^+ 为正特征值，λ_k^- 为负特征值。

若对矩阵 A_l 采用第四章中第二节的第（2）种分裂，则式（10-2-9）可改写为

$$\begin{cases}\widetilde{A}_l^{\pm}=S_l^{-1}\widetilde{\Lambda}_l^{\pm}S_l\\ \widetilde{\Lambda}_l^{\pm}=\Lambda_l^{\pm}\pm\sigma_l I\end{cases} \tag{10-2-11}$$

上面 I 为单位矩阵，$\widetilde{\Lambda}^{\pm}$ 仍为对角矩阵。σ_l 的引入是为了改善差分方程中粘性项对稳定性的影响。

差分方程（10-2-7）的求解是由以下求解序列组成

$$\left[I+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta \xi}(\tilde{A}_1^+)_{i,j}^n\right]\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+\left(\frac{1}{4}\right)}=\Delta\vec{U}_{i,j}^n$$

$$+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta \xi}(\tilde{A}_1^+)_{i-1,j}^n\delta_t\vec{U}_{i-1,j}^{n+\left(\frac{1}{4}\right)}=\vec{G}_1 \qquad (10-2-12)$$

$$\left[I-\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta \xi}(\tilde{A}_1^-)_{i,j}^n\right]\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}=\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$-\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta \xi}(\tilde{A}_1^-)_{i+1,j}^n\delta_t\vec{U}_{i+1,j}^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}=\vec{G}_2 \qquad (10-2-13)$$

$$\left[I-\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta \eta}(N\tilde{A}_2^-)_{i,j}^n\right]\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+\left(\frac{3}{4}\right)}=\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$-\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta \eta}(N\tilde{A}_2^-)_{i,j+1}^n\delta_t\vec{U}_{i,j+1}^{n+\left(\frac{3}{4}\right)}=\vec{G}_3 \qquad (10-2-14)$$

$$\left[I+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta \eta}(N\tilde{A}_2^+)_{i,j}^n\right]\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+1}=\delta_t U_{i,j}^{n+\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta \eta}(N\tilde{A}_2^+)_{i,j-1}^n\delta_t\vec{U}_{i,j-1}^{n+1}=\vec{G}_4 \qquad (10-2-15)$$

这些差分方程是很容易求解的，例如对于式（10-2-12），可按 i 的增长方向进行求解，则有

$$\delta_t\vec{U}_{i,j}^{n+\left(\frac{1}{4}\right)}=(S_1^{-1})_{i,j}\left[I+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta \xi}\tilde{\Lambda}_1^+\right]_{i,j}^{-1}(S_1)_{i,j}\vec{G}_1$$

(10-2-16)

在式（10-2-16）中，矩阵 S_1 和 S_1^{-1} 的元素是已知函数（参见第四章中的附录），方括号内是一对角矩阵，故很容易求逆，而 $\vec{G}_1$ 为已知向量（因为在 n 层上的流动参数为已知，且按 i 增长方向求解，故只要 $i=1$ 处的边界值 $\delta\vec{U}_{1,j}^{n+1/4}$ 给定，则 $\vec{G}_1$ 为已知向量）。对差分式（10-2-16）的求解可写为以下求解序列

$$\vec{G}^{*}=S_{1}\vec{G}_{1} \tag{10-2-17}$$

$$\vec{G}^{**}=\left[I+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta \xi}\tilde{\Lambda}_{1}^{+}\right]^{-1}\vec{G}^{*} \tag{10-2-18}$$

$$\delta_{t}\vec{U}_{i,\ j}^{n+\frac{1}{2}}=S_{1}^{-1}\vec{G}^{**} \tag{10-2-19}$$

按同样的方法可以求出

$$\delta_{t}\vec{U}_{i,\ j}^{n+\frac{k}{4}}\quad k=2,\ 3,\ 4$$

（二）算子附加修正方法

在利用近似因式分解方法时，仅对粘性项采用了算子附加修正的方法，以改善对稳定条件的限制。也可以利用这种方法来改善某些显式差分格式的稳定性。现以模型方程为例，讨论采用该方法改善显式麦科马克格式的稳定性问题。设所讨论的模型方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} \tag{10-2-20}$$

当 $c>0$ 和 $\nu=0$ 时，取以下差分逼近式：

$$\delta_{t}u_{i}^{n+1}=-c\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_{x}^{-}u_{i}^{n}-\lambda\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_{x}^{+}(\delta_{t}u_{i}^{n+1}) \tag{10-2-21}$$

式（10-2-21）中右端的最后一项是对普通单边差分格的修正项。经分析可知，如果取

$$\lambda\geqslant\frac{1}{2}\left(|c|-\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

则（10-2-21）格式是稳定的。当 $c<0$ 且 $\nu=0$ 时，可取以下差分逼近式

$$\delta_{t}u_{i}^{n+1}=-c\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_{x}^{+}u_{i}^{n}+\lambda\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_{x}^{-}(\delta_{t}u_{i}^{n+1}) \tag{10-2-22}$$

对于扩散方程（$c=0$ 时），可采用的差分逼近式为

$$\delta_t u_j^{\overline{n+1}} = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta_x^2 u_j^n + \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^+(\delta_t u^{\overline{n+1}}) \qquad (10\text{-}2\text{-}23)$$

$$\delta_t u_j^{n+1} = \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta_x^2 u_j^n - \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^-(\delta_t u_j^{n+1}) \qquad (10\text{-}2\text{-}24)$$

经稳定性分析可知，这两个差分逼近式如果满足以下不等式，则是稳定的

$$\lambda \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2\nu}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

综合以上的讨论，可得到经过修正了的麦科马克格式，或称隐式麦科马克格式。其形式如下。

$$P:\begin{cases} \Delta u_j^n = -\dfrac{\Delta t}{\Delta x}c\,\delta_x^+ u_j^n + \nu\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta_x^2 u_j^n \\ \left(1 - \lambda\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^+\ \cdot\right)\delta_t u_j^{\overline{n+1}} = \Delta u_j^n \\ u_j^{\overline{n+1}} = u_j^n + \delta_t u_j^{\overline{n+1}} \end{cases} \qquad (10\text{-}2\text{-}25)$$

（10-2-25）对应于麦科马克格式的预估步，其校正步有以下形式

$$C:\begin{cases} \Delta u_j^{\overline{n+1}} = -\dfrac{\Delta t}{\Delta x}c\,\delta_x^- u_j^{\overline{n+1}} + \nu\dfrac{\Delta t}{\Delta x^2}\delta_x^2 u_j^{\overline{n+1}} \\ \left(1 + \lambda\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\delta_x^-\ \cdot\right)\delta_t u_j^{n+1} = \Delta u_j^{\overline{n+1}} \\ u_j^{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_j^n + u_j^{\overline{n+1}} + \delta_t u_j^{n+1}\right) \end{cases} \qquad (10\text{-}2\text{-}26)$$

若取λ满足以下不等式

$$\lambda \geqslant \frac{1}{2}\max\left\{|c| + \frac{2\nu}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{\Delta t},\ 0\right\}$$

则隐式麦科马克格式对于任意步长比都是稳定的，且具有二阶逼近精度[4]。

参照对标量方程（10-2-20）的差分逼近式（10-2-25）和（10-2-26），可构造逼近于微分方程组（10-2-5）的差分方程为

$$P:\begin{cases}\Delta \vec{U}^{n}_{i,j}=\Delta t\vec{F}^{n}_{i,j}-\dfrac{\Delta t}{\Delta\xi}\delta^{+}_{\xi}(\vec{f}_1)^{n}_{i,j}-\dfrac{\Delta t}{\Delta\eta}N_j\delta^{+}_{\eta}(\vec{f}_2)^{n}_{i,j}\\ \left(I-\dfrac{\Delta t}{\Delta\xi}\delta^{+}_{\xi}|A_1|\cdot\right)\left(I-\dfrac{\Delta t}{\Delta\eta}N_j\delta^{+}_{\eta}|A_2|\cdot\right)\delta_t\vec{U}^{\overline{n+1}}_{i,j}=\Delta\vec{U}^{n}_{i,j}\\ \vec{U}^{\overline{n+1}}_{i,j}=\vec{U}^{n}_{i,j}+\delta_t\vec{U}^{\overline{n+1}}_{i,j}\end{cases}$$

(10-2-27)

差分方程（10-2-27）为麦科马克格式的预估步，校正步的差分方程为

$$C:\begin{cases}\Delta \vec{U}^{\overline{n+1}}_{i,j}=\Delta t\vec{F}^{\overline{n+1}}_{i,j}-\dfrac{\Delta t}{\Delta\xi}\delta^{-}_{\xi}(\vec{f}_1)^{\overline{n+1}}_{i,j}-\dfrac{\Delta t}{\Delta\eta}N_j\delta^{-}_{\eta}(\vec{f}_2)^{\overline{n+1}}_{i,j}\\ \left(I+\dfrac{\Delta t}{\Delta\xi}\delta^{-}_{\xi}|A_1|\cdot\right)\left(I+\dfrac{\Delta t}{\Delta\eta}N_j\delta^{-}_{\eta}|A_2|\cdot\right)\delta_t\vec{U}^{n+1}_{i,j}\\ \qquad=\Delta\vec{U}^{\overline{n+1}}_{i,j}\\ \vec{U}^{n+1}_{i,j}=\dfrac{1}{2}(\vec{U}^{n}_{i,j}+\vec{U}^{\overline{n+1}}_{i,j}+\delta_t\vec{U}^{n+1}_{i,j})\end{cases}$$

(10-2-28)

这里

$$|A_1|=S_1^{-1}D_1S_1,\quad |A_2|=S_2^{-1}D_2S_2$$

对角矩阵 D_l 为

$$D_l=\begin{bmatrix}\tilde{\lambda}_1(A_l)&0&0&0\\0&\tilde{\lambda}_2(A_l)&0&0\\0&0&\tilde{\lambda}_3(A_l)&0\\0&0&0&\tilde{\lambda}_4(A_l)\end{bmatrix}$$

$$l=1,\ 2$$

$$\tilde{\lambda}_{1,2}(A_1)=\max\left\{|u|+\frac{2\nu}{\rho\Delta\xi}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta\xi}{\Delta t}\right\}$$

$$\tilde{\lambda}_{3,4}(A_1)=\max\left\{|u\pm c|+\frac{2\nu}{\rho\Delta\xi}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta\xi}{\Delta t}\right\}$$

$$\tilde{\lambda}_{1,2}(A_2)=\max\left\{|v|+\frac{2\nu N}{\rho\Delta\eta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta\eta}{N\Delta t}\right\}$$

$$\tilde{\lambda}_{3,4}(A_2)=\max\left\{|v \pm c|+\frac{2\nu N}{\rho\Delta\xi}-\frac{1}{2}\frac{\Delta\eta}{N\Delta t}\right\}$$

$$\nu=\max\left\{\frac{4}{3}\frac{\mu}{R_l},\ \frac{\gamma\kappa}{p_rR_l}\right\}$$

对于差分方程（10-2-27）和（10-2-28）可采用类似于上面所介绍的近似因式分解方法，化成求解序列进行求解。在文献〔7〕中指出，利用隐式麦科马克格式时，边界条件不易处理，这将影响求解效率。此外，采用这种两步法求解定常问题，当数值解趋于定常解时，预估步和校正步的解有交替上下摆动现象产生，且定常解将依赖于时间步长。

在文献〔5〕中，采用了更为简单的附加修正形式求解可压缩二维N－S方程(10-2-5)，给出了激波边界层相互干扰的流场计算结果。其修正形式为

$$\tilde{\lambda}(A_1)=\tilde{\lambda}_k(A_1)=\left\{|u|+c+\frac{2\nu}{\rho\Delta\xi}-\frac{1}{2}\frac{\Delta\xi}{\Delta t}\right\}$$

$$\tilde{\lambda}(A_2)=\tilde{\lambda}_k(A_2)=\left\{|v|+c+\frac{2\nu N}{\rho\Delta\eta}-\frac{1}{2}\frac{\Delta\eta}{\Delta t}\right\}$$

$$\nu=\gamma\mu/P_rRe,\quad \kappa=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

这种情况下，矩阵$|A_l|$大为简化

$$|A_l|=\tilde{\lambda}(A_l)I,\quad l=1,\ 2$$

采用这种方法，在差分方程（10-2-27）和（10-2-28）的求解过程中将消除矩阵运算，使计算大为简化。

三、边界条件处理

这里将只介绍对于近似因式分解方法的边界条件处理。

（一）显式部分（参见图 10-2 ）

来流边界：即计算区域的入口边界处，取来流参数值。对于无量纲参数有以下形式

$$u(1,\ j)=1,\quad v(1,\ j)=0$$

$$\rho(1,\ j)=1,\quad T(1,\ j)=1$$

这里 i 、 j 对应为 x， y 方向的网格点位置， $i=1$ 为计算区域的入口边界.

上边界：即计算区域的上方边界， $j=JN$ 处。

在入射激波的前方，取来流值，即

$$u(i,JN)=1, \quad v(i,JN)=0$$

$$\rho(i,JN)=1, \quad T(i,JN)=1$$

在入射激波的后方，由激波关系式（参见第九章中附录二式(A-16))给出，即

$$f(i,JN)=f_s, \quad f=\rho, \ u, \ v, \ T$$

下游边界：计算区域的出口边界， $i=IN$ 处。利用二阶精度的单边插值公式给出如下：

$$g(IN,j)=\frac{1}{3}(4g_{IN-1,j}-g_{IN-2,j})$$

$$g=\rho, \ u, \ v, \ T$$

下边界：计算区域的下方边界， $j=1$ 处。在平板前缘之前，利用对称条件

$$v(i,1)=0, \quad g(i,1)=\frac{1}{3}(4g_{i,2}-g_{i,3})$$

$$g=\rho, \ u, \ T$$

在平板上，利用无滑流条件和绝热条件

$$u(i,1)=v(i,1)=0$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_0=0$$

（二）隐式部分

从差分方程组（10-2-12)～(10-2-15）可以看出，在求解这些方程时，必须给出 $\delta_t\vec{U}$ 的边界值，这就是隐式边界条件。

来流边界：因显式边界条件中取来流值，故随时间不改变。隐式边界条件可取为（ $I=1$ 处）

$$\delta_t\vec{U}_{1,j}^{n+\left(\frac{1}{4}\right)}=0$$

上边界：因显式边界条件中取为定常边界值，即随时间不改变。故隐式边界条件在 $j=JN$ 处有

$$\delta_t\vec{U}_{i,\,JN}^{n+\left(\frac{3}{4}\right)}=0$$

下游边界：与显式边界条件类似，采用单边外插。这里采用一阶精度的简单外插（因所需求的是定常解，这里的边界条件不影响定常解的精度），即隐式边界条件在 $i=IN$ 处为

$$(\widetilde{\mathbf{A}}_1^-)_{IN,j}^n\delta_t\vec{U}_{IN,\,j}^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}=(\widetilde{\mathbf{A}}_1^-)_{IN-1,j}^n\delta_t\vec{U}_{IN-1,\,j}^{n+\left(\frac{1}{2}\right)}$$

下边界：利用（10-2-15）差分方程及对称条件（对于平板前缘之前）或无滑流条件（在平板上），以及绝热条件进行迭代求解。例如在平板上，$j=1$ 处有

$$\left[I+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta\eta}(N\widetilde{\mathbf{A}}_2^+)_{i,2}^n\right]\delta_t\vec{U}_{i,2}^{n+1,q+1}=\delta_t\vec{U}_{i,\,2}^{n+\frac{3}{4}}$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta\eta}(N\widetilde{\mathbf{A}}_2^+)_{i,1}^n\delta_t\vec{U}_{i,1}^{n+1,q}$$

上式中的 q 为迭代次数。设以某种方法已定出了 $\delta_t\vec{U}_{i,1}^{n+1,q}$（最初可取 $\delta_t U_{i,1}^{n+1,1}=0$），则由上式可求出 $\delta_t\vec{U}_{i,2}^{n+1,q+1}$，从而可得

$$\vec{U}_{i,2}^{n+1,q+1}=\vec{U}_{i,2}^n+\delta_t\vec{U}_{i,2}^{n+1,q+1}$$

再利用平板上的无滑流条件

$$u_{i,1}^{n+1,q+1}=v_{i,1}^{n+1,q+1}=0$$

并假设

$$\delta_y^+T_{i,1}^{n+1,q+1}=\delta_y^+P_{i,1}^{n+1,q+1}=0$$

由此可求得

$$T_{i,1}^{n+1,q+1}=T_{i,2}^{n+1,q+1},\quad P_{i,1}^{n+1,q+1}=P_{i,2}^{n+1,q+1}$$

从而可得到物面上的 $\vec{U}_{i,1}^{n+1,q+1}$ 值进而求出在物面上的 $\delta_t\vec{U}_{i,1}^{n+1,q+1}$ 值。通过这种迭代方法，可确定下边界 $j=1$ 处的隐式边界条件。

四、计 算 结 果

所计算的物理问题为激波边界层干扰所产生的层流分离流动(参见图10-1)。来流马赫数为$Ma_\infty=2.0$，雷诺数$Re=2.96\times10^5$。入射激波的入射角为$\theta=32.6°$。计算中所取的网格点数为$IN\times JN=35\times35$，其中IN和JN对应为x和y方向上的网格点数。对于无粘流动，反射激波波后的压力与来流压力之比为1.4。为了克服在激波附近数值解中的跳动现象，在每一时间层上对各物理量都进行了滤波（或称后平滑，参见第六章)。在图10-3中给出了沿物面压力分布的计算结果。

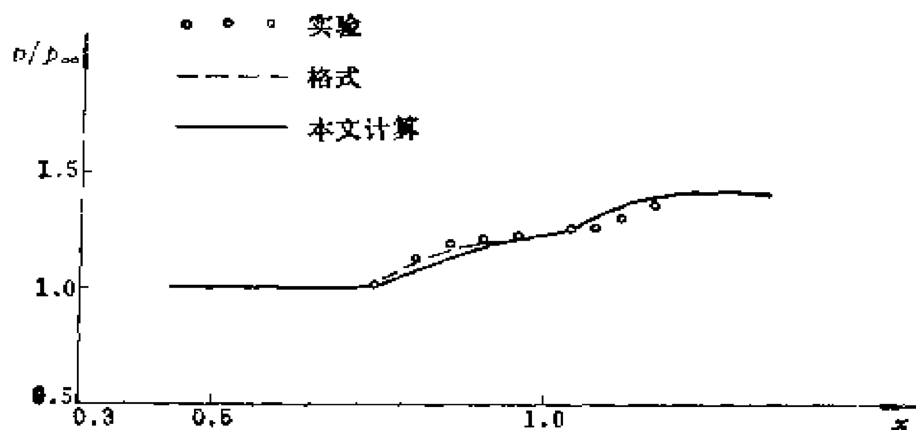


图10-3　物面压力分布

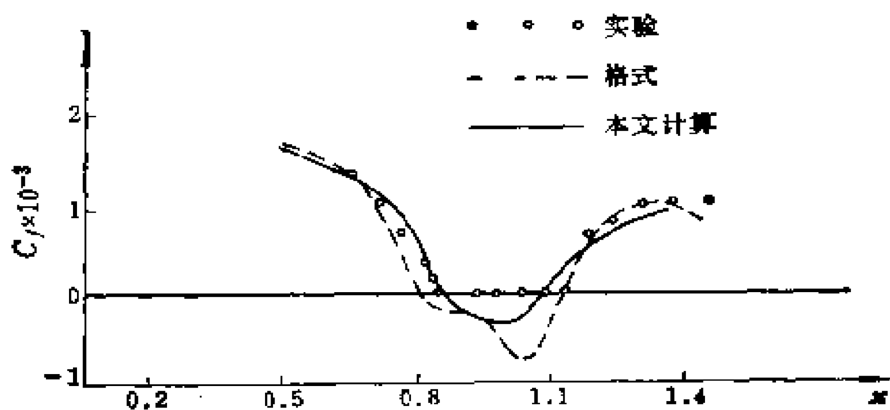


图10-4　物面摩阻分布

图 10-4 给出了沿物面摩阻分布的计算结果。为了比较，在图中还给出了麦科马克的数值计算结果和实验值。可以看出，计算结果与实验值是附合的。负的摩阻系数表明了分离流动的存在。

第三节　二维分离流动的数值模拟

分离流动是流体运动中的基本物理现象。从上节中可以看到，激波与边界层之间的相互干扰将产生边界层的分离。除此之外，绕流中物体外形的拐角处，如压缩拐角、扩散拐角等，将引起靠近物面边界层内的粘性流动与外面无粘流之间的干扰，从而形成边界层分离。这些现象将直接影响流体运动的流场特性。在各飞行器的绕流中，这种分离流动将影响飞行器的气动性能。所以对于二维分离流动的研究不但在学术上是很有意义的问题，也是实际应用中需要解决的问题。

本节将描述数值模拟二维分离流的计算方法，并将讨论两个典型的二维分离流的算例，这就是近尾迹分离流动和向前台阶分离流动。

一、微分方程与坐标变换

计算中所采用的基本方程为（10-1-1）。为了在数值计算中能正确描述拐角对流场特性的影响，在两个坐标方向上都进行了坐标变换。经坐标变换后在物理平面内的网格分布如图 10-5 所示。

计算中所选用的坐标变换与激波边界层相互干扰问题（参见上一节）中的坐标变换类似。在拐角处，沿 x 方向向左先是细的均匀网格，然后网格逐渐放大，最后是均匀的粗网格。在 y 方向的网格分布完全类似。经坐标变换后的微分方程为

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+M\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial \xi}+N\frac{\partial \vec{f}_2}{\partial \eta}=\vec{F} \qquad (10\text{-}3\text{-}1)$$

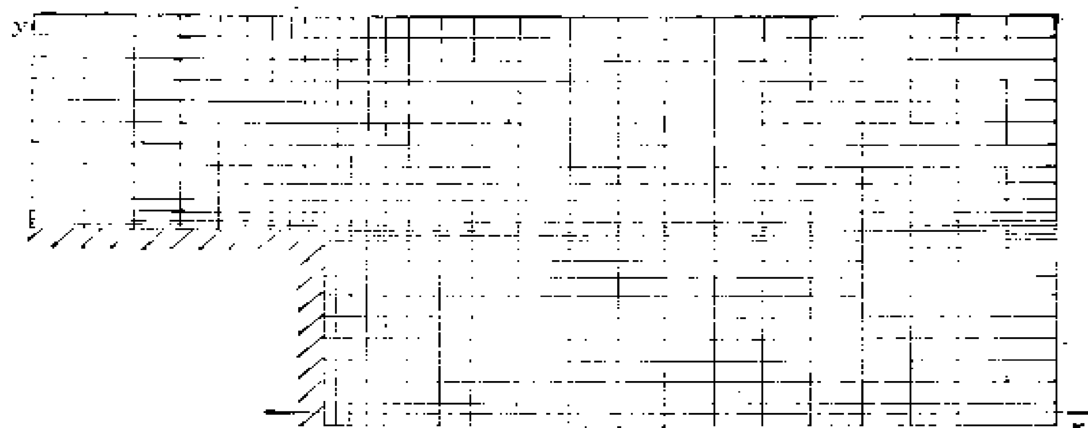


图10-5　网格分布示意图

式中向量 $\vec{U}$、$\vec{f}_1$、$\vec{f}_2$ 和 $\vec{F}$ 的表达式与式（10-1-1）中的相同，只是F_i 的表达式为

$$F_1 = 0$$

$$F_2 = M\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi} + N\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\eta}$$

$$F_3 = M\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi} + N\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\eta}$$

$$F_4 = M\frac{\partial}{\partial\xi}\left[u\sigma_{11} + v\sigma_{12} + \frac{c_p}{ReP_r}\kappa M\frac{\partial T}{\partial\xi}\right] + N\frac{\partial}{\partial\eta}\left[u\sigma_{12} + v\sigma_{22} + N\frac{c_p}{ReP_r}\kappa\frac{\partial T}{\partial\eta}\right]$$

粘性应力张量 $\sigma_{i,j}$ 的表达式为

$$\sigma_{11} = \frac{\mu}{Re}\left(\frac{4}{3}M\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{2}{3}N\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\mu}{Re}\left(M\frac{\partial v}{\partial\xi} + N\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)$$

$$\sigma_{22} = \frac{\mu}{Re}\left(\frac{4}{3}N\frac{\partial v}{\partial\eta} - \frac{2}{3}M\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)$$

式中的M和N为坐标变换系数。N的表达式与式（10-2-4）中的相同。而M的表达式为

$$
M=\xi_x=\begin{cases} A_1 & \tilde{x}_1\leqslant\xi\leqslant\tilde{x}_N \\ \dfrac{B_1 b_1}{1+b_1 x} & \tilde{x}_0\leqslant\xi\leqslant\tilde{x}_1 \\ D_1 & \tilde{x}_b\leqslant\xi\leqslant\tilde{x}_0 \end{cases} \tag{10-3-2}
$$

在计算平面内（$\tilde{x}_b$，$\tilde{x}_0$，$\tilde{x}_1$，$\tilde{x}_N$）对应于物理平面内的（x_b，x_0，x_1，x_N）。x_b 为拐角点在 x 方向上的位置。在$[x_b, x_0]$内为均匀细网格，在$[x_1, x_N]$内为均匀粗网格，在$[x_0, x_1]$内为变网格。方程式（10-3-2）中的 b_1 为 x 方向的加密参数。A_1，B_1，D_1 的表达式与式（8-1-8）中的 A，B，D的表达式类似。

二、微分方程的差分逼近

方程（10-3-1）的差分逼近式与差分方程组（10-2-6）、（10-2-7）和（10-2-8）形式上完全相同，不同的是在方程中出现$\Delta\xi$的地方应以$\Delta\xi/M$代之，且矩阵$\widetilde{A}^{\pm}_i$的具体表达形式有所不同。近似因式分解形式的差分逼近式可写为如下的求解序列

$$
\left[I+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta\xi}(M\widetilde{\mathbf{A}}_1^{+})_{i,j}\right]\delta_t\vec{U}^{\,n+\frac{1}{4}}_{i,j}=\vec{G}_1 \tag{10-3-3}
$$

$$
\left[I-\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta\xi}(M\widetilde{\mathbf{A}}_1^{-})_{i,j}\right]\delta_t\vec{U}^{\,n+\frac{1}{2}}_{i,j}=\vec{G}_2 \tag{10-3-4}
$$

$$
\left[I-\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta\eta}(N\widetilde{\mathbf{A}}_2^{-})_{i,j}\right]\delta_t\vec{U}^{\,n+\frac{3}{4}}_{i,j}=\vec{G}_3 \tag{10-3-5}
$$

$$
\left[I+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta\eta}(N\widetilde{\mathbf{A}}_2^{+})_{i,j}\right]\delta_t\vec{U}^{\,n+1}_{i,j}=\vec{G}_4 \tag{10-3-6}
$$

以上差分方程中的矩阵分裂，在计算时利用了第四章第二节中给出的第（3）种分裂。矩阵$\widetilde{A}^{\pm}$的具体表达式为

$$
\widetilde{\mathbf{A}}_i^{\pm}=\mathbf{S}_i^{-1}\widetilde{\mathbf{\Lambda}}_i^{\pm}\mathbf{S}_i \tag{10-3-7}
$$

这里$\tilde{A}_l^{\pm}$（$l=1$，2）为由特征值$\tilde{\lambda}_k^{\pm}(A_l)$所组成的对角矩阵。$\tilde{\lambda}_k^{\pm}(A_l)$的表达式为

$$\tilde{\lambda}_{1,2,3}^{+}(A_l)=\tilde{u}_l^{+},\quad \tilde{\lambda}_4^{+}(A_l)=\tilde{u}_l^{+}+c$$

$$\tilde{\lambda}_{1,2,4}^{-}(A_l)=\tilde{u}_l^{-},\quad \tilde{\lambda}_3^{-}(A_l)=\tilde{u}_l^{-}-c$$

$$\tilde{u}_l^{\pm}=\frac{u_l\pm|u_l|}{2}\pm\sigma_l,\quad l=1,\ 2$$

$$\tilde{u}_1=u,\quad \tilde{u}_2=v$$

$$\sigma_l=\max\left\{c,\ \sqrt{\frac{2\gamma\mu}{\rho P_r Re\Delta t}}\frac{\Delta x_l}{\Delta t}\right\}$$

$$\Delta x_1=\Delta\xi/M,\quad \Delta x_2=\Delta\eta/N$$

式（10-3-7）中的S_l为$\vec{f}_l$对应的雅可比矩阵$A_l=D(\vec{f}_l)/D(\vec{U})$的左特征向量所组成的矩阵，其具体表达式可参见第四章的附录。

采用上面所选取的特殊矩阵分裂形式，差分方程组(10-3-3)～(10-3-6）的解可以显式地表达出来。

定义

$$\alpha_1=\frac{\beta}{2}\ \frac{\Delta t}{\Delta\xi}M,\quad \alpha_2=\frac{\beta}{2}\ \frac{\Delta t}{\Delta\eta}N$$

$$\beta_{l,k}=\sum_{m=1}^{4}(S_l)_{k,m}X_m$$

$$l=1,\ 2,\ 3,\ 4,\quad k=3,\ 4$$

这里X_m为向量$\vec{X}$的分量。当$l=1$，$k=4$时，$\vec{X}=\vec{G}_1$；当$l=1$，$k=3$时，$\vec{X}=\vec{G}_2$；当$l=2$，$k=3$时，$\vec{X}=\vec{G}_3$；当$l=2$，$k=4$时，$\vec{X}=\vec{G}_4$。而向量$\vec{G}_1$，$\vec{G}_2$，$\vec{G}_3$和$\vec{G}_4$的表达式与差分方程组(10-2-12)～(10-2-15)中的相同，不同的只是在方程中出现$\Delta\xi$的地方应以$\Delta\xi/M$代之。在以上定义下，差分方程组（10-3-3)～(10-3-6）可写为显式求解形式

$$\delta_t \vec{U}^{n+\frac{1}{4}} = \frac{1}{1+\alpha_1 \tilde{u}^+} \left\{ \vec{G}_1 - \frac{\alpha_1 c}{1+\alpha_1(\tilde{u}^+ + c)} \beta_{1,4} \cdot \begin{bmatrix} (S_1^{-1})_{1,4} \\ (S_1^{-1})_{2,4} \\ (S_1^{-1})_{3,4} \\ (S_1^{-1})_{4,4} \end{bmatrix} \right\} \tag{10-3-8}$$

$$\delta_t \vec{U}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\alpha_1 \tilde{u}^-} \left\{ \vec{G}_2 - \frac{\alpha_1 c}{1-\alpha_1(\tilde{u}^- - c)} \beta_{1,3} \cdot \begin{bmatrix} (S_1^{-1})_{1,3} \\ (S_1^{-1})_{2,3} \\ (S_1^{-1})_{3,3} \\ (S_1^{-1})_{4,3} \end{bmatrix} \right\} \tag{10-3-9}$$

$$\delta_t \vec{U}^{n+\frac{3}{4}} = \frac{1}{1-\alpha_2 \tilde{v}^-} \left\{ \vec{G}_3 - \frac{\alpha_2 c}{1-\alpha_2(\tilde{v}^- - c)} \beta_{2,3} \cdot \begin{bmatrix} (S_2^{-1})_{1,3} \\ (S_2^{-1})_{2,3} \\ S(_2^{-1})_{3,3} \\ (S_2^{-1})_{4,3} \end{bmatrix} \right\} \tag{10-3-10}$$

$$\delta_t \vec{U}^{n+1} = \frac{1}{1+\alpha_2 \tilde{v}^+} \left\{ \vec{G}_4 - \frac{\alpha_2 c}{1+\alpha_2(\tilde{v}^+ + c)} \beta_{2,4} \begin{bmatrix} (S_2^{-1})_{1,4} \\ (S_2^{-1})_{2,4} \\ (S_2^{-1})_{3,4} \\ (S_2^{-1})_{4,4} \end{bmatrix} \right\} \tag{10-3-11}$$

以上差分方程组中的 $(S_l^{-1})_{k,m}$ 和 $(S_l)_{k,m}$（$l=1$，2；$k=1$，2，3，4；$m=1$，2，3，4）分别为矩阵 S_l^{-1} 和 S_l 的元素，其表达式可参见第四章的附录。

三、近尾迹流动的数值模拟

近尾迹的分离流动是二维分离流的一个典型例子。它存在于各种飞行器绕流的近底部流场中。其流动特性对飞行器的底部阻力，底部喷管的流动特性，尾翼气动性能以及飞行器的再入物理现象等都有很大影响。

近年来很多作者都曾计算了近底部的分离流动[8,9]。本书作者也采用不同的方法，数值求解可压缩N－S方程给出了同一问题的计算结果[10,11]。在文献〔10〕中采用差分方程组（10-3-8）～（10-3-11）求解二维可压缩N－S方程（10-3-1），给出了底部分离流的计算结果。这里将简述其计算结果。

（一）边界条件处理

1．显式部分

来流边界：计算区域的入口边界（参见图10-2）。

在近物面的附面层区域内，取绝热壁条件下的平板附面层方程解[8]，上部分取均匀来流。

物面条件：处理方法与激波附面层干扰问题中所采用的方法相同。

下游边界：设下游边界位于足够远处，在此边界上采用二阶精度外插（参见本章第一节中的处理）。

下边界：取对称轴位于半网格点上，在 $j=1$，2 处利用流动对称条件。

上边界：在物面法向所对应的计算区域的上方边界上，边界条件取来流参数，其余部分采用简单波的处理方法，简述如下。设 μ_M 为某一点 m 处的马赫角，则有

$$\mu_m=\arcsin(1/Ma) \qquad (10\text{-}3\text{-}12)$$

式（10-3-12）中的 Ma 为某点上的局部马赫数。

定义

$$\omega = \mathrm{tg}(\mu_m + \theta)$$

$$\omega' = \mathrm{tg}[90^\circ - (\mu_m + \theta)]$$

$$\theta = \mathrm{arctg}(v/u)$$

假设在上边界某一网格点（i，JN）处的流动参数值，等于同一马赫线与前一排网格线相交的交点d上的参数，参见图 10-6。这里还假设在一个网格内马赫波为直线。

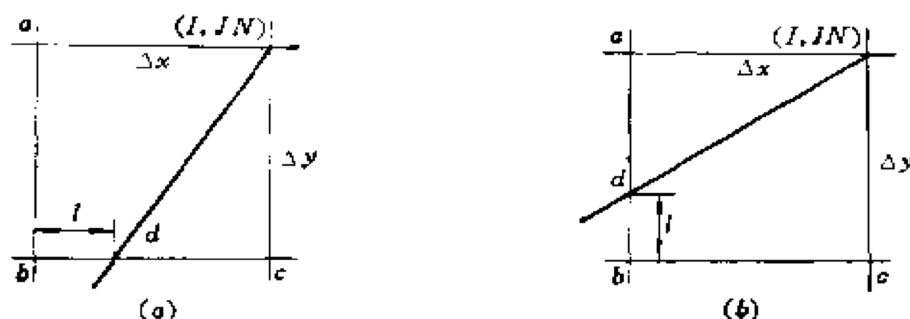


图10-6　上边界条件示意图

（1）当$\omega_b > \Delta y/\Delta x$时（$\omega_b$表示$b$点处的$\omega$值，参见图10-6中的（$a$）图），上边界（$i$，$JN$）处的流动参数由$b$和$c$两点处的流动参数插值给出，即

$$\vec{U}_{i,JN} = \vec{U}_{i-1,JN} + \frac{l}{\Delta x}[\vec{U}_{i,JN-1} - \vec{U}_{i-1,JN-1}]$$

$$l = \frac{\dfrac{\Delta x}{\Delta y} - \omega_b'}{\dfrac{\omega_c' - \omega_b'}{\Delta x} + \dfrac{1}{\Delta y}}$$

（2）当$\omega_b \leqslant \Delta y/\Delta x$时，上边界（$i$，$JN$）网格点上的流动参数由$a$和$b$两点（参见图 10-6 中的（$b$）图）处的流动参数插值给出，即

$$\vec{U}_{i,JN} = \vec{U}_{i-1,JN-1} + \frac{l}{\Delta y}[\vec{U}_{i-1,JN} - \vec{U}_{i-1,JN-1}]$$

$$l = \frac{\Delta y/\Delta x - \omega_b}{\dfrac{\omega_a - \omega_b}{\Delta y} + \dfrac{1}{\Delta x}}$$

2. 隐式部分

来流边界，物面边界和下游边界上的边界条件处理方法与激波附面层相互干扰问题中的处理方法相同。在下边界 $j=1$， 2 处利用流动的对称条件。上面边界处，在物面法向对应的前半部分与来流边界上的处理方法相同；在上面边界的后半部分，采用简单外插，即

$$\delta_t \vec{U}_{i,JN} = \delta_t \vec{U}_{i,JN-1}$$

（二）计算结果

计算中取网格点数为 $IN \times JN = 51 \times 51$。底物面上取了21个点，侧物面上取了15个网格点，且取侧物面的长度为底部高度（底部半径）的1.5倍。实际计算中计算了多种情况，部分计算中所选的来流参数值在表10-1中给出。在图10-7中给出了表中第一

表　10-1

组别	1	2	3	4
Ma_∞	3	3	3	5
Re	550	780	10^3	10^4

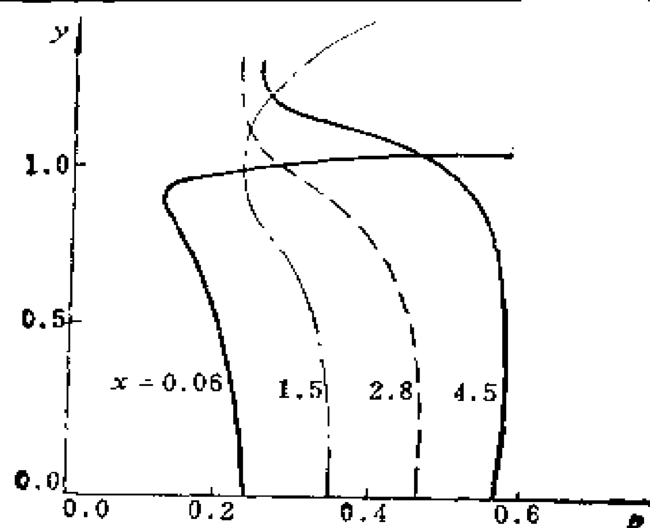


图10-7　压力值随 y 的变化

（$Re=550$，$Ma_\infty=3$）

组情况下，$x=0.06$，1.5，2.8，4.5 处的压力值随 y 的变化曲线。从图中可以看出，拐点右上方流动的膨胀和左下方流动的压缩，清楚描述了拐点对流场特性的影响。图10-8给出了第一组来流条件的物面压力分布。

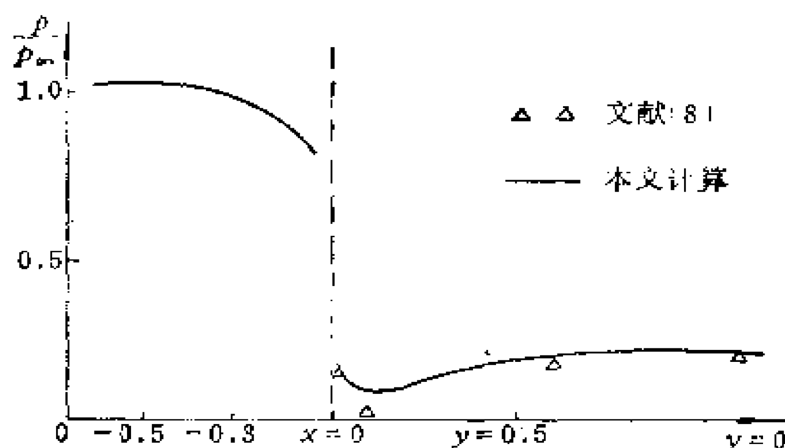


图10-8　物面压力分布

（$Re=550$，$Ma_\infty=3$）

从图中可以看出，压力的最小值不在拐点处，而是在其下方。为了比较在图中还给出了文献〔8〕中的计算结果，本结果略高于它。图10-9给出了第三组来流参数的速度向量场。从这里可明显地看到回流区的存在。

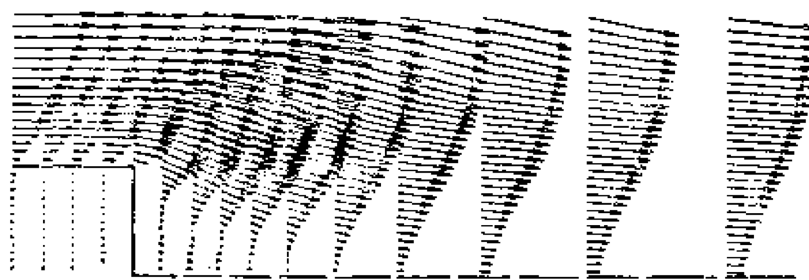


图10-9　速度向量分布

（$Re=10^3$，$Ma_\infty=3$）

在利用同一方法计算高马赫数底部分离流时，在拐点附近数值解存在有振荡现象。为克服此问题，在计算中需加高阶人工粘性。

四、前台阶分离流动的数值模拟

前台阶分离流动是二维分离流又一典型算例，也是工程中常见的流动问题。如管道流动中截面有突变的情况以及飞行器发动机稳定段的结构中，都存在有前台阶分离流动问题。和许多流体力学问题一样，二维前台阶分离流动首先是从实验方面开始的。查普曼（Chapman）和库恩（Kuehn）在1958年发表的实验报告中，详细地描述了前台阶分离流的现象，并对前台阶分离涡的内部结构进行了分析[12]，指出由于边界层和向前台阶的阻塞作用，使得流动在台阶前形成一回流区，即分离区。在此分离区内物面压力值比未分离区的物面压力值高出30%。在此之后人们在实验方面作了很多工作。

在数值模拟方面，首先是通过不可压N-S方程的数值解来研究前台阶分离流动。文献〔13,14〕中通过数值求解可压缩N-S方程的方法，研究了前台阶的分离流，给出了亚、跨、超等较广来流条件下的计算结果。这里将简单介绍文献〔14〕中的计算结果。

为了正确描述拐角（在这类流动中，前台阶的上拐角是确定整个流场特性的关键因素）附近和物面附近的流动物理特性，在x和y两个方向上都进行了坐标变换。在x方向上，如图10-10所示，在〔0，x_0〕段用均匀密网格，〔x_0，x_1〕段用变网格，〔x_1，x_A〕段用均匀粗网格。以后以$x=x_A$为轴，用域（1）中的网格布局对称地生成域（2）中的网格。再以$x=0$为轴，以域（2）中的网格布局对称地生成域（3）中的网格。这样在x方向上，在前缘、台阶、前物面及角点附近都是较密的均匀网格，而其他区域则是较粗的网格。

在y方向如图10-11所示，在〔0，y_0〕段为均匀细网格（这里取台阶高度为1，$y_0>1$，以便台阶后之物面附近也得到加密），〔y_0，y_1〕段用变网格，〔y_1，y_5〕段用均匀粗网格，使得在y方向的台阶前、拐点处及物面附近的网格能得到加密。坐标变换的分析表达式与近尾迹分离流中所采用的相同。

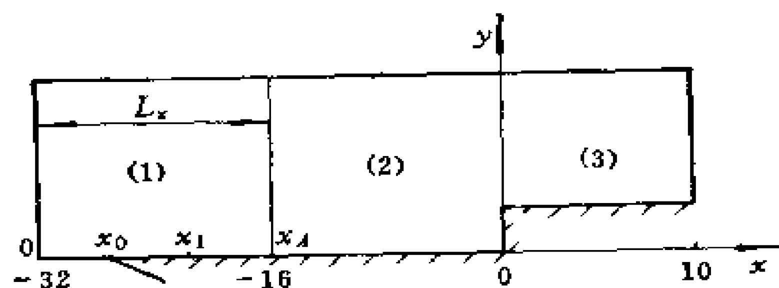


图10-10　x方向坐标变换

经坐标变换后的网格分布如图10-12所示。坐标变换后的基本方程组为(10-3-1)，计算所采用的差分方程组为(10-3-8)～(10-3-11)。边界条件处理与近尾迹分离流中的处理方法类似。当来流为超声速时，在拐角前的上边界部分取来流条件，拐角后的部分取简单波的处理方法，以反映拐角的影响；当来流为亚声速时，在上边界上全取来流参数值。

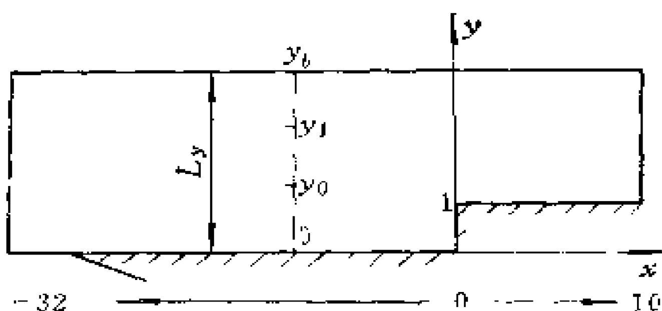


图10-11　y方向坐标变换

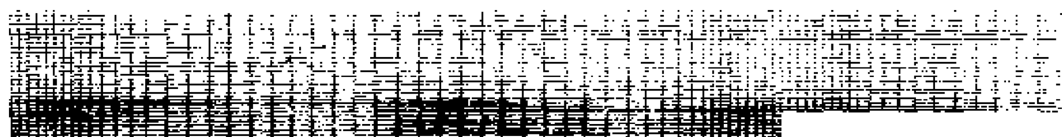


图10-12　物理平面内网格分布

下面将对绝热壁前台阶分离流的数值计算结果进行简单的讨论。物理模型取自文献[13]，几何尺寸如图10-13所示。取台阶高度$h=1$，台阶前之长度为L，$L/h=27.7$。

计算时将前缘包含在计算区域内，取计算区域$S_1=32h$，$S_2=10h$，$D=10h$，这里S_1为台阶前的区域长度，S_2为台阶后的长度，D为计算域的高度。在文献[14]中计算了$Ma_\infty=2.3$，$Re=7220$的流动情况，物面压力分布的计算结果如图10-14所示，

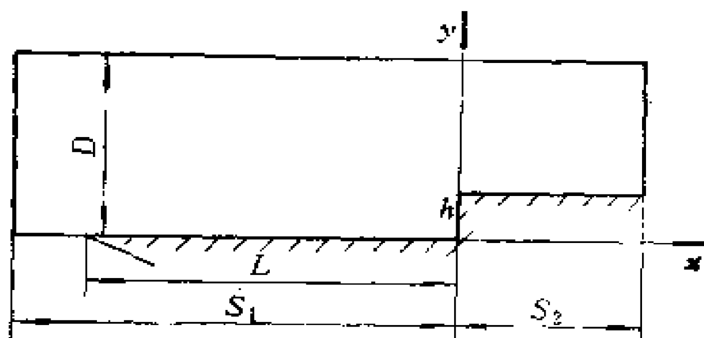


图10-13　求解域的几何尺寸

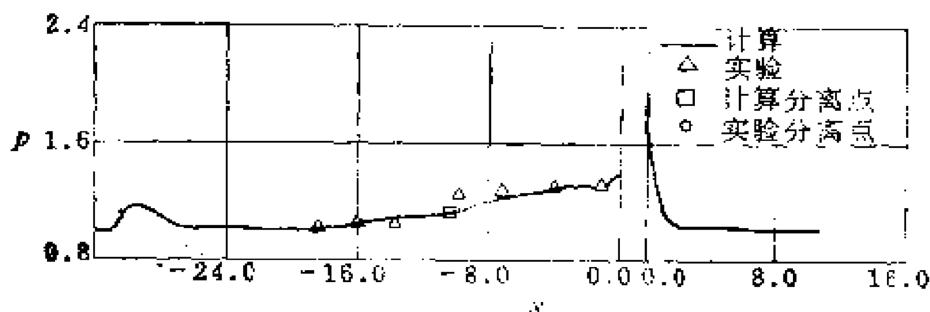


图10-14　物面压力分布

($Ma_{\infty}=2.3$、$Re=7250$)

这与实验值附合甚好。(在图10-14中实线表示计算结果，三角形表示实验值，正方形表示计算结果给出的分离点，圆点表示实验给出的分离点)。从计算结果可以看出，分离点处的压力值比分离前未扰动区的压力值高15%，而分离区的物面压力值比分离前的压力值要高出30%，计算所得的分离点位置与实验结果很接近。在图10-15中给出了同一来流条件下流场速度向量分布。

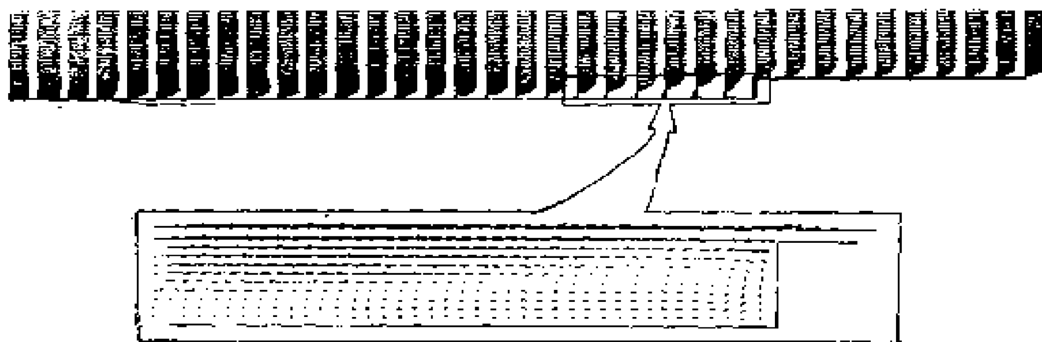


图10-15　流场速度向量分布

图10-16中给出了$Ma_\infty=2.3$时，不同雷诺数($Re=7220, 720, 72$)对应的物面压力分布，图中的曲线1、2、3对应为$Re=7220, 720, 72$的计算结果。从图中可以看出，在所计算的参数范围内，随着雷诺数Re的增加，分离涡的尺寸随之增大，而分离区的物面压力则随之减小。这与文献[1]中的结论是一致的。在图10-17中给出了雷诺数$Re=720$时，对于不同马赫数($Ma_\infty=0.2, 0.8, 2.3$)时的物面压力分布。由此给出了压缩性对前台阶分离流动的影响。

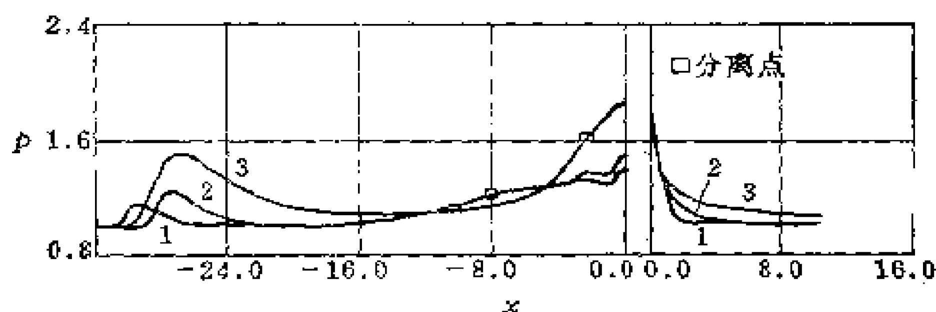


图10-16　不同雷诺数的压力分布

(1—$Re=7220$，2—$Re=720$，3—$Re=72$)

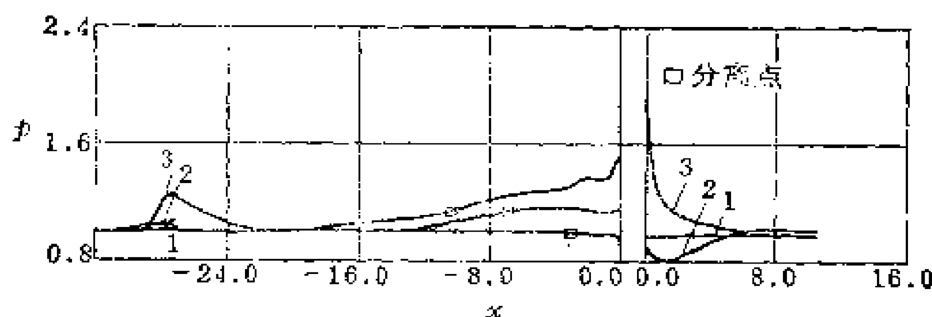


图10-17　不同Ma_∞的物面压力分布

($Re=720$；1—$Ma_\infty=0.2$，2—$Ma_\infty=0.8$，3—$Ma_\infty=2.3$)

计算结果表明，在所计算的参数范围内，随着来流马赫数Ma_∞的增加，流动分离区内的物面压力变化越来越大，分离涡的尺寸也随之增大。台阶后的物面压力，在超声速流动中，随着x的增加逐渐减小，随后恢复到来流压力值。而在$Ma_\infty=0.8$时，台

阶后的物面压力产生过渡膨胀，然后随着 x 增加压力值增加，并逐渐恢复到来流值。

第四节　非定常分离涡的数值模拟

本节将采用第三节中介绍的计算方法，求解二维可压缩N-S方程组（10-3-1），数值模拟分离涡的非定常发展过程。早在50年代已有很多作者通过不可压N-S方程（主要是涡运动—流函数方程）数值求解圆柱绕流问题，研究分离涡的非定常发展过程。在60年代初，弗罗姆（Fromm）[15]求解不可压N-S方程，给出了绕长方体的非对称涡流动图像，其结果与实验值非常相符。采用可压缩N-S方程的数值解来模拟分离涡的非定常发展过程，目前在国内外还刚开始。

非定常分离涡的产生、发展和脱落是一个复杂的过程，其流动规律与雷诺数、马赫数（流体的可压缩性）、物体外形等因素有关。当其他因素取定而只改变雷诺数且达到一定值时，流动处于不稳定状态。数值计算过程中所产生的数值扰动将使流动失去平衡。这种数值扰动来自人工输入的扰动，或差分格式非对称的截断误差、非对称的求解过程，以及舍入误差等。在雷诺数小于临界雷诺数时，这些扰动对流场不会产生影响。

一、长方柱体绕流的数值模拟

物理流动模型如图10-18所示。

有一均匀来流自左绕过一长方柱体向右流动。在雷诺数很低的情况下（极慢流动或称蠕动），与粘性力相比较，惯性力可以略去不计，此时流场中没有分离涡发生。随着雷诺数的增加，在体后将产生一对小的对称分离涡。随着雷诺数的继续增长，这一对称的分离涡的尺寸将不断扩大。当雷诺数增加到一定值（即临界雷诺数）时，流体的运动将处于不稳定状态。由于某种扰动的影响（如流质及物体表面粗糙度的非对称性，外界非对称的或随

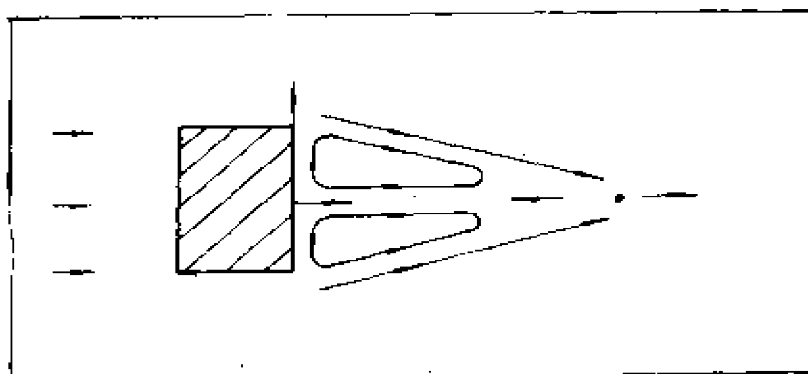


图10-18 柱体绕流示意图

机的干扰以及数值计算过程中的数值扰动等）使流动失去平衡，对称流动受到破坏。此时其中一侧的涡拉伸、后移，最后流向下游，并为由物体边缘所脱出的新涡所代替。另一侧的涡也有类似的发展情况，以后导致体后非定常卡门（Karman）涡街的产生。由于体后两侧分离涡的交替产生和脱落将影响作用于物体上的气动载荷，当涡的脱落频率接近于物体结构的振动频率时，将发生对物体有破坏作用的共振，所以无论从理论上或工程需要来讲，对非定常涡的研究都是十分重要的。随着雷诺数的继续增长，尾流区将为分离流所充满。

这里将给出文献〔17〕求解二维可压缩N-S方程（10-3-1），数值模拟长方柱的部分计算结果。在计算中取长方柱的高度 h 为特征长度，即取 $h=1$，取物体的长高比为0.6，计算区域的长度为物体长度的11倍，宽度为物体高度的4.2倍。物体位于离入口边界2.7倍 h 处。为了能正确描述物面附近和近尾流区的流动特性，在两个坐标方向上都进行了坐标变换。在 x 方向上的坐标变换是这样进行的：以物体后表面为基准，向右先是细的均匀网格，然后网格逐渐加大，最后是粗的均匀网格；在底平面左方的网格是以底平面为轴，将该平面右方之网格对称反射到左边而得，要求物体之前平面位于网格点上。y 方向上的网格也是采用类似的方法生成，使得物体四个角点附近及物面附近都有足够细的均匀网格。坐标变换的分析表达式、变换后的N-S方程以及

对应的差分逼近方程在形式上都与上一节中的相同，这里不再重述。在具体计算中取网格点数为 $IN \times JN = 91 \times 85$，这里 IN、JN 分别为 x、y 方向上的网格点数。在图10-19中给出了计算中所取的网格分布。



图10-19 物理平面的网格分布

边界条件：在计算区域的入口边界处及上下边界上取均匀来流条件；下游边界上利用二阶精度的外插公式给出流场参数；在物面上取无滑流条件和绝热壁条件。$t=0$ 时刻的初始条件，原则上可任意给定。在文献〔17〕中选取了两种初始条件，计算结果差别不大。其中之一如图10-18中所示：除物体后一三角区域外整个计算区域皆取为均匀来流，即 $u=1$，$v=0$，$T=1$，$\rho=1$；在三角区域内取 $u=0.5$，其他参数相同。

在图10-20至图10-24中给出了 $Ma_\infty=0.3$，$Re=2\times10^4$ 时矩

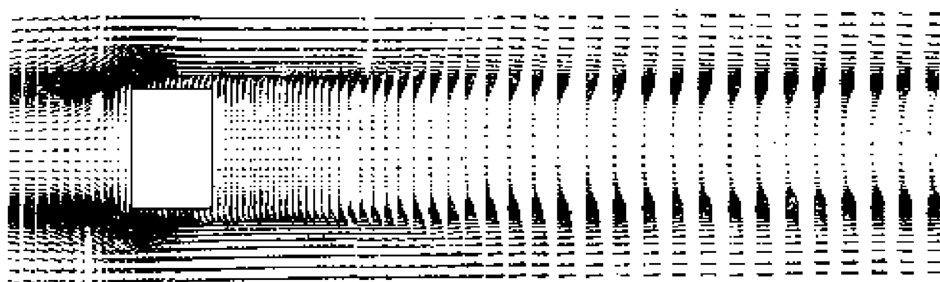


图10-20 $t=118$ 全流场速度向量分布

形柱绕流流场及其体后非对称涡形成的非定常过程。图中以 A、B、标出了涡心位置，以字母 o 标出了后驻点位置。在图10-20

中给出了 $t=118$ 时的全流场速度向量的计算结果。

为了更清楚地看到流场中的细节，在图10-21至图10-24中给出了不同时刻的局部流场计算结果。在图10-21中给出了 $t=46$ 时物体前方和近底部的局部流场。这里可以看到，物体的上下表面附近各形成一分离涡，体后形成一对对称涡，整个流场的流动是对称的，分离点位于上下表面（柱截面的侧面），这与实验中所观查到的是一致的。

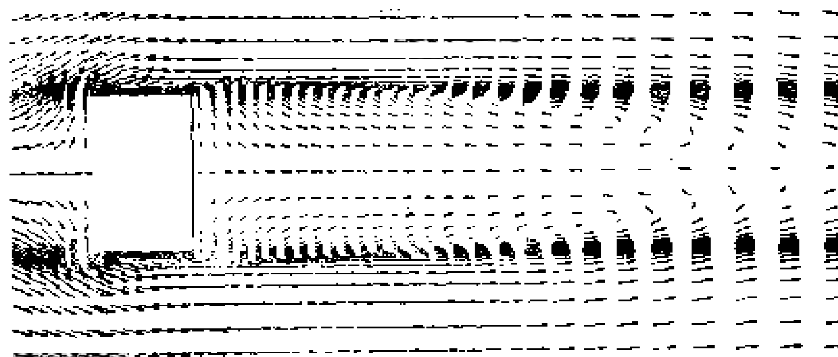


图10-21　$t=46$ 速度向量分布

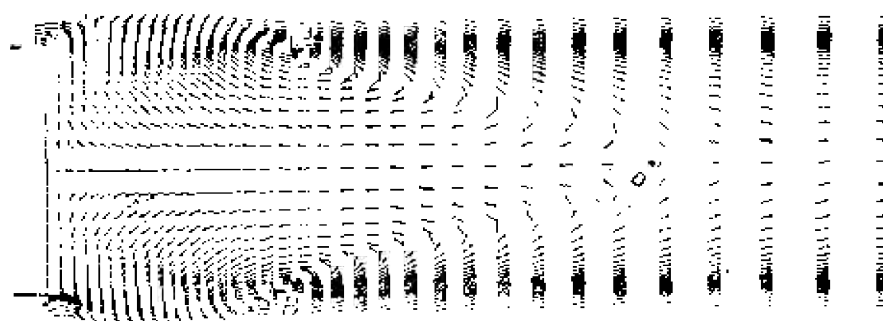


图10-22　$t=54$ 时速度向量分布

在以后时刻的计算结果中，侧面分离涡的形状基本相似，故下面只给出了近尾迹流场的计算结果。图10-22中给出了 $t=54$ 时的近尾迹流场的结果。这里底部分离涡仍然是对称的，但在两个后角点附近产生了非对称流动，在下一个角点附近开始形成一个新的涡。在图10-23中给出了 $t=104$ 时的局部流场。这里清楚

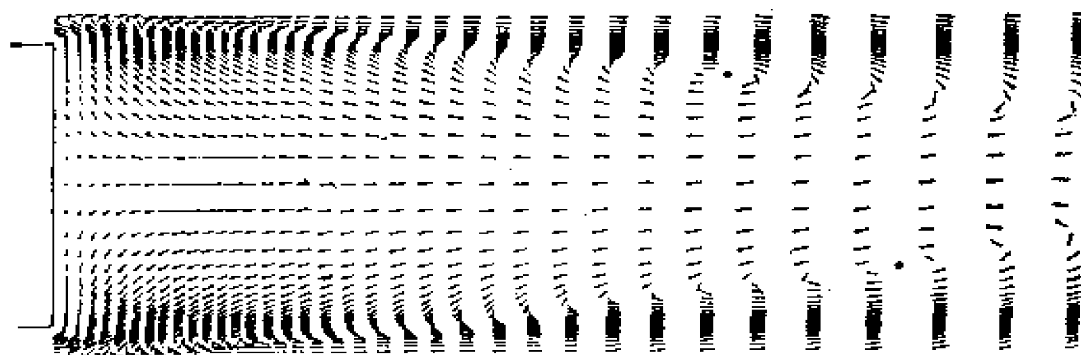


图10-23　$t=104$时速度向量分布

地看到了非对称涡已形成，其涡心位置已拖向下游。在图 10-24 中给出了 $t=125$时刻的局部流场。这里看到了从物体角点附近新脱出来的涡。图中用 c 标出了新脱出的涡心位置，而前个以 B 为涡心的涡已拖向下游。以上描述了在给定来流马赫数和雷诺数的条件下，用数值计算方法模拟了矩形柱绕流中，体后规则卡门涡街形成的过程，这与实验中所观察到的结果是一致的。

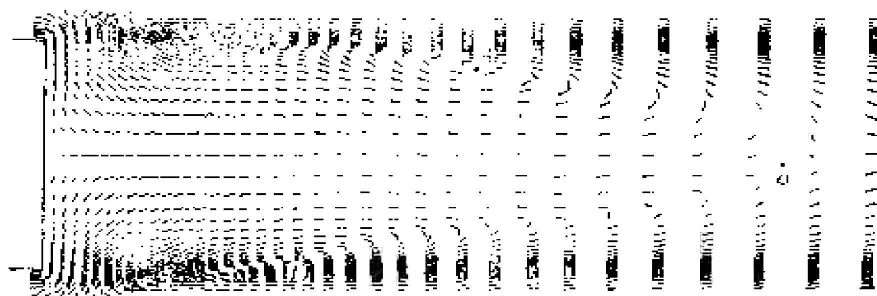


图10-24　$t=125$时速度向量分布

为了给出压缩性对分离涡的影响，在图10-25中给出了$Ma_\infty=0.8$，$Re=10^4$，$t=121$时刻的局部流场计算结果。这里可以看出，体后底部近尾迹区流场中，涡仍是对称的。

在图10-26中给出了 $Ma_\infty=0.8$，$Re=10^5$，$t=84$时刻的局部流场结果。

这里可以看到非对称涡已形成。这意谓着随着来流马赫数加

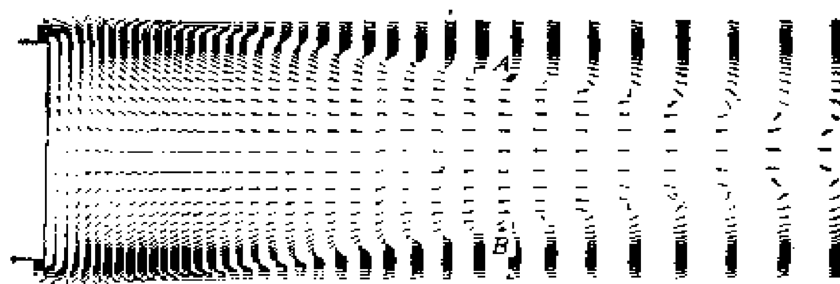


图10-25　$t=121$时速度向量分布

($Ma_\infty=0.8$, $Re=10^6$)

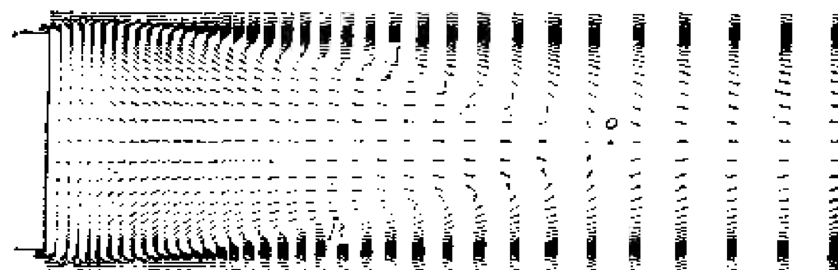


图10-26　$t=84$时速度向量分布

($Ma_\infty=0.8$, $Re=10^6$)

大临界雷诺数加大。这一结论与纳曼（Nanmann）在马赫数$0.35<Ma_\infty<0.75$范围内，对圆柱尾流实验研究的结果是一致的。它反映了压缩性与剪切层干扰对分离涡的形成及发展的影响。

参考文献

1　MacCormack R W and Baldwin B S. A Numerical Method for Solving the Navier-stokes Equations with Application to shock Boundary layer Interactions. AIAA Paper 75～1.

2　MacCormack R W. An Efficient Explicit Implicit Characteristic Method for Solving the Compressible Navier-Stokes Equations SIAM AMS Proceedings, Volum 11, 1978.

3　Shang J S. Implicit-Explicit Method for Solving the Navier-Stokes Equations. AIAA Paper No. 77-646.

4　MacCormack R W. A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow. AIAA Papev No. 81 0110.

5　Fu Dexun and Ma Yanwen. A New Modified Semi Explicit Difference

Scheme in Aerodynamics. Proceedings of the 9th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Paris, 1984.

6 傅德薰，马延文．二元激波与附面层相互干扰问题的数值计算．力学学报，1986(1)

7 Mac Cormack R W. Current Status of Numerical Solutions of the Navier-Stokes Equations. AIAA Paper No. 85-032.

8 Allen J S and Cheng S. I. Numerical Solutions of the Compressible Naviev-Stokes Equations for Laminar Flow near Wake, Physics of Fluids. 1970, 13(1). 37～52

9 Roach P. J and Mueller, T J. Numerical Solutions of Compressible and Incompressible Laminar Separated Flows. AIAA Paper, No. 68-741

10 马延文，傅德薰．近尾迹流动的数值模拟．计算物理，1987，4(3)

11 Ma Yanwen and Fu Dexun. Numerical Simulation of Near Wake Flow. Proceeding of the International Conference on Fluid Mechanics, Beijing, 1987.

12 Chapman D R, Kuehn, D M, Larson. H K. Ivistigation of Separated Flow in Supersonic Stream With Emphasis on the Effect of Transition. NACA Rept. No. 1356, 1958

13 Мышенков В И Численное Исследование Отрывного Течения перед Уступом М ЖГ., 1979(5)

14 王力，傅德薰．向前台阶分离流的数值模拟．计算物理，1990，7(3)

15 Fromm J E. A Method for Computing Non-Steady Incompressible Fluid Flows. Los Alamos Scientific Lab. Rept. No. La-2910, los Alamos, New Mexico, 1963

16 傅德薰，马延文．钝体绕流流场分离涡的数值模拟．第四届全国流体力学学术会议论文集，1989年

17 Fu Dexun and Ma Yanwen Numerical Simulation of the Flow Around Rectangular Cylinder. Proceedings, The Fourth Asian Congress of Fluid Mechanics, Hong Kong, 1989.

第十一章　三维粘性绕流问题的数值模拟

三维粘性绕流流场与二维粘性绕流流场相比较，前者复杂得多。流场中很多物理现象与二维问题相比有本质差别，一些适用于二维流动的数值模拟方法不一定适用于三维流动问题。实际中的流动多为三维流动。三维粘性绕流流场的求解是确定各种飞行器气动特性所需解决的问题，所以对三维粘性绕流的数值模拟研究不但有重要的学术意义，且有重要应用价值。

本章将描述三维粘性绕流问题的数值模拟方法，给出高超声速钝锥大攻角背风面分离的计算结果，给出简易航天飞机整机的三维粘性绕流的全流场计算结果以及平板—楔的三维粘性流动的计算结果。

第一节　曲线坐标系下的基本方程及坐标变换

一、基 本 方 程

选用正交曲线坐标（τ，x_1，x_2，x_3）。$x_3=0$ 的坐标曲面是绕该曲面对称轴旋转而构成的旋转体。在图11-1中给出了该坐标系的示意图。在具体计算中坐标曲面 $x_3=0$ 是由四个部分组成：

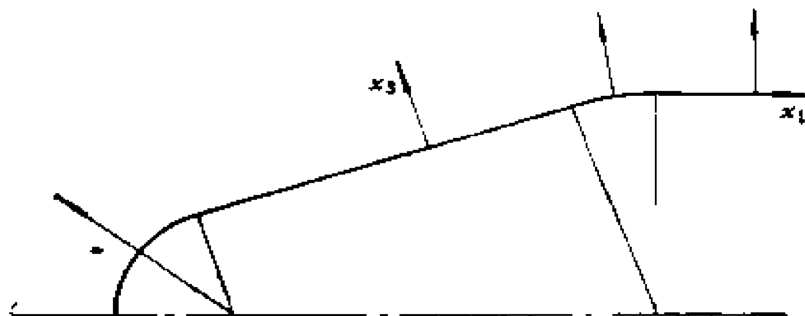


图11-1　坐标示意图

第一部分是球面；第二部分为与第一部分的球面相切的锥面，第三部分是与第二部分锥面相切的环面组成；最后一部分是柱面，它与前面的环面相切（参见第八章第一节中的坐标系）。

在选定的坐标系中，对于完全气体，在不考虑外力的条件下，三维可压缩N－S方程的无量纲向量形式可写为

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}+\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \vec{f}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \vec{f}_3}{\partial x_3}=\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \vec{F}_3}{\partial x_3}+\vec{D}_1+\vec{D}_2 \tag{11-1-1}$$

$$\vec{U}=RH\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E\end{pmatrix},\quad \vec{f}_1=R\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ u(E+P)\end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_2=H\begin{pmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho wv\\ v(E+P)\end{pmatrix},\quad \vec{f}_3=RH\begin{pmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+p\\ w(E+p)\end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_1=R\begin{pmatrix}0\\ \sigma_{11}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ u\sigma_{11}+v\sigma_{12}+w\sigma_{13}+\frac{\lambda}{H}Q\frac{\partial T}{\partial x_1}\end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_2=H\begin{pmatrix}0\\ \sigma_{21}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{23}\\ u\sigma_{21}+v\sigma_{22}+w\sigma_{23}+\frac{\lambda}{R}Q\frac{\partial T}{\partial x_2}\end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_3 = RH\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \\ u\sigma_{31}+v\sigma_{32}+w\sigma_{33}+\lambda Q\dfrac{\partial T}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ (\rho v^2+P)H\cos\theta-\dfrac{R}{R_1}\rho uw \\ -H\rho v(w\sin\theta+u\cos\theta) \\ \dfrac{R}{R_1}(\rho u^2+P)+H(\rho v^2+P)\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{R}{R_1}\sigma_{13}-\sigma_{22}H\cos\theta \\ H(\sigma_{23}\sin\theta+\sigma_{12}\cos\theta) \\ -H\sin\theta\,\sigma_{22}-\dfrac{R}{R_1}\sigma_{11} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E=\rho\left(C_vT+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)$$

无量纲形式的状态方程为

$$p=\frac{1}{rM_{a\infty}^2}\rho T \tag{11-1-2}$$

方程式中的所有参数为无量纲参数，其定义与第八章中的相同。式中的u，v和w对应为（x_1，x_2，x_3）三个坐标方向上的速度分量；ρ、T和P对应为密度、温度和压力。σ_{ij}为粘性应力张量，其表达式为

$$\sigma_{11}=2\frac{\mu}{Re}\left[\frac{1}{H}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{w}{R_1}\right)-\frac{1}{3}\operatorname{div}\vec{V}\right]$$

$$\sigma_{22}=2\frac{\mu}{Re}\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}+w\sin\theta+u\cos\theta\right)-\frac{1}{3}\mathrm{div}\vec{V}\right]$$

$$\sigma_{33}=2\frac{\mu}{Re}\left[\frac{\partial w}{\partial x_3}-\frac{1}{3}\mathrm{div}\vec{V}\right]$$

$$\sigma_{21}=\sigma_{12}=\frac{\mu}{Re}\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-v\cos\theta\right)+\frac{1}{H}\frac{\partial v}{\partial x_1}\right]$$

$$\sigma_{31}=\sigma_{13}=\frac{\mu}{Re}\left[\frac{\partial u}{\partial x_3}+\frac{1}{H}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}-\frac{u}{R_1}\right)\right]$$

$$\sigma_{32}=\sigma_{23}=\frac{\mu}{Re}\left[\frac{\partial v}{\partial x_3}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial x_2}-v\sin\theta\right)\right]$$

$$\mathrm{div}\vec{V}=\frac{1}{H}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{\partial Hw}{\partial x_3}\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x_2}+\frac{u\cos\theta+w\sin\theta}{R}$$

方程式（11-1-1）向量函数表达式中的H为拉梅系数，R为空间某一点到坐标曲面的对称轴距离，其表达式有以下形式

$$H=1+x_3/R_1,\quad R=R_0+x_3\sin\theta$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_3}=\sin\theta$$

R_1为沿x_1方向坐标曲线（$x_3=0$，$x_2=\mathrm{const}$）的曲率半径。R_0为空间点（x_1，x_2，0），即坐标曲面上对应点到对称轴的距离。如果取$x_1=s$，$x_3=n$，则$1/R_1$和R的分析表达式与（8-1-3）和（8-1-4）相同。

二、坐 标 变 换

为了能正确描述物面附近粘性占主导的流动区域内的物理特性和便于边界条件处理，在计算中引进以下坐标变换

$$\begin{cases} t=\tau \\ x=x_1 \\ y=x_2 \\ z=z(\zeta) \end{cases} \tag{11-1-3}$$

$$\zeta=\frac{x_3-B_i(x_1,\ x_2)}{\delta(\tau,\ x_1,\ x_2)}$$

这里 $\delta(\tau, x_1, x_2)$ 为头激波（或计算区域的外边界）到物体表面之间的脱体距离，即

$$\delta(\tau, x_1, x_2) = B_s(\tau, x_1, x_2) - B_i(x_1, x_2) \qquad (11\text{-}1\text{-}4)$$

$B_i(x_1, x_2)$ 为物面方程，$B_s(\tau, x_1, x_2)$ 为激波方程。坐标变换关系式 $z = z(\xi)$ 的表达式与式（8-1-8）中的相同（参见第八章）。计算坐标（t, x, y, z）与物理坐标（τ, x_1, x_2, x_3）之间有以下导数关系

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_3}$$

再利用坐标变换关系式（11-1-3）和（8-1-8）可得

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} - LN\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x} - NM_1\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial y} - NM_2\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = N\frac{\partial}{\partial z}$$

式中

$$N = z_\xi/\delta, \qquad L = \zeta\delta'_t$$

$$M_1 = (B_i)'_{x_1} + \zeta\delta'_{x_1}$$

$$M_2 = (B_i)'_{x_2} + \zeta\delta'_{x_2}$$

其中 z_ξ 的表达式与式（8-1-10）中的相同。f'_{x_i} 表示函数 f 对 x_i 的偏导数，f'_t 表示 f 对 t 的偏导数。

经坐标变换后的三维可压缩N－S方程组（11-1-1）有以下形式

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x}+\frac{\partial \vec{f}_2}{\partial y}+N\left[\frac{\partial \vec{f}_3}{\partial z}-L\frac{\partial U}{\partial z}-M_1\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial z}-M_2\frac{\partial \vec{f}_2}{\partial z}\right]$$

$$=\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x}+\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial y}+N\left[\frac{\partial \vec{F}_3}{\partial z}-M_1\frac{\partial \vec{F}_1}{\partial z}-M_2\frac{\partial \vec{F}_2}{\partial z}\right]$$

$$+\vec{D}_1+\vec{D}_2 \qquad (11\text{-}1\text{-}5)$$

方程组（11-1-5）中的向量 $\vec{U}$，$\vec{f}_i$，$\vec{F}_i$（$i=1，2，3$）的表达式与式（11-1-1）中的相同，只是坐标变换后的粘性应力张量 $\sigma_{i,j}$ 有以下表达式

$$\sigma_{11}=\frac{2\mu}{Re}\left[\frac{1}{H}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-NM_1\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{w}{HR_1}-\frac{1}{3}\mathrm{div}\vec{V}\right]$$

$$\sigma_{22}=\frac{2\mu}{Re}\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-NM_2\frac{\partial V}{\partial z}+w\sin\theta+u\cos\theta\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\mathrm{div}\vec{V}\right]$$

$$\sigma_{33}=\frac{2\mu}{Re}\left[N\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{1}{3}\mathrm{div}\vec{V}\right]$$

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\frac{\mu}{Re}\left[\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-NM_2\frac{\partial u}{\partial z}-v\cos\theta\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{H}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-NM_1\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]$$

$$\sigma_{13}=\sigma_{31}=\frac{\mu}{Re}\left[N\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{H}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-NM_1\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{u}{R_1}\right)\right]$$

$$\sigma_{23}=\sigma_{32}=\frac{\mu}{Re}\left[N\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-NM_2\frac{\partial w}{\partial z}-v\sin\theta\right)\right]$$

其中

$$\mathrm{div}\vec{V}=\frac{1}{H}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+N\left(\frac{\partial Hw}{\partial z}-M_1\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{R}\left[\frac{\partial v}{\partial y}-NM_2\frac{\partial v}{\partial z}\right]+\frac{u\cos\theta+w\sin\theta}{R}$$

考虑到流动参数在物面附近粘性占主导的区域内，沿 z 方向的变化远比沿 x 方向的变化大，故在计算中．为了节省计算工作量减少计算机时，略去了方程（11-1-5）中 x 方向的二阶导数项（在

粘性项中），这就是计算中所采用的简化N－S方程。

第二节　曲线坐标系下的差分逼近式

对三维N－S方程组（11-1-5），差分方程的构造采用了文献〔1〕中所介绍的方法。对于差分方程中的显式部分均采用中心差分；对于差分方程中的隐式部分利用近似因式分解方法。为了节省计算工作量和简化求解过程，在计算中采用了特殊系数矩阵分裂方法，因而在求解过程中避免了大量的矩阵运算和矩阵求逆的工作。所得到的逼近于式（11-1-5）的差分方程，经近似因式分解后有以下形式

$$\Delta \vec{U}^{n}_{i,j,k}=\left\{\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^{0}_{x}(\vec{f}_{1})+\frac{\Delta t}{\Delta y}\delta^{0}_{y}(\vec{f}_{2})+N\frac{\Delta t}{\Delta z}\delta^{0}_{z}(\vec{f}_{3})\right.$$
$$\left.-L\delta^{0}_{z}\vec{U}-M_{1}\delta^{0}_{z}(\vec{f}_{1})-M_{2}\delta^{0}_{z}(\vec{f}_{2})]+\Delta t\vec{G}\right\}^{n}_{i,j,k}\tag{11-2-1}$$

$$(\boldsymbol{I}+\alpha_{1}\delta^{-}_{x}\boldsymbol{A}^{+}_{1}\cdot)(\boldsymbol{I}+\alpha_{1}\delta^{+}_{x}\boldsymbol{A}^{-}_{1}\cdot)(\boldsymbol{I}+\alpha_{2}\delta^{-}_{y}\boldsymbol{A}^{+}_{2}\cdot)(\boldsymbol{I}+\alpha_{2}\delta^{+}_{y}\boldsymbol{A}^{-}_{2}\cdot)$$
$$(\boldsymbol{I}+\alpha_{3}\delta^{+}_{z}\boldsymbol{A}^{-}_{3}\cdot)(\boldsymbol{I}+\alpha_{3}\delta^{-}_{z}\boldsymbol{A}^{+}_{3}\cdot)\delta_{t}\vec{U}^{n+1}_{i,j,k}=\Delta\vec{U}^{n}_{i,j,k}\tag{11-2-2}$$

$$\vec{U}^{n+1}_{i,j,k}=\vec{U}^{n}_{i,j,k}+\delta_{t}\vec{U}^{n+1}_{i,j,k}\tag{11-2-3}$$

差分方程（11-2-1）中的 $\vec{G}$ 表示式（11-1-1）中右端各项的差分逼近式。α_i 有以下表达式

$$\alpha_{1}=\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x},\quad \alpha_{2}=\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta y}$$

$$\alpha_{3}=\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta z}$$

$\boldsymbol{A}_l$ 为雅可比矩阵 $D(f_l)/D(U)$，$l=1、2、3$，且有

$$\boldsymbol{A}_{l}=\boldsymbol{S}^{-1}_{l}\boldsymbol{\Lambda}_{l}\boldsymbol{S}_{l}\tag{11-2-4}$$

而 $\boldsymbol{A}^{\pm}_{l}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}_l$ 的分裂形式，且有

$$\boldsymbol{A}_l^{\pm}=\boldsymbol{S}_l^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_l^{\pm}\boldsymbol{S}_l \qquad (11\text{-}2\text{-}4\text{ b})$$

$\boldsymbol{\Lambda}_l$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}_l$ 的特征值对角矩阵， $\boldsymbol{A}_l$ 的特征值 $\lambda_l(\boldsymbol{A}_l)$ 为

$$\begin{cases}\lambda_{1,2,3}(\boldsymbol{A}_l)=\sigma+\alpha u+\beta v+\gamma w\\ \lambda_{4,5}(\boldsymbol{A}_l)=\sigma+\alpha u+\beta v+\gamma w\mp\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\ c\end{cases} \qquad (11\text{-}2\text{-}5)$$

矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_l^{\pm}$ 是对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_l$ 经分裂而得，其元素为

$$\begin{cases}\lambda_{1,2,3,4}^{+}(\boldsymbol{A}_l)=\tilde{u}_l^{+}\\ \lambda_5^{+}(\boldsymbol{A}_l)=\tilde{u}_l^{+}+\tilde{c}\\ \lambda_{1,2,3,5}^{-}(\boldsymbol{A}_l)=\tilde{u}_l^{-}\\ \lambda_4^{-}(\boldsymbol{A}_l)=\tilde{u}_l^{-}-\tilde{c}\end{cases} \qquad (11\text{-}2\text{-}6\text{ a})$$

这里

$$\begin{cases}\tilde{c}=c\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{1/2}\\ \tilde{u}_l^{\pm}=\dfrac{1}{2}[\sigma+\alpha u+\beta v+\gamma w\pm|\sigma+\alpha u+\beta v+\gamma w|]\pm\sigma_l\end{cases}$$

$$(11\text{-}2\text{-}6\text{ b})$$

其中 c 为声速。矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_l$，$\boldsymbol{S}_l^{-1}$，$\boldsymbol{S}_l$ 和 $\boldsymbol{A}_l$ 依赖于参变数 σ，α、β 和 γ．这些矩阵的具体表示可参阅第四章中的附录。当 l 取不同值时，参数 σ，α，β 和 γ 的具体形式不同（这里的 α，β 和 γ 对应于附录中的 α_1，α_2 和 α_3），即

$$l=1:\ \sigma=0,\ \ \alpha=\frac{1}{H},\ \ \beta=0,\ \ \gamma=0$$

$$l=2:\ \sigma=0,\ \ \alpha=0,\ \ \beta=1/R,\ \ \gamma=0$$

$$l=3:\ \sigma=-LN,\ \ \alpha=-N\frac{M_1}{H},\ \ \beta=-N\frac{M_2}{R}$$

$$\gamma=N$$

差分方程组（11-2-1)，（11-2-2）和（11-2-3）可改写为以下求解序列

$$\begin{cases}(I+\alpha_1 A_1^+)\delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{6}} = \Delta \vec{U}_{i,j,k}^{n} + \alpha_1 (A_1^+ \delta_t \vec{U}^{n+\frac{1}{6}})_{i-1,j,k} \\ (I-\alpha_1 A_1^-)\delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+\frac{2}{6}} = \delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{6}} \\ \qquad\qquad -\alpha_1 (A_1^- \delta_t \vec{U}^{n+\frac{2}{6}})_{i+1,j,k} \\ (I+\alpha_2 A_2^+)\delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+\frac{3}{6}} = \delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+\frac{2}{6}} \\ \qquad\qquad +\alpha_2 (A_2^+ \delta_t \vec{U}^{n+\frac{3}{6}})_{i,j-1,k} \\ (I-\alpha_2 A_2^-)\delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+\frac{4}{6}} = \delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+\frac{3}{6}} \\ \qquad\qquad -\alpha_2 (A_2^- \delta_t \vec{U}^{n+\frac{4}{6}})_{i,j+1,k} \\ (I-\alpha_3 A_3^-)\delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+\frac{5}{6}} = \delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+\frac{4}{6}} \\ \qquad\qquad -\alpha_3 (A_3^- \delta_t \vec{U}^{n+\frac{5}{6}})_{i,j,k+1} \\ (I+\alpha_3 A_3^+)\delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+1} = \delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+\frac{5}{6}} + \alpha_3 (A_3^+ \delta_t \vec{U}^{n+1})_{i,j,k-1} \\ \vec{U}_{i,j,k}^{n+1} = \vec{U}_{i,j,k}^{n} + \delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+1}\end{cases} \tag{11-2-7}$$

其中

$$\delta_x^+ g_{i,j,k} = g_{i+1,j,k} - g_{i,j,k}$$

$$\delta_x^- g_{i,j,k} = g_{i,j,k} - g_{i-1,j,k}$$

$$\delta_x^0 = \frac{1}{2}(\delta_x^+ + \delta_x^-)$$

类似可以写出 $\delta_y^\pm$, $\delta_z^\pm$ 和 δ_y^0, δ_z^0 的表达式。从差分方程(11-2-7)可以看出，只要已知边界上的值 $\delta_t \vec{U}$，则可按每一个方向进行求

解。例如，对于 x 方向，按 i 增加的方向进行扫描。若 $\delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{6}}$ 为已知，则按式（11-2-7）中的第一个方程可求出各点上的 $\delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{6}}$ 值，然后按第二式沿 i 减少的方向扫描，求出各点的 $\delta_t \vec{U}_{i,j,k}^{n+\frac{2}{6}}$ 值。类似对 j 和 k 方向扫描可求出式（11-2-7）的解。对于求解定常问题，格式具有二阶精度。

为了进一步简化计算过程，采用第四章中的特殊系数矩阵分裂方法。现以 x 方向的求解过程为例简述如下。将差分方程（11-2-7）中的前两个式子改写为以下形式

$$\left[I+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\boldsymbol{A}_1^+\right]\delta_t\vec{U}_i^{n+\frac{1}{6}}=\Delta\vec{U}_i^n+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\boldsymbol{A}_1^+\delta_t\vec{U}^{n+\frac{1}{6}}\right)_{i-1}=\vec{G}_i \qquad (11\text{-}2\text{-}8)$$

$$\left[I-\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\boldsymbol{A}_1^-\right]\delta_t\vec{U}_i^{n+\frac{2}{6}}=\delta_t\vec{U}_i^{n+\frac{1}{6}}-\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\boldsymbol{A}_1^-\delta_t\vec{U}^{n+\frac{2}{6}}\right)_{i+1}=\vec{F}_i \qquad (11\text{-}2\text{-}9)$$

$\vec{G}_i$ 在正扫描过程中和 $\vec{F}$ 在反扫描过程中均为已知。所采用的具体矩阵分裂形式为

$$\lambda_{1,2,3,4}^+=u^+,\qquad \lambda_5^+=u^++c$$

$$\lambda_{1,2,3,5}^-=u^-,\qquad \lambda_4^-=u^--c$$

$$\Lambda_1^+=u^+I+cI_5,\qquad \Lambda_1^-=u^-I-cI_4$$

$$\boldsymbol{A}_1^+=u^+I+cS_1^{-1}I_5S_1,\quad \boldsymbol{A}_1^-=u^-I-cS_1^{-1}I_4S_1$$

$$u^\pm=\frac{u\pm|u|}{2},\quad \boldsymbol{A}_1=S_1^{-1}\Lambda_1S_1=\boldsymbol{A}_1^++\boldsymbol{A}_1^-$$

式中 I 为单位矩阵，I_k 为 5 × 5 的对角矩阵（这里 $k=1,2,3,$

4，5），且在对角线上第 k 个元素为 1 而其他元素皆为零的矩阵。例如

$$I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程式中的其他函数与前面定义相同。经简单推导差分方程（11-2-8）和（11-2-9）可写出显式表达式如下

$$\delta_t \vec{U}_i^{n+\frac{1}{6}} = \frac{1}{1+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}u^+}\left\{\vec{G}_i - \frac{\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}c\beta_5}{1+\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u^+ + c)}\right.$$

$$\left.\cdot\begin{pmatrix} (S_1^{-1})_{1,5} \\ (S_1^{-1})_{2,5} \\ (S_1^{-1})_{3,5} \\ (S_1^{-1})_{4,5} \\ (S_1^{-1})_{5,5} \end{pmatrix}\right\} \tag{11-2-10}$$

$$\delta_t \vec{U}_i^{n+\frac{2}{6}} = \frac{1}{1-\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}u^-}\left\{\vec{F}_i - \frac{\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}c\beta_4}{1-\frac{\beta}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(u^- - c)}\right.$$

$$\left.\cdot\begin{pmatrix} (S_1^{-1})_{1,4} \\ (S_1^{-1})_{2,4} \\ (S_1^{-1})_{3,4} \\ (S_1^{-1})_{4,4} \\ (S_1^{-1})_{5,4} \end{pmatrix}\right\} \tag{11-2-11}$$

其中

$$\beta_i = \sum_k (S_1)_{i,k} X_k, \quad i = 4, 5$$

$$\vec{X} = \vec{G}, \quad \vec{F}$$

X_k 为向量 $\vec{X}$ 的元素，$(S_1^{-1})_{i,j}$ 和 $(S_1)_{i,j}$ 分别为矩阵 S_1^{-1} 和 S_1 的元素。对于式（11-2-10）$\vec{X}=\vec{G}$，对于式（11-2-11）$\vec{X}=\vec{F}$。还应注意，在关系式（11-2-6 b）的 $\tilde{u}_l^*$ 表达式中引入了参变量 σ_l，它的引入是为了改善粘性项差分逼近式对稳定性的限制，在计算中取为

$$\sigma_1 = \max\left\{0, \ \frac{1}{H}\sqrt{\frac{2\mu\gamma}{\Delta t Re Pr \rho}} - \frac{\Delta x}{\Delta t}\right\}$$

$$\sigma_2 = \max\left\{0, \ \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2\mu\gamma}{\Delta t Re Pr \rho}} - \frac{\Delta y}{\Delta t}\right\}$$

$$\sigma_3 = \max\left\{0, \ N\sqrt{\frac{2\mu\gamma}{\Delta t Re Pr \rho}\left[1 + \left(\frac{M_1}{H}\right)^2 + \left(\frac{M_2}{R}\right)^2\right]} - \frac{\Delta z}{\Delta t}\right\}$$

（11-2-12）

从差分方程（11-2-10）和（11-2-11）可以看出，这里所构造的差分算法不但消除了通常隐式方法中的大量矩阵数值求逆，而且也基本消除了矩阵运算。在形式上差分解可以显式地表达出来，且格式又具有隐式方法的优点，是无条件稳定格式。这是最简单的隐式格式。

第三节　钝体绕流问题的边界条件处理

一、上游边界条件

在三维粘性绕流的计算中，上游边界条件可采取两种处理方法。一种是在物体的钝头区某一 x_1 为常数的截面处给定边界条件（即给定流场参数），由此开始后面区域的计算。当被绕物体前面

是球体时．由于球体部分的绕流流场总是轴对称的（在有攻角绕流中也是轴对称的，其对称轴为来流方向通过球心的轴），故在上游边界 $x_1=$ 常数 $=(x_1)_0$ 处的流场参数可利用球体轴对称粘性绕流程序（即第八章的计算方法）给出流场计算结果，然后经坐标转换得 $x_1=(x_1)_0$ 处的三维粘性绕流的上游边界上的流动参数值（其转换方法参见本章附录）。第二种方法是考虑将被绕物体的钝头和前体对称轴（坐标曲面的对称轴）都包括在计算区域内的整体计算。此时要求对称轴位于 $i=1$ 和 $i=2$ 之间的半点上。（也可将对称轴置于整网格点上）。在 $i=1$ 点上，利用流动的对称条件给出 $i=1$ 处的流动参数值，即

$$\begin{cases} f(1,j,k)=f(2,JN-j+1,k) \\ f=\rho,v,w,T \\ u(1,j,k)=-u(2,JN-j+1,k) \end{cases} \tag{11-3-1}$$

这里 JN 为 y 方向所取的网格点数。

二、下游边界条件

在计算中要求下游边界位于距离被绕物体前驻点线足够远的地方，使得在下游边界的流场截面上的大部分区域为超声速区。在该截面上利用 x_1 方向的二阶精度外插公式，给出下游边界上的流场参数值。

三、对称平面上的边界条件

在计算中可采用两种边界条件的处理方法，第一种要求在迎风面，对称平面位于 $j=1$ 和 $j=2$ 之间的半点上；在背风面，对称面位于 $j=JN$ 和 $j=JN-1$ 之间的半点上，在这两个平面上都利用流动的对称性给出流动参数在边界面上的值，即

$$\begin{cases} f(i,1,k)=f(i,2,k) \\ v(i,1,k)=-v(i,2,k) \\ f(i,JN,k)=f(i,JN-1,k) \\ v(i,JN,k)=-v(i,JN-1,k) \end{cases} \tag{11-3-2}$$

其中 $f=\rho, u, w, T$。

另一种边界条件的处理方法是考虑在迎风面，对称平面位于 $j=1$ 处，背风面对称平面位于 $j=JN$ 处。这种情况下利用流动的对称性，在对称平面上的边界条件有以下形式

$$
\begin{cases}
g(i,1,k)=\frac{1}{3}[4g(i,2,k)-g(i,3,k)] \\
g(i,JN,k)=\frac{1}{3}[4g(i,JN-1,k) \\
\qquad -g(i,JN-2,k)] \\
v(i,1,k)=0 \\
v(i,JN,k)=0
\end{cases}
\tag{11-3-3}
$$

式中 $$g=\rho, u, w, T$$

四、物面边界条件

在物面上，利用无滑流条件和等温壁条件，密度可利用第三个动量方程，求出物面上的压力，然后利用状态方程和已知的壁面温度求出物面上的密度值；密度也可以利用类似于边界层理论中的假设，取物面法向压力梯度为零，并利用已知的内点值，求出在物面上的压力和密度。物面上的压力梯度为

$$
\text{grad}\, P=\left\{\frac{1}{H}\frac{\partial p}{\partial x_1},\ \frac{1}{R}\frac{\partial p}{\partial x_2},\ \frac{\partial p}{\partial x_3}\right\}
$$

经坐标变换后可写为

$$
\text{grad}\, P=\left\{\frac{1}{H}\left(\frac{\partial p}{\partial x}-NM_1\frac{\partial p}{\partial z}\right),\right.
\left.\frac{1}{R}\left(\frac{\partial p}{\partial y}-NM_2\frac{\partial p}{\partial z}\right),\ N\frac{\partial p}{\partial z}\right\}
\tag{11-3-4}
$$

物面法向向量为

$$
\vec{n}=\left\{-\frac{1}{H}(B_i)'_{x_1},\ -\frac{1}{R}(B_i)'_{x_2},\ 1\right\}
\tag{11-3-5}
$$

这里 $B_i=B_i(x_1, x_2)$ 为物面方程，$(B_i)'_{x_i}$ 表示 B_i 对 x_i 的偏导数。方程式（11-3-4）中 M_1 和 M_2 在壁面上的值为

$$M_1|_w=(B_i)'_{x_1}, \qquad M_2|_w=(B_i)'_{x_2}$$

设

$$\text{grad}\, p\cdot\vec{n}=0$$

则可得

$$\left\{1+\left[\frac{(B_i)'_{x_1}}{H}\right]^2+\left[\frac{(B_i)'_{x_2}}{R}\right]^2\right\}N\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$=\frac{(B_i)'_{x_1}}{H^2}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{(B_i)'_{x_2}}{R^2}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{11-3-6}$$

式（11-3-6）的差分逼近式可这样给出：对 x 和 y 方向的导数取中心差分，对 z 方向的导数取简单的二点单边差分，则可得

$$p_{i,j,1}=p_{i,j,2}-\frac{\Delta z}{N_{i,j,1}}\left\{\frac{1}{\Delta x}\frac{(B_i)'_{x_1}}{H^2}\delta_x^0 p\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\Delta y}\frac{(B_i)'_{x_2}}{R^2}\delta_y^0 p\right\}/E \tag{11-3-7}$$

$$E=\left\{1+\left[\frac{(B_i)'_{x_1}}{H}\right]^2+\left[\frac{(B_i)'_{x_2}}{R}\right]^2\right\}$$

在式（11-3-7）中，$p_{i,j,2}$ 是新的时间层内已知的内点压力值，$\delta_x^0 p$ 和 $\delta_y^0 p$ 则取上一时间层的物面值，从而可以近似地求出在新时间层内物面上的压力值 $p_{i,j,1}$。

五、激波边界条件

这里采用激波装配方法处理头激波（或称外激波），而流场内的激波采用激波捕捉法计算。在头激波上的边界条件采用了两种不同的处理方法，一种是类似于第八章中对二维钝头体绕流问题的处理方法；另一种是在激波点上建立局部正交坐标系，对特征方程和激波关系式进行联立求解，给出激波上的流动参数。这里仅介绍第一种简单处理方法。

假设在头激波处粘性影响可忽略不计，则在激波上可建立激

波前后关系式为

质量守恒：

$$\rho_s(V_n-\dot{Z})_s=(V_n-\dot{Z})_\infty \qquad (11\text{-}3\text{-}8\text{a})$$

动量守恒：

$$p_s+\rho_s(V_n-Z)_s^2=p_\infty+(V_n-Z)_\infty^2 \qquad (11\text{-}3\text{-}8\text{b})$$

能量守恒：

$$\left[\frac{p}{\rho}+C_vT\right]_s+\frac{1}{2}(V_n-Z)_s^2=\left[\frac{p}{\rho}+C_vT\right]_\infty+\frac{1}{2}(V_n-Z)_\infty^2 \qquad (11\text{-}3\text{-}8\text{c})$$

关系式（11-3-8）中下标S表示波后参数值，下标∞表示波前来流参数值，V_n为垂直于激波面的外法向上的速度分量，Z为激波沿其法向的移动速度。由式（11-3-8）可推导出以下关系式

$$\rho_s=\frac{(\gamma+1)p_s+(\gamma-1)p_\infty}{(\gamma-1)p_s+(\gamma+1)p_\infty} \qquad (11\text{-}3\text{-}9)$$

$$Z=V_{n\infty}+\left[\frac{\gamma+1}{2}(p_s-p_\infty)+\frac{1}{Ma_\infty^2}\right]^{1/2} \qquad (11\text{-}3\text{-}10)$$

$$V_{ns}=V_{n\infty}+\left[\left(1-\frac{\rho_\infty}{\rho_s}\right)(p_s-p_\infty)\right]^{1/2} \qquad (11\text{-}3\text{-}11)$$

在这里所选取的无量纲定义下有

$$\rho_\infty=1, \qquad p_\infty=\frac{1}{\gamma Ma_\infty^2}$$

来流速度的各个分量在有攻角情况下为

$$\begin{cases} u_\infty=\cos\alpha\sin\theta-\sin\alpha\cos\theta\cos\varphi \\ v_\infty=\sin\alpha\sin\varphi \\ w_\infty=-\cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta\cos\varphi \end{cases} \qquad (11\text{-}3\text{-}12)$$

而

$$V_{n\infty}=u_\infty n_1+v_\infty n_2+w_\infty n_3 \qquad (11\text{-}3\text{-}13)$$

这里α为攻角。给定激波曲面$B_s(\tau, x_1, x_2, x_3)$后，则可求出激波的法向向量为

$$\begin{cases} \vec{n}=\{n_1,\ n_2,\ n_3\}=\left\{-\dfrac{(B_e)'_s}{H},\ -\dfrac{(B_e)'_\varphi}{R},\ 1\right\}\Big/K \\ K=\left\{1+\left[\dfrac{(B_e)'_s}{H}\right]^2+\left[\dfrac{(B_e)'_\varphi}{R}\right]^2\right\}^{1/2} \end{cases} \tag{11-3-14}$$

式中的 $s=x_1$, $\varphi=x_2$。

确定激波边界上的参数具体作法如下。首先利用显式差分方程和Z坐标方向上的单边差分求出激波后的压力值（即利用内点值求出激波上的压力值）p_s，然后利用式（11-3-10)求出激波速度Z，由此可得

$$\frac{\partial B_e}{\partial t}=\left[1+\left(-\frac{(B_e)'_s}{H}\right)^2+\left(\frac{(B_e)'_\varphi}{R}\right)^2\right]^{1/2} Z \tag{11-3-15}$$

最后可得新的激波位置为

$$B_e^{n+1}=B_e^n+\Delta t\frac{\partial B_e}{\partial t} \tag{11-3-16}$$

求得$n+1$层的激波位置后，再利用式（11-3-14)求出$n+1$时间层的激波法向向量，从而可由激波前后关系式求出$n+1$时间层上激波面处的流动参数。为了方便写出以下激波前后关系式的形式（类似于第八章中所给出的二维情况）

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_s}=\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}+\dfrac{2}{\gamma+1}\dfrac{1}{Ma_\infty^2(V_{\infty n}-Z)^2} \\ p_s=\dfrac{1}{\gamma Ma_\infty^2}+\left(1-\dfrac{1}{\rho_s}\right)(V_{\infty n}-Z)^2 \\ u_s=u_\infty-\left(1-\dfrac{1}{\rho_s}\right)n_1(V_{\infty n}-Z) \\ v_s=v_\infty-\left(1-\dfrac{1}{\rho_s}\right)n_2(V_{\infty n}-Z) \\ w_s=w_\infty-\left(1-\dfrac{1}{\rho_s}\right)n_3(V_{\infty n}-Z) \end{cases} \tag{11-3-17}$$

第四节　钝锥大攻角背风面分离的数值模拟[3]

三维分离流动是流体运动中的基本物理现象，它存在于很多实际流动中，在超声速高超声速宇航飞行器的粘性绕流流场中，很多情况下三维分离流动是确定飞行器气动性能的关键。细长体大攻角背风面分离流是三维分离流的一个典型例子。对这一典型流动人们已进行了大量研究工作，但对其机理的清楚认识还有待于进一步的研究。

采用数值计算方法求解粘性流方程，数值模拟这一物理问题是研究该问题的重要手段。为了能正确模拟这一复杂的流动现象，要求所选用的方法有足够的精确度，有正确的边界条件处理，并能正确模拟复杂流场中的各种物理特性。此外，还要求计算方法有较好的稳定性和收敛性，且有较高的求解效率，计算过程简单，花费较少的计算机时能得到正确的流场结果。

这里采用本章中介绍的数值计算方法，求解粘性流方程(11-1-5)，数值模拟了钝锥大攻角背风面分离流动。数值实验表明，该方法的精度、稳定性和收敛性等方面基本上是令人满意的。

所选用的计算条件为：钝锥半顶角$\theta_c=4.7°$，来流马赫数$Ma_\infty=10$，雷诺数（取球头半径R_0为特征长度，$R_0=1$）$Re=$

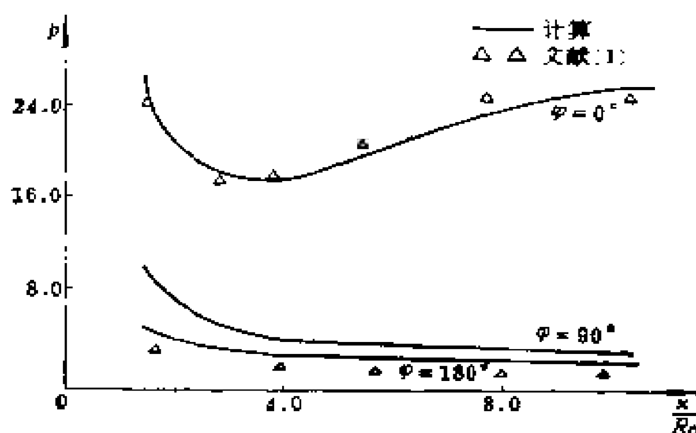


图11-2　物面压力分布

2.014×10^5，攻角 $\alpha=20°$，钝锥全长 $s_L=10$。在图 11-2 中给出了 $\varphi=0°$，90°，180° 三个子午面上的物面压力分布的计算结果。为了比较，在图中还给出了文献〔1〕中同一问题的结果，可以看出，二者是相附的（所选用的网格点为 41×41×41）。

在图 11-3 和图 11-4 中，给出了五个 $x=$ const. 的截面处周向物面摩阻分布的计算结果。

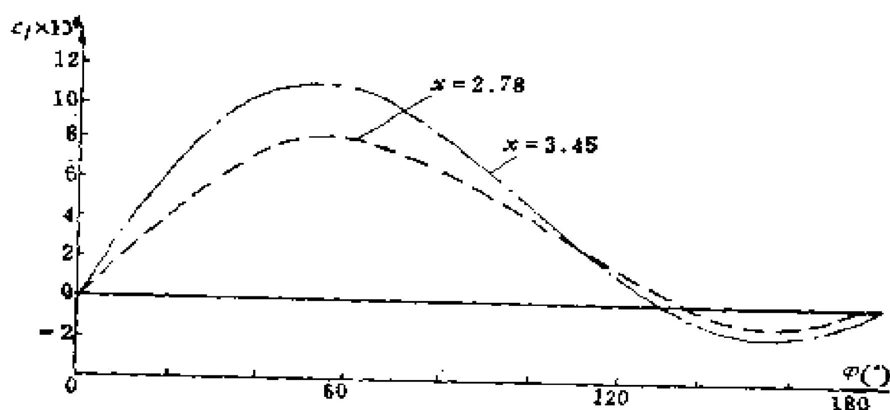


图11-3　周向物面摩阻分布（a）

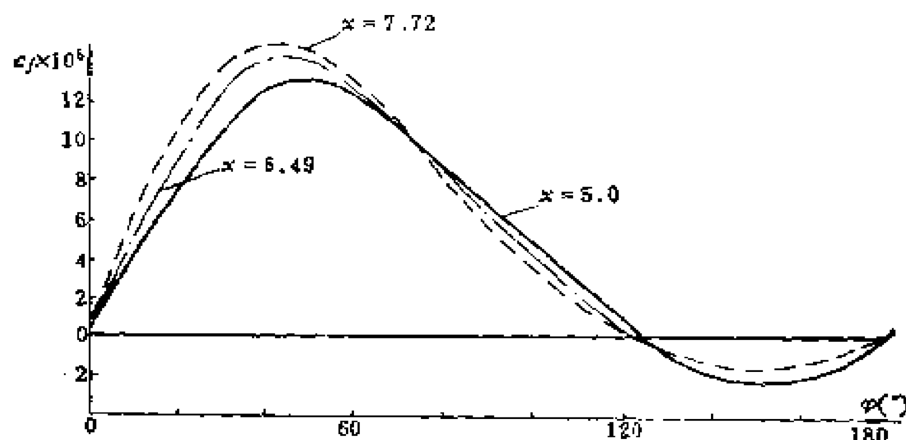


图11-4　周向物面摩阻分布（b）

这里可以看到，背风面分离处，物面周向摩阻为负，且在离开钝头区较远处（$x>5$），横流"分离点"（即周向摩阻系数为零的点），基本上在一射线上。在图 11-5 至图 11-10 中给出了各

x 位置上横截面内的速度向量分布。在图 12-5 中给出了 $x=0.546$ 处的计算结果。这里可以看出，离开钝头较近的横截面上并没有出现背风面分离（这一点从图 11-11和图11-12中给出的极限流线也可以看到）。直到 $x\leqslant 3$ 都未见到背风面的分离流图象。这说明对于背风面分离流动，钝头是有抑制作用的（这一点与尖头体大攻角绕流流场的比较就更清楚了）。在图 11-6 中给出了 $x=4.473$ 处的计算结果。这里可以清楚地看到物体背风面的分离流动图象。在图11-7中给出了 $x=7.11$处的流场计算结果。图 11-8 中给出了与图 11-7 同一流场中的局部放大图。将这一结果与图 11-6 相比较，可以看到背风面分离涡扩大且加强了。在物面附近形成了一快速流，且有形成反向

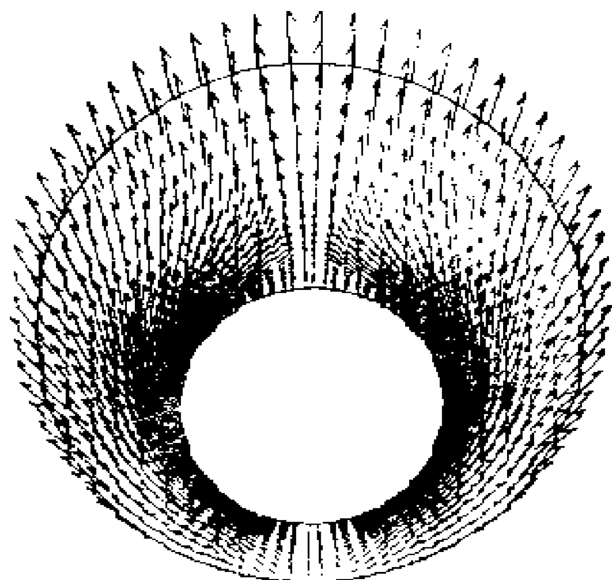


图11-5　横截面速度向量分布（$x=0.546$）

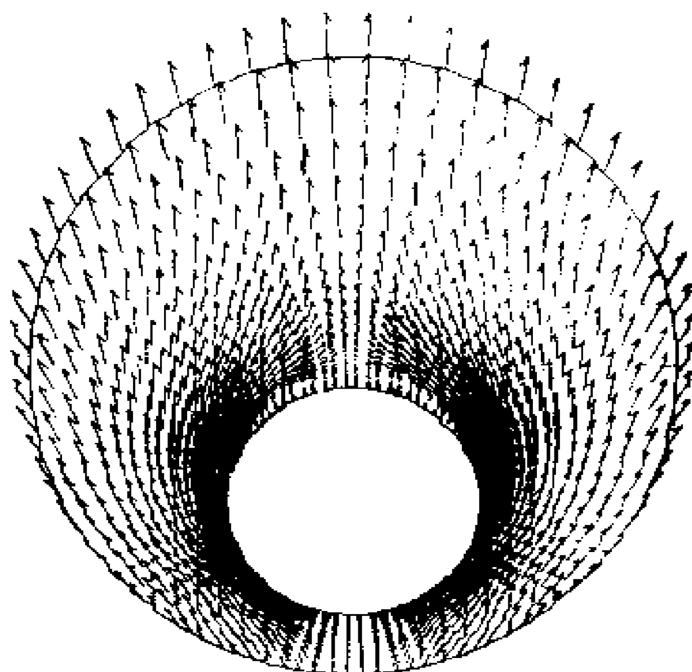


图11-6　横截面速度向量分布（$x=4.473$）

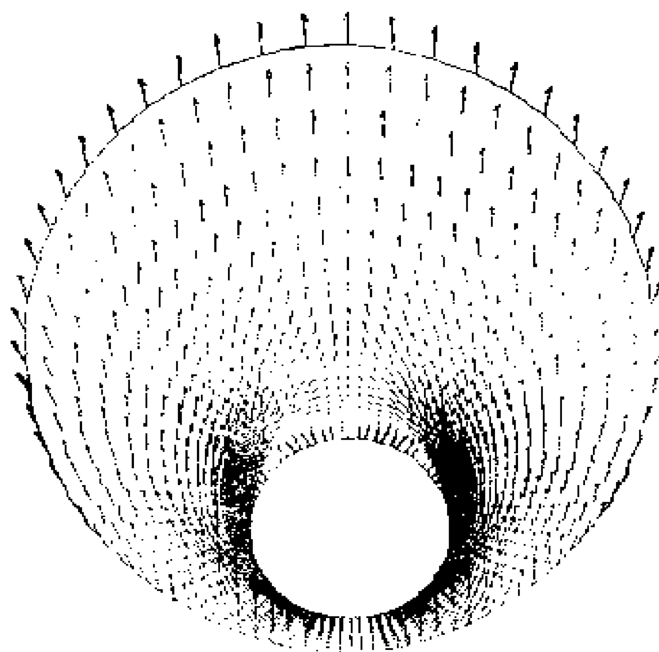


图11-7 横截面速度向量分布（$x=7.11$）

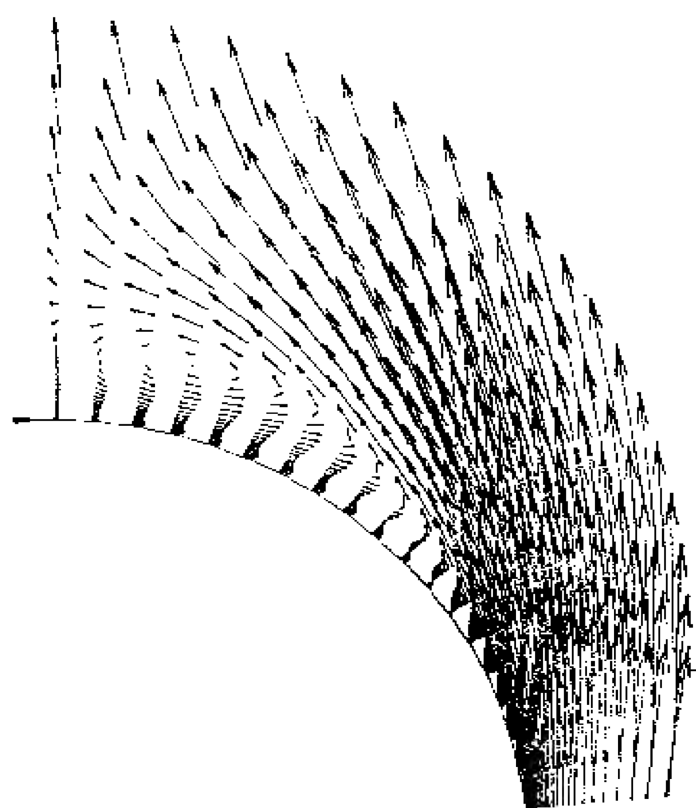


图11-8 横截面速度向量分布

（$x=7.11$的局部放大图）

二次涡的趋向，但还未明确形成。

在图 11-9 中给出了 $x=8.9$ 处的计算结果，在图 11-10 中给出了同一位置处的局部放大图。这里的分离图象与 $x=7.11$ 处的类似，在背风面 $\varphi=180^{\circ}$ 的对称线上可清楚看到后驻点位置。

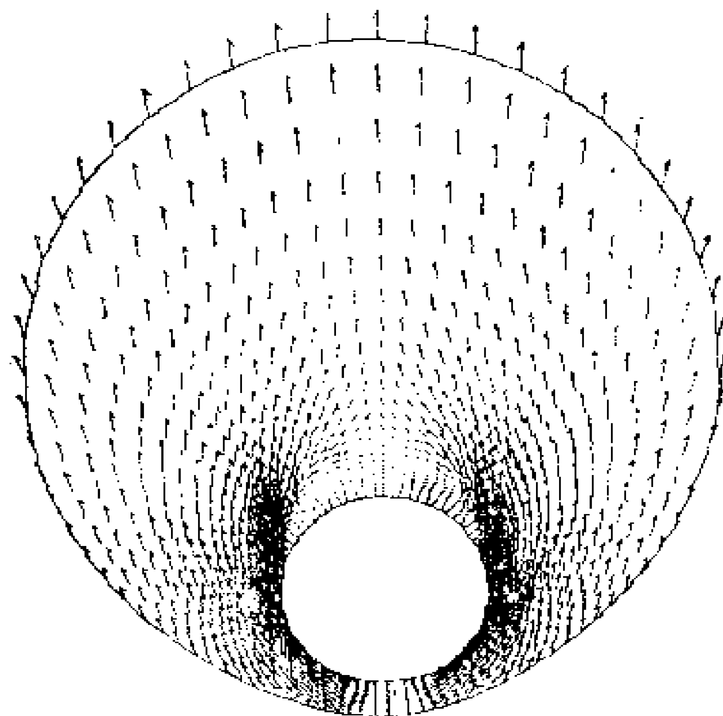


图11-9　横截面速度向量分布（$x=8.9$）

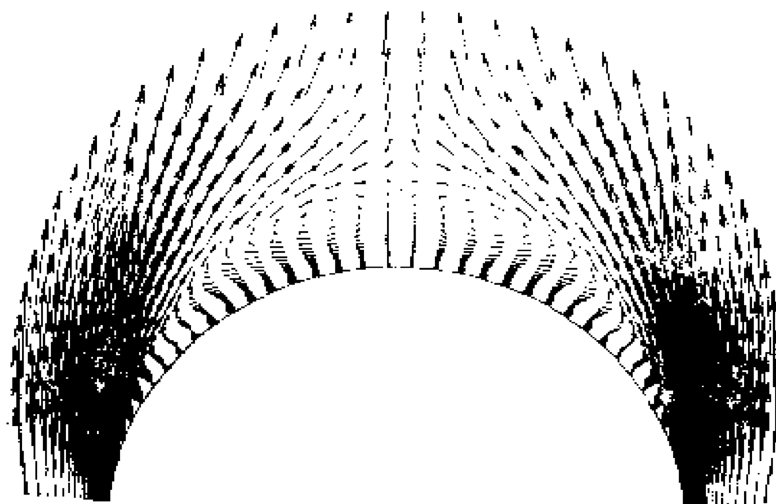


图11-10　横截面速度向量分布

（$x=8.9$的局部放大图）

在图 11-11 中，给出了 $\varphi=135^\circ$ 处的侧视极限流线图，在图 11-12 中，给出了 $\varphi=180^\circ$ 处仰视的极限流线图。

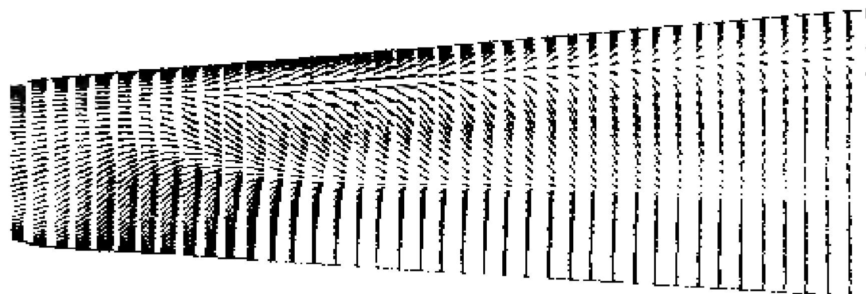


图11-11　物面极限流线（1）

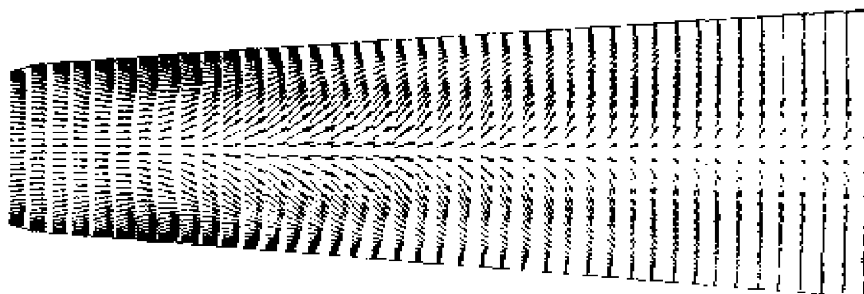


图11-12　物面极限流线（2）

从这里可以看到，在背风面锥面上的分离线是物面极限流线的渐近线，或称为“收拢”线，而再附线则是极限流线的“分开”线。

以上结果表明，采用本章给出的计算方法，模拟高超声速钝锥大攻角背风面分离流动的复杂流场是成功的。

第五节　航天飞机三维粘性绕流的数值模拟

航天飞机的三维超声速高超声速粘性绕流流场是相当复杂的。在中等雷诺数情况下，粘性干扰对该流场的特性起主导作用对该流场特性的研究、数值模拟方法是重要的研究手段。

这里为了进一步验证本章所提出的三维粘性流动的计算方法

所具有的数值模拟能力，给出了两组航天飞机简化外形高超声速三维粘性绕流流场的计算结果。虽然这些结果还只是初步的，但它表明采用本书作者提出的计算方法对航天飞机三维粘性绕流流场的数值模拟是成功的。

例 1 所选用的计算外形为文献〔2〕中给出的带有座舱盖的航天飞机外形，参见图 11-13。计算条件：来流马赫数 $Ma_\infty=7.4$，攻角 $\alpha=15.3°$，雷诺数 $Re=10^5$。图中给出了翼前机身段的三维粘性绕流的计算结果。在图 11-14 中给出了 $\varphi=0°$ 和180°两个子

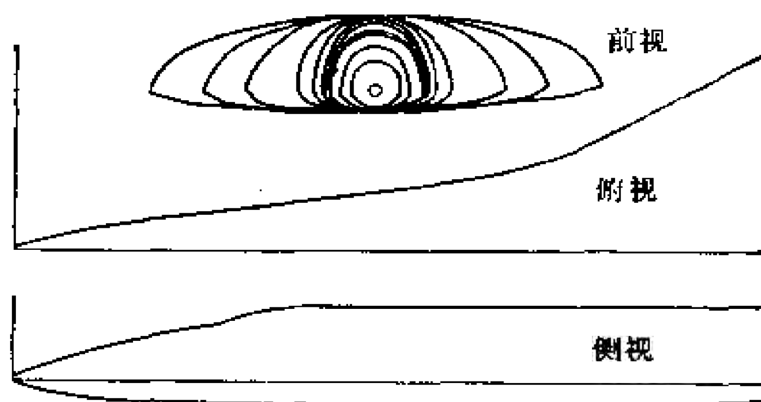


图11-13 航天飞机外形（1）

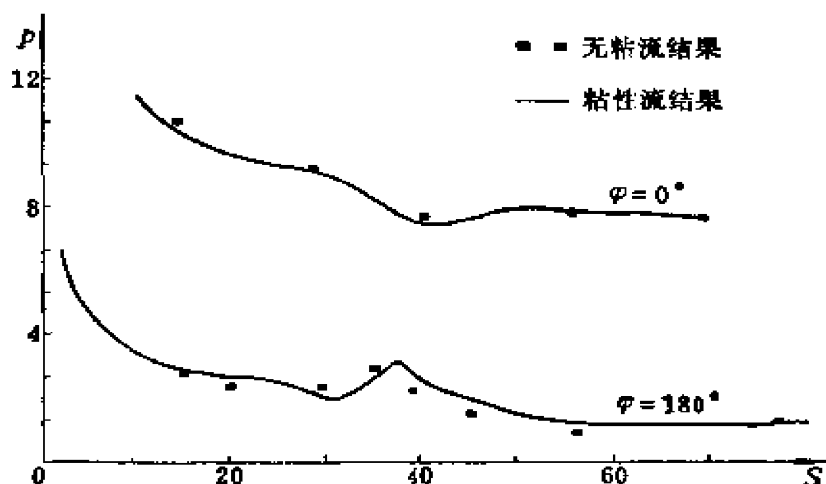


图11-14 物面压力分布

午面上的物面压力分布。为了比较在图中还给出了对应的无粘流结果[2]，可以看出两者相符。

例 2 在这一算例中，采用同一计算方法，求解三维可压缩粘性流方程，给出了航天飞机简化外形的全机三维粘性绕流流场的计算结果，计算条件为$Ma_\infty=7$，$\alpha=5^\circ$，$Re=148000$。在图 11-15 中给出了航天飞机的外形。在图 11-16 至图 11-18 中，对应给出了$\varphi=0^\circ$，90°，180°三个子午面上的物面压力分布。

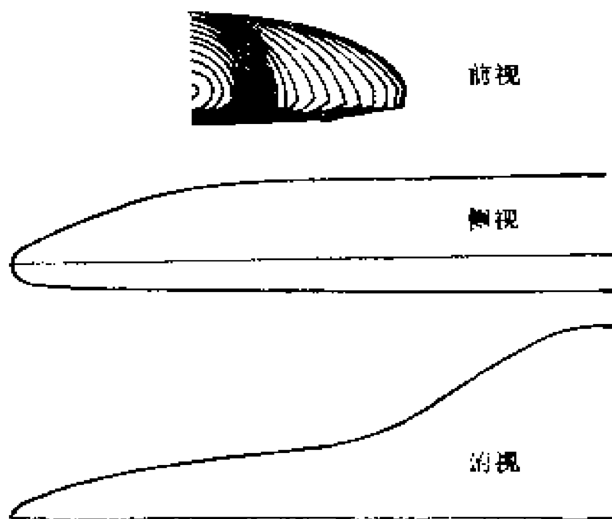


图11-15 航天飞机外形（2）

为了比较，在图中还给出了无粘绕流在同一条件下的计算结果，可以看出除$\varphi=90^\circ$子午面上侧翼附近外，二者都

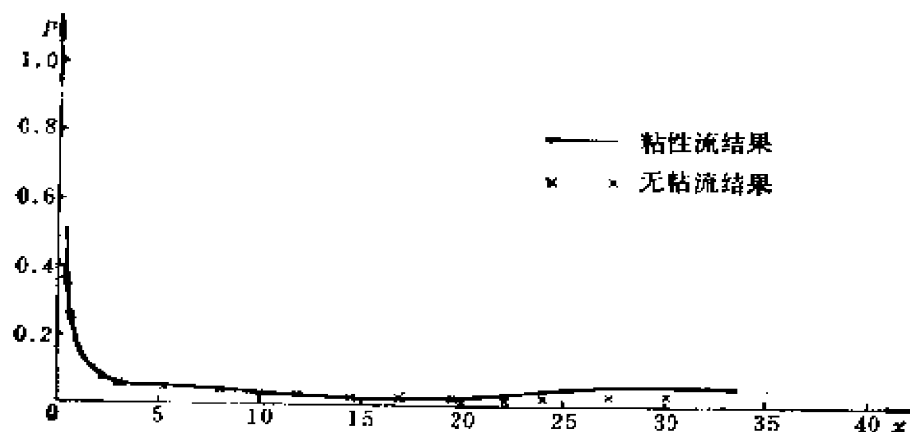


图11-16 $\varphi=0^\circ$的物面压力分布

符合得很好。从计算结果可以看出，侧翼附近物面压力值很高，这是因为这里存在有流场悬挂激波与头激波相交，从而产生激波

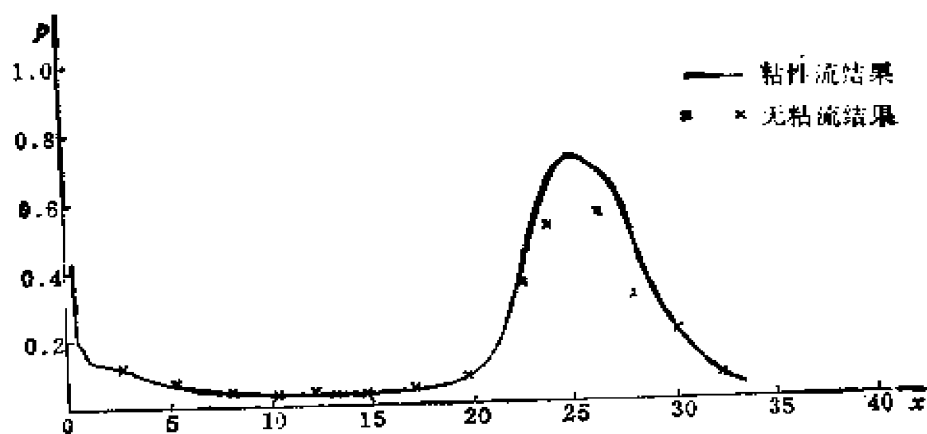


图11-17　$\varphi=90°$的物面压力分布

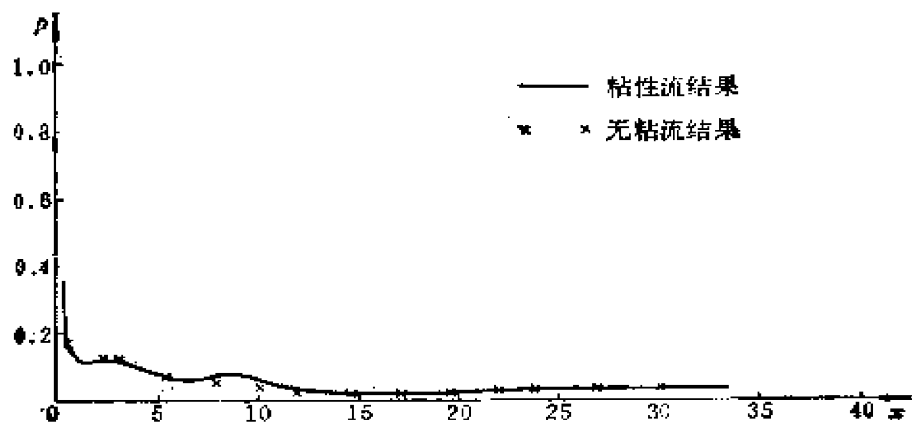


图11-18　$\varphi=180°$的物面压力分布

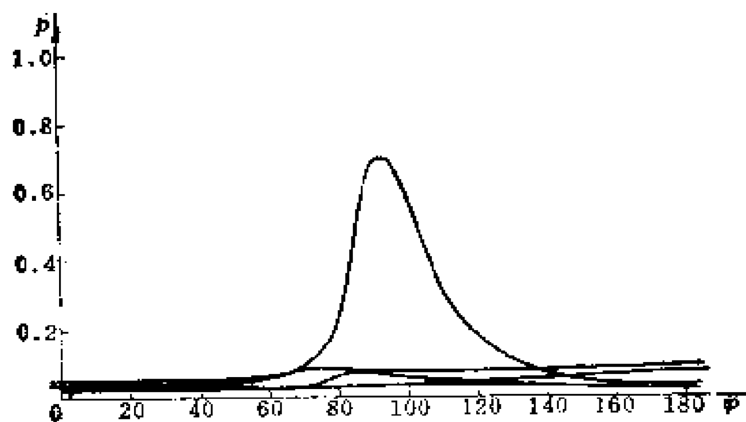


图11-19　周向物面压力分布

反射、切向间断和激波粘性流干扰等复杂物理过程，该物理图像在后面的激波形状和流场计算结果中可以看到。图 11-19 中给出了物面周向压力分布。图中曲线给出了 $x=5$，10，15、20，25 的周向压力分布。图 11-20 中给出了激波形状和网格生成图（$\varphi=90°$）。

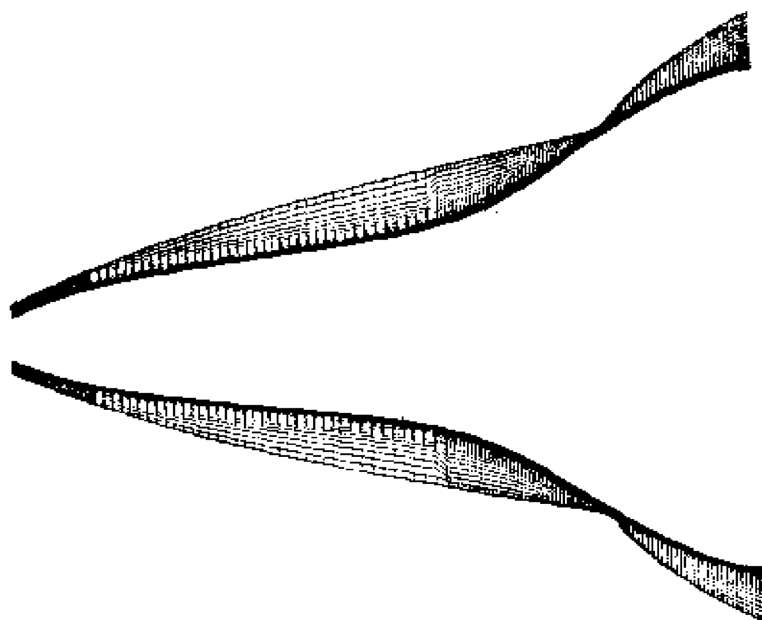


图11-20　激波形状和网格生成图（$\varphi=90°$）

为了给出侧翼附近较仔细的流动图象且增加计算精度，计算中在 $x=19.4\sim27.6$ 区域内采用了双重网格。这里清楚地看到，由于侧翼的存在而导致的流场悬挂激波与头激波相交所产生的反射激波和外激波的改变。图 11-21 给出了侧翼附近周向激波形状和网格生成图。为了正确模拟侧翼附近流场，计算中周向采用了非均匀网格，使得在侧翼附近周向也有加密网格。

图 11-22 给出了侧翼附近横截面内流场压力等值线，图11-23给出了横截面内的流场速度向量分布。从流场计算结果可以看出，流场悬挂激波是一个三维斜激波面，它与头激波在侧翼附近的子午面内相交，且形成三维反射激波和三维剪切面。在横截面内速度向量分布的计算结果中，可以看到横向剪切流的形成。以上计

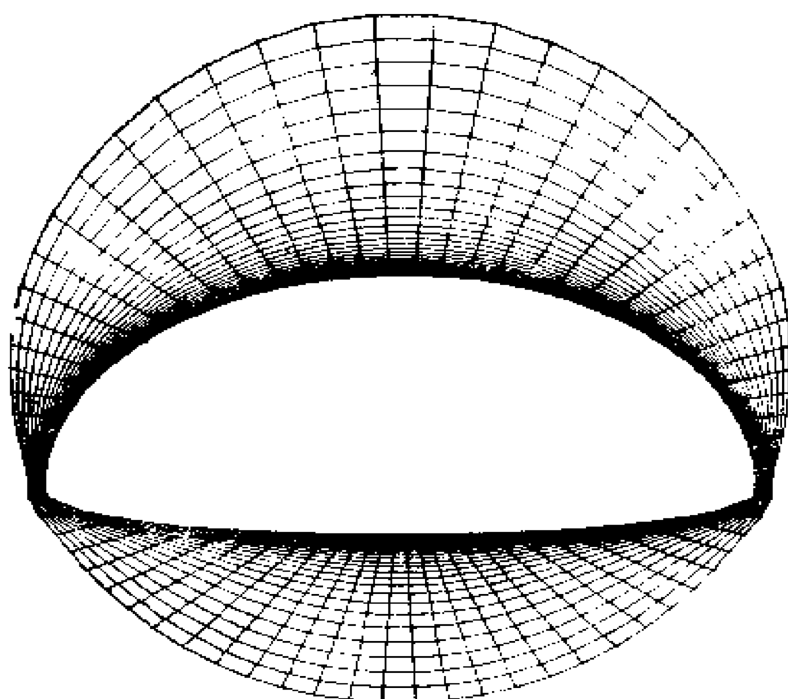


图11-21　周向激波形状和网格生成图（$x=25.8$）

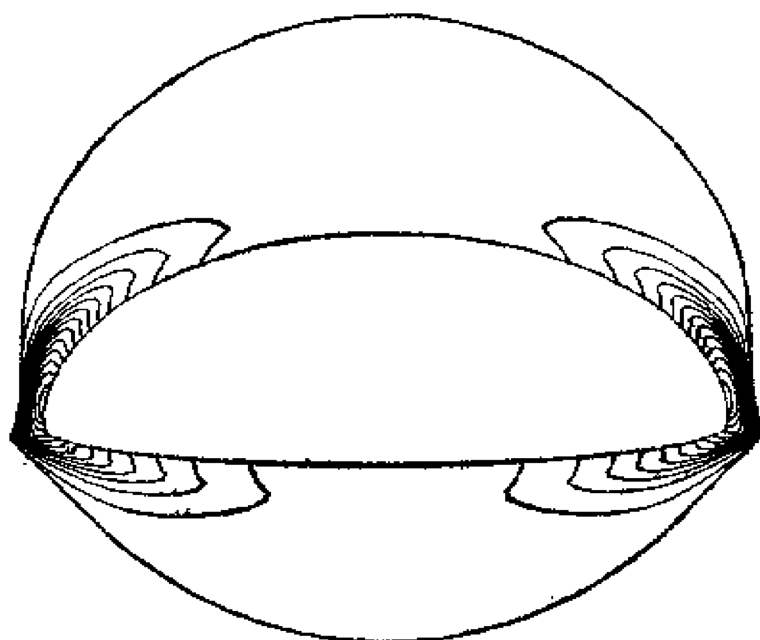


图11-22　横截面内压力等值线（$x=26.7$）

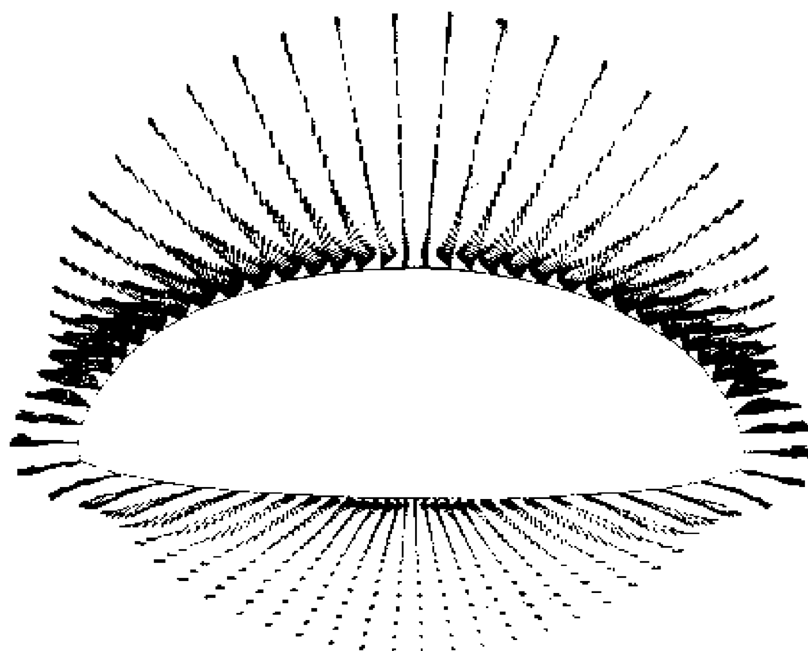


图12-23　横截面内流场速度向量分布（$x=26.7$）

算结果清楚描述了航天飞机侧翼附近的复杂流场结构。

这里给出的计算结果表明，采用本章给出的计算方法，数值模拟航天飞机（简化外形）高超声速三维粘性绕流的复杂流场是成功的。

第六节　平板—楔三维粘性绕流的数值计算

在这一节中将介绍一个三维激波与边界层相互干扰问题的算例。所计算物理问题如图 11-24 所示。有一楔直立于平板之上，有一均匀超声速流绕过楔面产生一垂直于底平面的激波。这一激波将与底面附近的边界层相互干扰。文中采用经简化了的三维 N－S 方程来计算这一问题。对简化了的 N－S 方程是采用第四章介绍的错点格式进行差分逼近的。为了加快收敛速度，采用了第

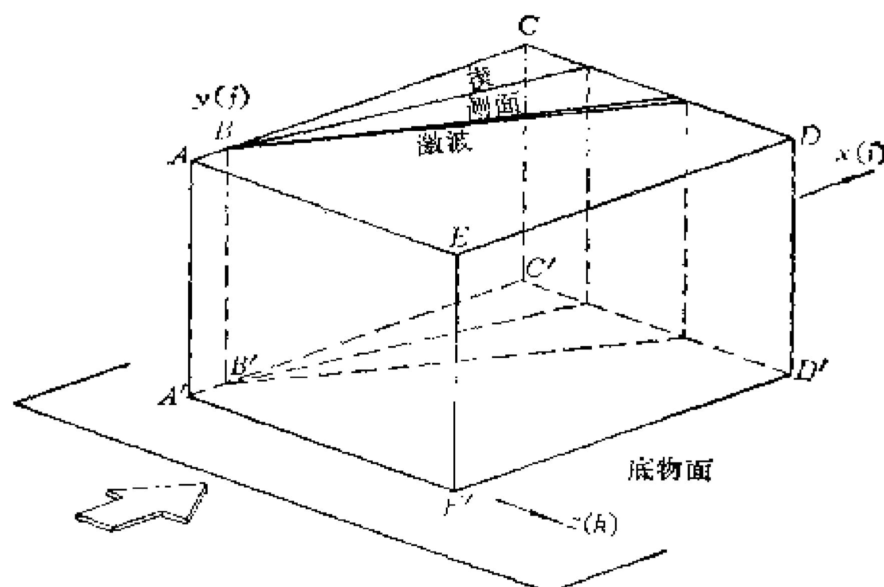


图11-24　激波边界层相互干扰问题示意图

七章所介绍的算子放大型修正方法。有关这一问题的计算可参阅文献〔4，5〕。

一、微分方程与坐标变换

计算中的坐标系是这样选取的，取均匀来流的方向为 x 方向，y 方向为垂直于底平面的方向，展向为 z。计算中对N-S方程进行了简化，在粘性项中保留了各纯二阶导数项，丢掉粘性项中的所有含 v 项（垂直于底物面方向的速度分量），同时也丢掉了粘性项中与 x 有关的交叉导数项。这种简化处理的结果既简化了求解工作量，又可适当照顾到下游对上游的影响。

对方程以来流有关量进行了无量纲化，简化了的N-S方程的向量形式为

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}+\frac{\partial \vec{f}_1}{\partial x}+\frac{\partial \vec{f}_2}{\partial y}+\frac{\partial \vec{f}_3}{\partial z}=\vec{V}_t, \qquad (11\text{-}6\text{-}1)$$

$$\vec{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ E\end{pmatrix}\quad \vec{f}_1=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ \rho uw\\ u(E+p)\end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_2=\begin{vmatrix}\rho v\\ \rho uv\\ \rho v^2+p\\ \rho vw\\ v(E+p)\end{vmatrix}\quad \vec{f}_3=\begin{vmatrix}\rho w\\ \rho uw\\ \rho vw\\ \rho w^2+p\\ w(E+p)\end{vmatrix}$$

$$Vis_1=0$$

$$Vis_2=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\mu\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$Vis_3=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\mu\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$Vis_4=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial z}\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\begin{aligned}Vis_5=\frac{1}{\mathrm{Re}}\Bigg[&\frac{C_p}{P_r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\mu\frac{\partial T}{\partial z}\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{4}{3}u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial y}\mu\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial z}\mu\left(u\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{4}{3}w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

$$p=\frac{1}{rMa_\infty^2}\rho T,\quad E=\rho\left(C_vT+\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)\qquad(11\text{-}6\text{-}2)$$

$$C_v=\frac{1}{r(r-1)Ma_\infty^2},\quad C^2=\frac{T}{Ma_\infty^2}\qquad(11\text{-}6\text{-}3)$$

式中 ρ 为密度，T 为温度，p 为压力，u、v、w 分别为对应于 x、y、z 方向上的速度分量。为了使在近底物面的边界层内有一定的网格点数，在 y 方向上进行了坐标变换。具体的坐标变

换为

$$\tau = t\,,\quad \xi = x\,,\quad \eta = \frac{\ln(1+by)}{\ln(1+b)},\quad \zeta = z \qquad (11\text{-}6\text{-}4)$$

式中 b 为加密因子。经坐标变换后的方程为

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\vec{U} + \frac{\partial}{\partial \xi}\vec{f}_1 + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}\vec{f}_2 + \frac{\partial}{\partial \zeta}\vec{f}_3$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \xi}\vec{g}_1 + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta}\vec{g}_2 + \frac{\partial}{\partial \zeta}\vec{g}_3 = \overrightarrow{Vis} \qquad (11\text{-}6\text{-}5)$$

$$\vec{f}_1 = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E+p) \end{vmatrix} \qquad \vec{g}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{f}_2 = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ \rho vw \\ v(E+p) \end{vmatrix} \qquad \vec{g}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{f}_3 = \begin{vmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 \\ w(E+p) \end{vmatrix} \qquad \vec{g}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$Vis_1 = 0$$

$$Vis_2 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\ \frac{\partial}{\partial \xi}\mu\frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y\frac{\partial}{\partial \eta}\mu\eta_y\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\mu\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$

$$Vis_3 = \frac{\eta_y}{\mathrm{Re}}\left(\frac{4}{3}\ \frac{\partial}{\partial \eta}\mu\eta_y\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\mu\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{2}{3}\ \frac{\partial}{\partial \eta}\mu\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)$$

$$Vis_4 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\mu\frac{\partial w}{\partial\xi} + \eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\mu\eta_y\frac{\partial w}{\partial\eta} + \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial\zeta}\mu\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)$$

$$Vis_5 = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{C_p}{p_r}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\mu\frac{\partial T}{\partial\xi} + \eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\mu\eta_y\frac{\partial T}{\partial\eta} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\mu\frac{\partial T}{\partial\zeta}\right)\right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\xi}\mu\left(\frac{4}{3}u\frac{\partial u}{\partial\xi} + w\frac{\partial w}{\partial\xi}\right) + \eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\mu\eta_y\left(u\frac{\partial u}{\partial\eta}\right.$$

$$\left.\left.+ w\frac{\partial w}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\mu\left(u\frac{\partial u}{\partial\zeta} + \frac{4}{3}w\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)\right]$$

$$\eta_y = \frac{b}{\ln(1+b)}\exp[-\eta\ln(1+b)]$$

经坐标变换后的方程（11-6-5）中将无粘项中的压力梯度分离开来，这是为了差分逼近的需要。关于这一点，在本章的第二段中会看得更为清楚。

二、微分方程的差分逼近

（一）模型方程的差分逼近

为了清楚起见，先通过模型方程将差分逼近方法做一简单介绍。设有模型方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad (11\text{-}6\text{-}6)$$

这里 u，Re 为常数。对方程（11-6-6）的差分逼近式为

$$f_j^{n+1} = f_j^n + H\left[\frac{\delta_x^2 f_j^n}{\mathrm{Re}\Delta x} - \frac{1-\alpha_{j+\frac{1}{2}}^n}{2}u\delta_x^+ f_j^n\right.$$

$$\left. - \frac{1+\alpha_{j-\frac{1}{2}}^n}{2}\delta_x^- f_j^{n+1} - \frac{\delta_x^+ g_j^n}{2} - \frac{\delta_x^- g_j^{n+1}}{2}\right] \qquad (11\text{-}6\text{-}7)$$

这里

$$H = \frac{t}{1+\lambda t}, \quad t > 0 \tag{11-6-8}$$

$$\lambda = \max\left\{ |u|, \quad \frac{2}{Re\Delta x} \right\} \tag{11-6-9}$$

$$\alpha_{j+\frac{1}{2}} = \left(\frac{|\delta_x^+ f_j|}{\max\limits_j |\delta_x^+ f_j|} \right)^\sigma \cdot \mathrm{sign}(u), \quad \sigma \geqslant 0 \tag{11-6-10}$$

差分方程（11-6-7）是以第四章中的错点格式为基础的。错点格式是无条件稳定的，但它是一个色散型的格式。参变量 $\alpha_{j+(1/2)}$ 的引入是为了在差分方程中引入耗散项，以利于压制数值解中的非物理振荡。不难看出，在光滑区（11-6-7）的定常解将有二阶逼近精度，而在激波附近将以迎风差分占主导地位。

在第四章曾指出，错点格式 f_j^{n+1} 的系数有可能为零，放大型修正因子（或称调节因子）的引入将有助于克服这一不足。

由于放大型修正因子的引入使得差分方程不再逼近于原微分方程，而是逼近于

$$\frac{\partial f}{\partial t} = H\left(\frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - u \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial x} \right) \tag{11-6-11}$$

且截断误差为 $O(\Delta t^2, \Delta x^2, \alpha\Delta x, \Delta t/Re)$。方程（11-6-6）与（11-6-11）将有着共同的定常解。

（二）简化三维 N-S 方程的差分逼近

计算中采用的逼近于（11-6-5）的差分方程为

$$\vec{U}_{i,j,k}^{n+1} = \vec{U}_{i,j,k}^{n} + H_{i,j,k}^{n}\left\{ \Delta\xi(\vec{V}is)_{i,j,k}^{n} \right.$$

$$- \left[\frac{1-\alpha_{1,\, i+\frac{1}{2},\, j,\, k}}{2} \delta_x^- \vec{f}_{1,i,j,k}^{n+1} \right.$$

$$\left. + \frac{1+\alpha_{1,\, i-\frac{1}{2},\, j,\, k}}{2} \delta_x^+ \vec{f}_{1,i,j,k}^{n} \right]$$

$$-k_1\left[-\frac{1-\alpha_{2,i,j+\frac{1}{2},k}}{2}\delta_y^-\vec{f}_{2,i,j,k}^{\,n+1}+\frac{1+\alpha_{2,i,j-\frac{1}{2},k}}{2}\delta_y^+\vec{f}_{2,i,j,k}^{\,n}\right]$$

$$-k_2\left[\frac{1-\alpha_{3,i,j,k+\frac{1}{2}}}{2}\delta_z^-\vec{f}_{3,i,j,k}^{\,n+1}+\frac{1+\alpha_{3,i,j,k-\frac{1}{2}}}{2}\delta_z^+\vec{f}_{3,i,j,k}^{\,n}\right]$$

$$-\frac{\delta_x^+\vec{g}_{1,i,j,k}^{\,n}+\delta_x^-\vec{g}_{1,i,j,k}^{\,n+1}}{2}-k_1\frac{\delta_y^+\vec{g}_{2,i,j,k}^{\,n}+\delta_y^-\vec{g}_{2,i,j,k}^{\,n+1}}{2}$$

$$-k_2\frac{\delta_z^+\vec{g}_{3,i,j,k}^{\,n}+\delta_z^-\vec{g}_{3,i,j,k}^{\,n+1}}{2} \qquad (11\text{-}6\text{-}12)$$

式中参数α随坐标方向不同而不同，如沿x方向

$$\alpha_{1,i+\frac{1}{2},j,k}=\left[\frac{|\rho_{i+1,j,k}-\rho_{i,j,k}|}{\max\limits_{i,j,k}|\rho_{i+1,j,k}-\rho_{i,j,k}|}\right]^{\sigma},\quad \sigma>0$$

(11-6-13)

放大型修正因子H如（11-6-8）所定义，且

$$\lambda=\max\{\lambda_1,\ \lambda_2\}$$

$$\lambda_1=|u|+k_1|v|+k_2|w|+c\sqrt{1+k_1^2+k_2^2}$$

$$\lambda_2=2\,[1+k_1^2+k_2^2]\cdot\frac{\gamma\mu}{\rho Pr\mathrm{Re}\Delta\xi}$$

$$k_1=\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}\eta_y,\quad k_2=\frac{\Delta\xi}{\Delta\zeta}$$

式中的c为声速。对粘性项采用了普通中心差分，所得之结果方程可按i，j，k之增长方向进行求解。此时末知量只限在一个点

上，因而方程极易求解。

（三）边界条件处理与初始条件的给定

边界条件的给定可参照图 11-24 。

1. 在 $x = 0$ 的 $AEE'A'$ 面上：近底平面 $y = 0$ 处为布莱休斯（Blasius）型边界层解，其上为无粘均匀来流；

2. $y = 0$ 平面上：无滑移条件及常壁温；

3. 下游边界、边界 $EDD'E'$ 以及上表面 $ACDE$：采用外插处理；

4. 在产生激波的楔面上的无滑移条件由在对称平面 $z = 0$ 上的无粘条件所代替，即穿过 $ACC'A'$ 有一均匀流，它平行于产生激波的楔面。在 $z = 0$ 的对称面上的近物面 $y = 0$ 附近给出与无粘外流相应的边界层解。

关于初始条件是这样给定的：在无粘激波前的整个流场中取各流动参数等于在来流边界上的值，在激波后的整个流场中取各参量等于其在 $ACC'A'$ 上的值。

三、计算结果与分析

（一）计算参数

在所计算的流场中取来流马赫数为 $Ma_\infty = 2.94$。激波角为 $27.82°$，它对应于 $10°$ 的半楔角。波前与波后的压力比为 $p_2/p_1 = 2.02$。进行了两组计算，一组为 $Re_\delta = 687.5$（$Re_L = 10^4$，L 为计算流场的高度）；另一组为 $Re_\delta = 3000$（$Re_L = 3 \times 10^4$）。计算区域为一长方体。在第一组计算中取 $x/L = 1.2$，$y/L = 1.0$，$z/L = 1.0$。计算域中的网格点数为 $N(\xi) \times N(\eta) \times N(\zeta) = 25 \times 31 \times 31$，这使得在来流的附面层内大约有 10 个点左右。计算中调节因子中的 l 取为 2 。

（二）计算结果

图 11-25 至图 11-30 为利用第一组数据计算的结果，图 11-31 至图 11-33 为第二组数据计算的结果。在图 11-25 中给出了激波与边界层相互干扰对上游的影响域。它是根据压力上升情况

而确定的。除了靠近前缘的几个边界层厚度的区域外，上游的影响很快地趋向平行于激波。在图 11-26 中给出了边界层的厚度（以 $B-L$ 表示）。这一厚度在高压区变薄。在图 11-27 中给出了 $i=20$ 时在不同高度 $j=1$（物面），$j=15$（干扰区的边缘）和 $j=30$（无粘区）上压力随 k 的变化。图中可见压力平台。压力分布的三维图象在图 11-28 至图 11-30 中。$j=15$ 大约为1.5 个来流边界层

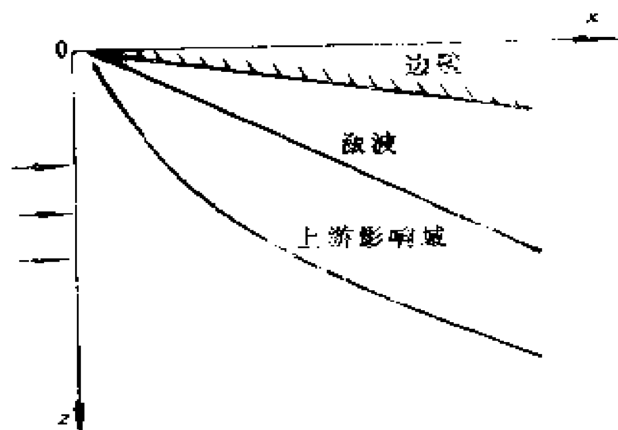


图11-25　干扰区影响域

高度。在计算结果中发生跳动现象，这是由于在来流边界以及 $z=0$ 之边界面上边界条件不适应以及各物理参量太大而引起的。这一跳动现象主要限制在假想的楔体之内。在半楔之外几乎无跳动产生，并流动平行于楔面。从这三个图中还可看到，在无粘区激波过度点较多，这是由于激波附近格式降为一阶精度而造成的。为提高激波附近数值解的分辨率，需采用第五、六章中所介绍的差分格式。

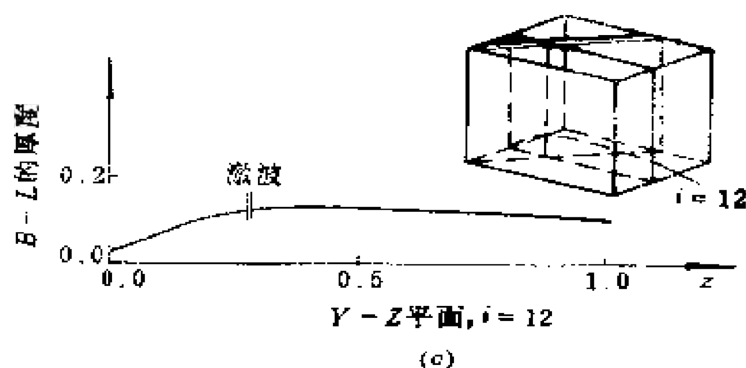


图11-26（a）　$B-L$ 的厚度（$Y-Z$ 平面）

计算中穿过激波的压力升是很大的。无论二维问题的实验结果还是计算结果，都表明在这样大的压力升情况下似乎应有分离

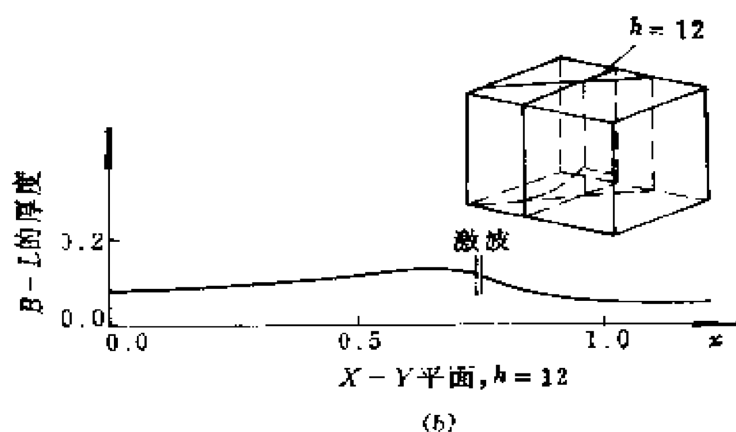


图11-26(b)　边界层厚度（x−y平面）

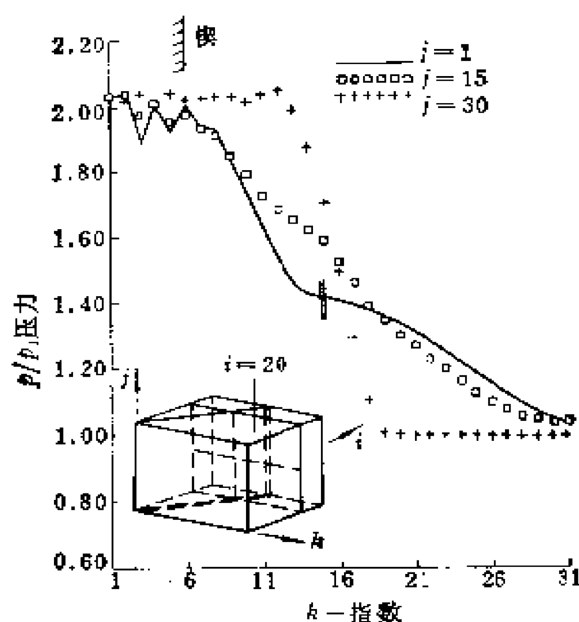


图11-27　在 $i=20$ 时不同高度上的压力分布

流动产生。然而在本计算中，在垂直于底面并平行于来流的截面上看不到分离流运动。在三维紊流实验中也发现类似情况。如果把流动图象投影在垂直于底面并和无粘激波面相垂直的截面上，则发现有分离流动产生。图11-31为 $i=20$ 时计算的分离流动

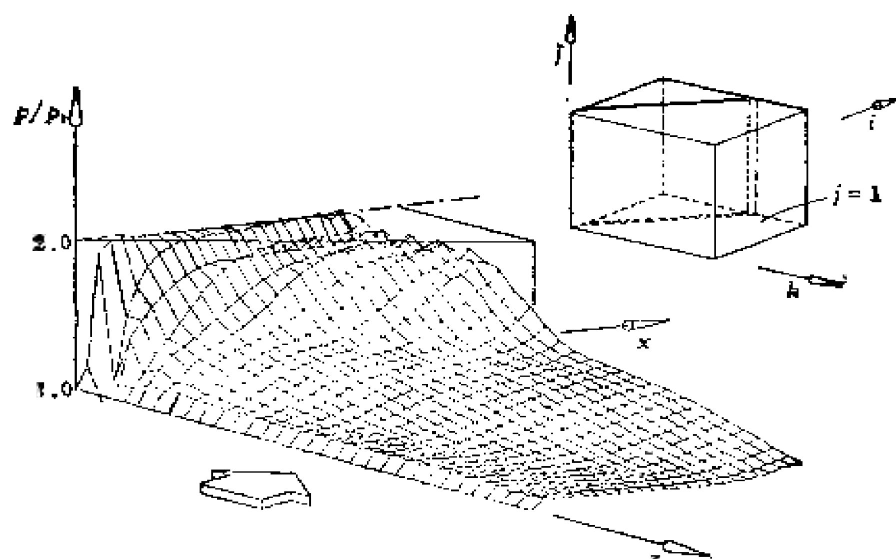


图11-28　j = 1 面上的压力分布

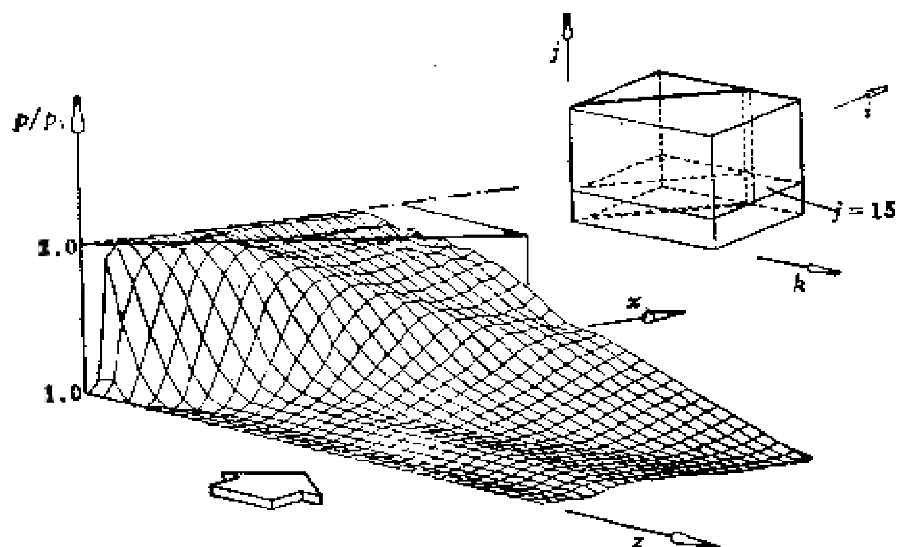


图11-29　j = 15面上的压力分布

图象，其中V为垂直于底平面的分速度，$U(N)$为垂直于激波面的分速度。在计算中还发现在干扰区内有一快速层，这一点可从图 11-32 和 11-33 中看到。图中$U(S)$为在激波平面上平行于底平面的速度分量。

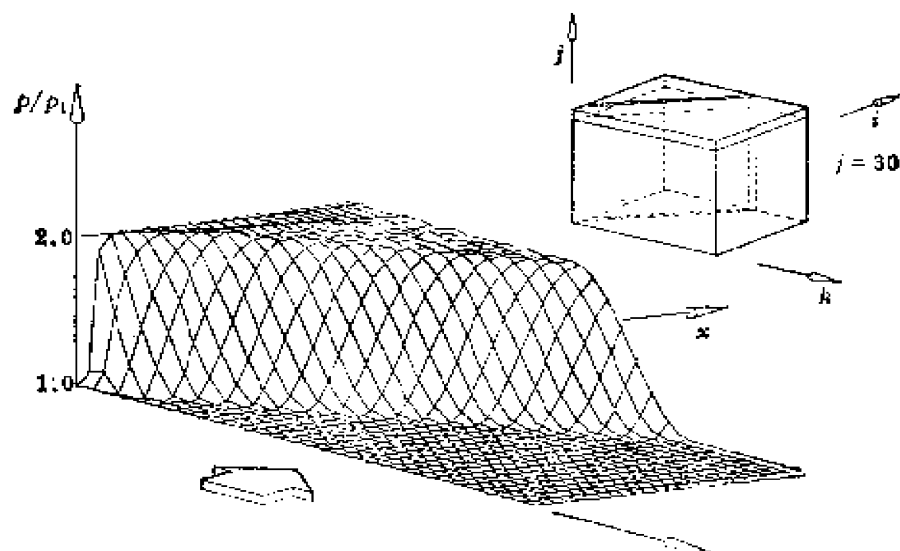


图11-30　$J=30$面上的压力分布

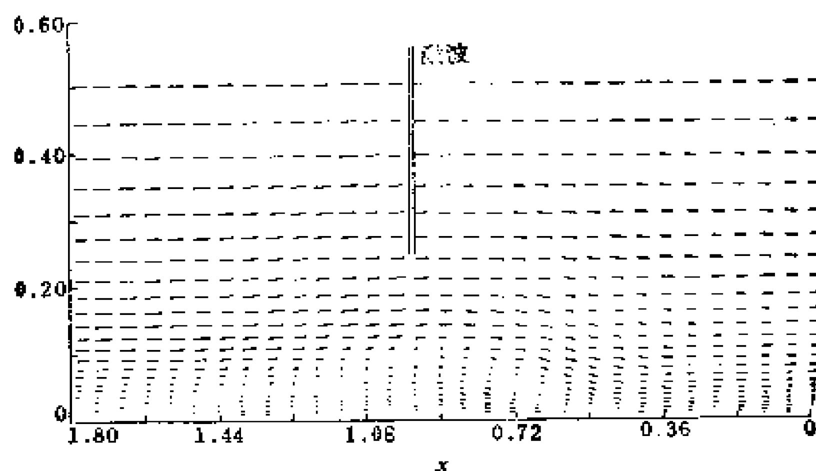


图11-31　在 $i=20$时的$V-U(N)$速度图

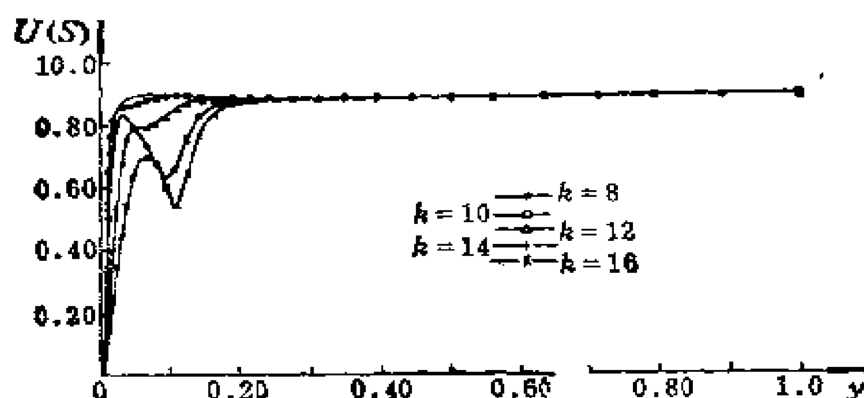


图11-32 在 $i=20$, $k=8$, 10, 12, 14, 16时 $U(s)$ 剖面

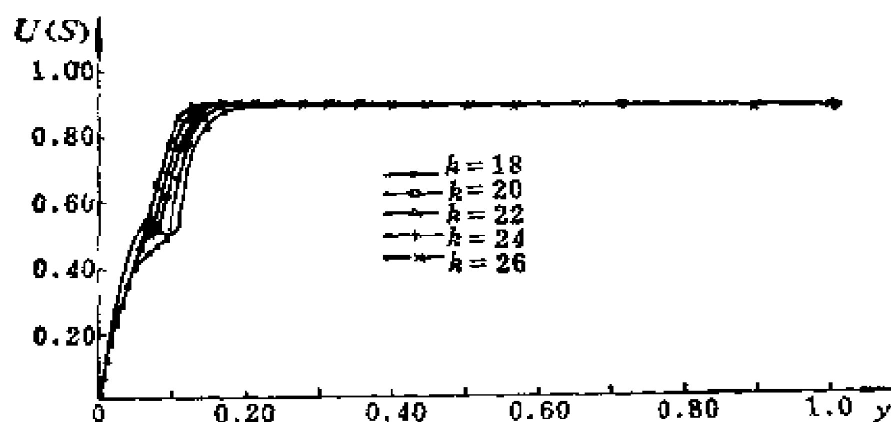


图11-33 在 $i=20$, $k=18$, 20, 22, 24, 26时 $U(s)$ 剖面

附录 球坐标转换关系

设正文中的坐标曲面的对称轴为 x 轴，来流速度向量通过球头中心点的直线为 $\bar{x}$ 轴，建立两个球坐标系。一为体轴：以 x 轴为 $\theta=0$ 的轴，且设坐标球心原点与物体的球头中心点重合，坐标系为 (R, θ, φ)；另一坐标系为风轴：以 $\bar{x}$ 轴为 $\theta=0$ 的

轴，坐标球心仍与物体的球头中心点重合，坐标系为 $(\bar{R}, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$。

设来流速度向量与 x 轴之间的夹角为 α，则两个坐标系 (R, θ, φ) 与 $(\bar{R}, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$ 之间有以下关系式

$$\begin{cases} \sin\bar{\theta}\cos\bar{\varphi} = \cos\varphi\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha \\ \cos\bar{\theta} = \sin\theta\cos\varphi\sin\alpha + \cos\theta\cos\alpha \\ \sin\bar{\theta}\sin\bar{\varphi} = \sin\theta\sin\varphi \end{cases}$$

这里要求在计算中 $\bar{\theta}$ 的取值满足以下条件

当 $\cos\bar{\theta} \geqslant 0$ 时：　$\bar{\theta} = \sin^{-1}(\sin\bar{\theta})$

当 $\cos\bar{\theta} < 0$ 时：　$\bar{\theta} = \pi - \sin^{-1}(\sin\bar{\theta})$

两个坐标在各坐标方向的速度分量之间有以下关系式

$$V_R = V_{\bar{R}}$$

$$\begin{cases} V_\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}(\cos\bar{\theta}\cos\bar{\varphi}\sin\alpha + \sin\bar{\theta}\cos\alpha)V_{\bar{\theta}} \quad \text{当 } \sin\theta \neq 0 \text{ 时} \\ V_\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}(\cos\bar{\theta}\sin\bar{\varphi}\sin\varphi + [\cos\bar{\theta}\cos\bar{\varphi}\cos\alpha - \sin\bar{\theta}\sin\alpha] \\ \qquad \cdot \cos\varphi)V_{\bar{\theta}} \quad \text{当 } \cos\theta \neq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_\varphi = (\cos\bar{\theta}\sin\bar{\varphi}\cos\varphi - [\cos\bar{\theta}\cos\bar{\varphi}\cos\alpha - \sin\bar{\theta}\sin\alpha]\sin\varphi)V_{\bar{\theta}} \\ \qquad \text{当 } \sin\theta \neq 0 \text{ 时} \\ V_\varphi = \dfrac{1}{\sin\varphi}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}[\cos\bar{\theta}\cos\bar{\varphi}\sin\alpha - \sin\bar{\theta}\cos\alpha]\cdot\cos\theta\cos\varphi \right. \\ \qquad \left. + \sin\bar{\theta}\sin\alpha - \cos\bar{\theta}\cos\bar{\varphi}\cos\alpha\right)V_{\bar{\theta}} \quad \text{当 } \cos\theta \neq 0 \\ \qquad \sin\theta \neq 0 \\ \qquad \sin\varphi \neq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

方程式中的 V_R，V_θ，V_φ 对应为体轴坐标系内三个坐标 R，θ 和 φ 方向上的速度分量。$V_{\bar{R}}$，$V_{\bar{\theta}}$，$V_{\bar{\varphi}}$ 为风轴坐标系中对应于 R，θ，φ 三个坐标方向上的速度分量。

两个坐标系的坐标参数之间有以下关系式

$$\bar{R} = R$$

$$\bar{\theta} = \arccos(\sin\theta\cos\varphi\sin\alpha + \cos\theta\cos\alpha)$$

参考文献

1 Rigk Y M Chaussee D S and McRae D S. Computation of Hypersonic Viscous Flow Around Three-Dimensional Bodies at High Angles of Attack. AIAA Faper 81-1261

2 Rakich J V and Kutler P Comparison of Characteristics and Shock Capturing Methods with Application to the Space Shuttle Vehicle. AIAA paper 72-191

3 傅德薰，马延文．钝锥三维粘性绕流背风面分离的数值模拟．力学学报，1991，23(2).

4 马延文，理心一．三元 Navier-Stokes 方程的数值计算——激波与附面层的相互干扰．空气动力学学报，1983(2)

5 马延文．一个三元分离流动的数值分析．空气动力学学报，1986(1).